الكلية متعددة التخصصات الناظور

ⵜⴰⵖⵉⵡⴰⵏⵜ ⵜⴰⴳⵜⵉⵣⵍⵉⵜ ⵏ ⵏⵏⴰⴹⵓⵕ

Faculté Pluridisciplinaire de Nador

Analyse I
Chapitre 2 : Fonctions Réelles d'une Variable Réelle

Toufik Chaayra

Département : Mathématiques
Filière : SMPC - S1
Année universitaire : 2022/2023

27 Octobre, 2022

Plan

1. Fonctions Réelles
   - 2.1 Notions de fonction
   - 2.2 Fonctions majorées, minorées, bornées
   - 2.3 Parité et périodicité
   - 2.4 Opération sur les fonctions
     - 2.4.1 Somme et produit de deux fonctions
     - 2.4.2 Produit d'une fonction par un nombre réel
     - 2.4.3 Composition de deux fonctions
   - 2.5 Limites
   - 2.6 Propriétés des limites et opération
   - 2.7 Continuité en un point
     - 2.7.1 Prolongement par continuité
     - 2.7.2 Suites et continuité
   - 2.8 Fonctions continues sur un intervalle
   - 2.9 Fonctions réciproques
   - 2.9.1 Rappels : injection, surjection, bijection
   - 2.10 Propriétés des fonctions monotones sur un intervalle

Notions de fonction

Définition 1

On appelle fonction numérique, toute application f définie d'une partie D de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

l'ensemble D, noté D_f, est appelé domaine de définition de f.
L'ensemble $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)), x \in D_f\}$ est appelé courbe représentative, ou graphe, de f.

Remarque

Dans la suite, on appellera fonction toute fonction numérique d'une variable réelle.

Notions de fonction

Exemple

- Soient a et b deux nombres réels. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ s'appelle une fonction affine. Elle est définie sur toute la droite réelle.
- La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie sur $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}^*$.
- La fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ est définie sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
- La fonction $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est définie sur $[-1, 1]$.
- La fonction $f(x) = \sin(x)$ est définie sur tout $\mathbb{R}$.

Définition 2

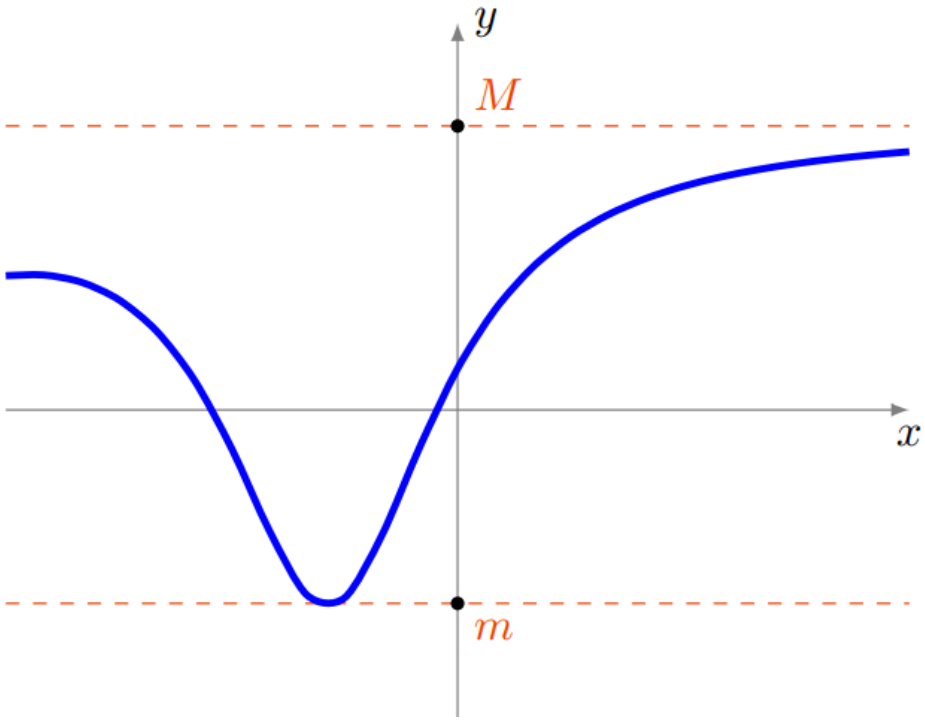
Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors :

- $f \geq g$ si $\forall x \in D,\ f(x) \geq g(x)$;
- $f \geq 0$ si $\forall x \in D,\ f(x) \geq 0$;
- $f > 0$ si $\forall x \in D,\ f(x) > 0$;
- f est dite constante sur D si $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in D,\ f(x) = a$;
- f est dite nulle sur D si $\forall x \in D,\ f(x) = 0$.

Définition 3

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est majorée sur D si $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in D,\ f(x) \leq M$;
- f est minorée sur D si $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \in D,\ f(x) \geq m$;
- f est bornée sur D si f est à la fois majorée et minorée sur D, c'est-à-dire si $\exists M > 0\ \forall x \in D,\ |f(x)| \leq M$



Parité et périodicité

Définition 4

Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle

- f est paire si et seulement si $\forall x \in D_f,\ -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$
- f est impaire si et seulement si $\forall x \in D_f,\ -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$

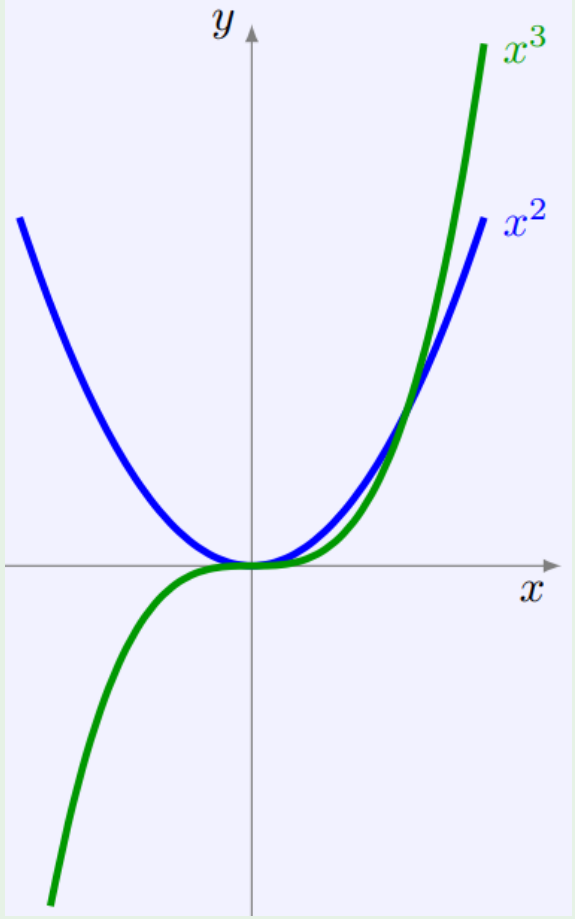
Remarque

- le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées,
- le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Parité et périodicité

Exemple

- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$ est paire.
- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$ est impaire.



Définition 5

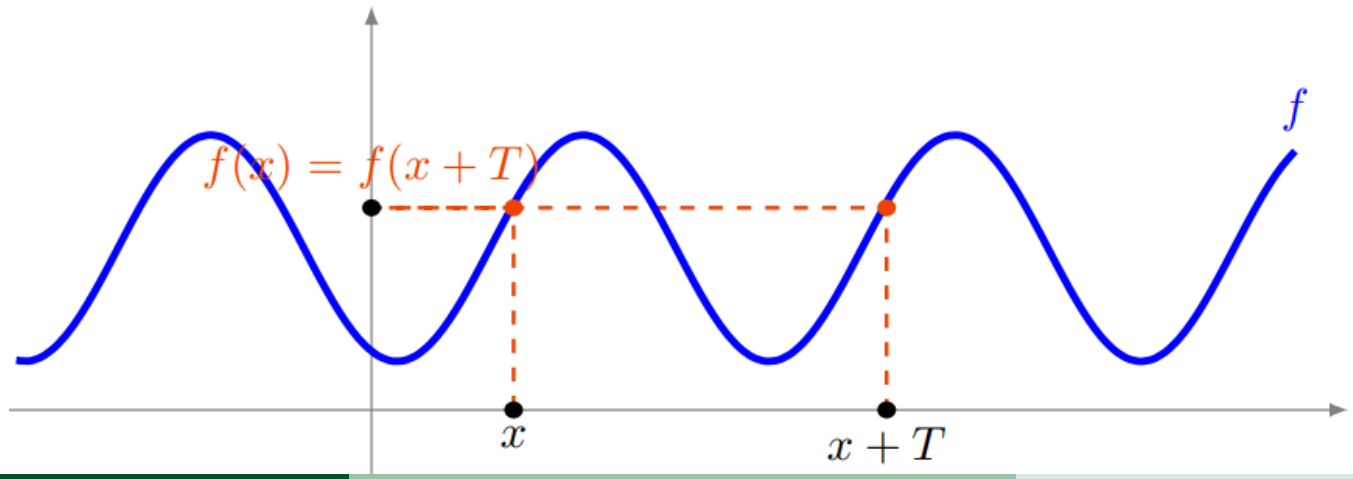
Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle, on dit que f est périodique de période $T > 0$ si et seulement si

1. $\forall x \in D_f,\ x + T \in D_f$
2. $\forall x \in D_f,\ f(x+T) = f(x)$

T est le plus petit réel strictement positif qui vérifie 2)

Remarque

Le graphe d'une fonction périodique de période T est invariant par la translation de vecteur $T\vec{i}$



Somme et produit de deux fonctions

Définition 6

Si f et g sont deux fonctions réelle d'une variable réelle, on appelle somme et produit de f et g les fonctions $s = f + g$ et $p = f \times g$ définies par : $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $s(x) = f(x) + g(x)$ et $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $p(x) = f(x) \times g(x)$.

Produit d'une fonction par un nombre réel

Définition 7

Si f est une fonction réelle d'une variable réelle, on appelle produit de la fonction f par un nombre réel α la fonction $g = \alpha.f$ définie par : $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $g(x) = \alpha \times f(x)$

Composition de deux fonctions

Définition 8

Soient f et g deux fonctions réelles d'une variable réelle définies respectivement sur partie E de $\mathbb{R}$ et sur une partie F de $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in E$ on a $f(x) \in F$.
On définit sur E la fonction composée de f et g, que l'on note $g \circ f$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Remarque

1. Il faut faire attention à l'ordre dans lequel on compose car $g \circ f \neq f \circ g$.
   Pour s'en apercevoir on considère les fonctions f et g, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 1$.
   On a pour tout nombre réel x : $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$ et $(f \circ g)(x) = (x+1)^2$ et on a évidemment $g \circ f \neq f \circ g$.
2. Il faut faire aussi attention aux domaines de définitions de fonctions composées. Pour s'en convaincre considérer les fonctions $f = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ et donner le domaine de définition de leurs composées.

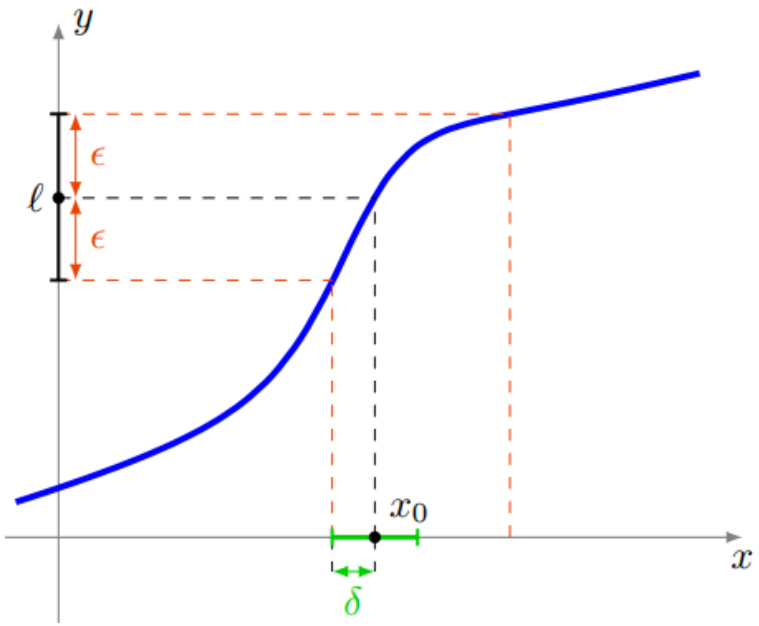
Limite en un point

Définition 9

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 sauf, peut-être, en x_0. On dit que f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ au point x_0 si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : (\forall x \in \mathcal{V} \text{ et } 0 < |x - x_0| < \delta) \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon,$$

on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.



Limite en un point

Remarque

- L'inégalité $|x - x_0| < \delta$ équivaut à $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.
  L'inégalité $|f(x) - \ell| < \epsilon$ équivaut à $f(x) \in]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$.
- On peut remplacer certaines inégalités strictes " $<$ " par des inégalités larges " $\leq$ " dans la définition :

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ (\forall x \in \mathcal{V} \text{ et } |x - x_0| \leq \delta) \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon$$

- Dans la définition de la limite

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ (\forall x \in \mathcal{V} \text{ et } \forall x \in \mathcal{V} \ \ |x - x_0| < \delta) \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

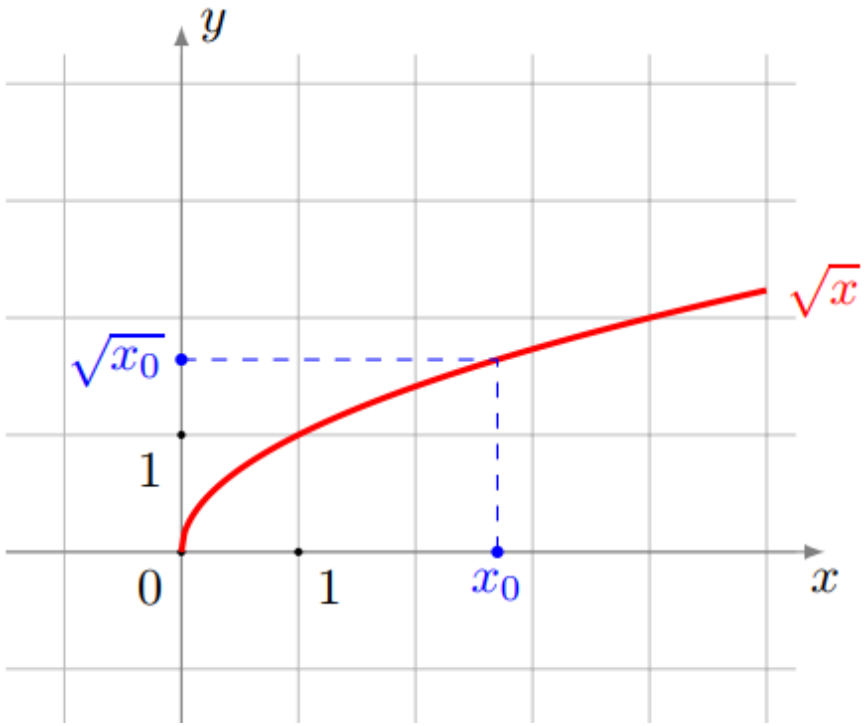
  le quantificateur $\forall x \in \mathcal{V}$ n'est là que pour être sur que l'on puisse parler de $f(x)$. Il est souvent omis et l'existence de la limite s'écrit alors juste :

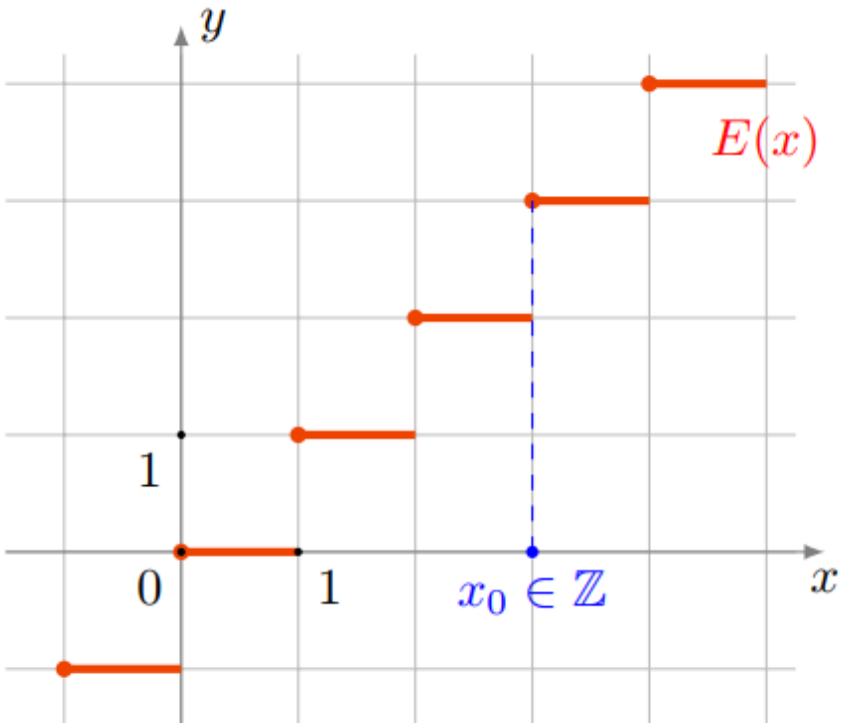
$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ : \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Limite en un point

Exemple

- $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ pour tout $x_0 \geq 0$,
- la fonction partie entière E n'a pas de limite aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$.





Définition 10

1. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ au point x_0 si :

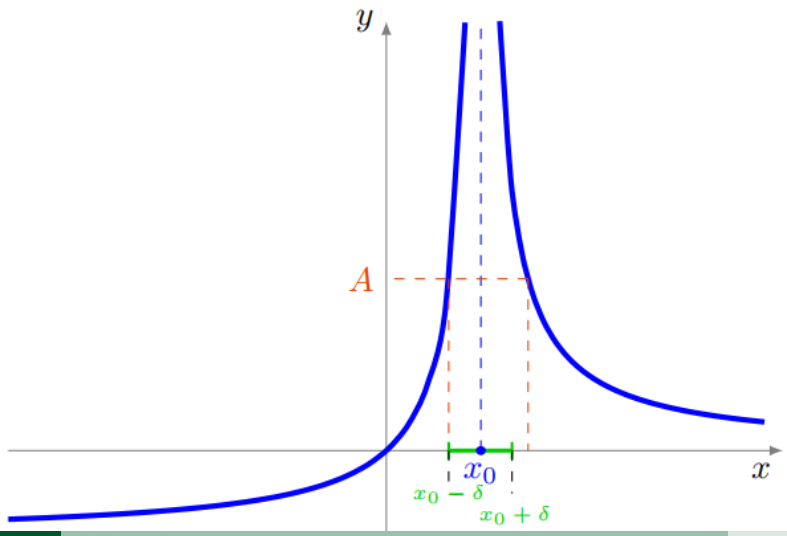
$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 : (\forall x \in \mathcal{V} \text{ et } 0 < |x - x_0| < \delta) \Longrightarrow f(x) > A,$$

on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

2. On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ au point x_0 si :

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 : (\forall x \in \mathcal{V} \text{ et } 0 < |x - x_0| < \delta) \Longrightarrow f(x) < -A,$$

on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.



Limite à droite et à gauche en un point

Définition 11

Soit f une fonction définie sur $I = [a, b]$, $(a < b)$ sauf, peut-être, aux points a et b.

1. On dit que f admet pour limite, $l \in \mathbb{R}$, à droite en a si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : (\forall x \in I \text{ et } 0 < x - a < \eta) \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon,$$

on écrit $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$.

2. On dit que f admet pour limite, $l \in \mathbb{R}$, à gauche en b si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : (\forall x \in I \text{ et } 0 < b - x < \eta) \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon,$$

on écrit $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = l$.

Limite à droite et à gauche en un point

Exemple

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x > 1 \\ x+1 & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

Alors $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$.

Remarque

Pour qu'une fonction possède une limite en un point il faut et il suffit qu'elle possède en ce point des limites à droite et à gauche qui sont égales.

Limite en l'infini

Définition 12

Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'infini.

1. On dit que f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists B > 0 : x > B \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon,$$

   on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

2. On dit que f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $-\infty$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists B > 0 : x < -B \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon,$$

   on écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

3. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists B > 0 : x > B \Longrightarrow f(x) > A,$$

   on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en l'infini

4. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists B > 0 : x < -B \Longrightarrow f(x) > A,$$

on écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

5. On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists B > 0 : x > B \Longrightarrow f(x) < -A,$$

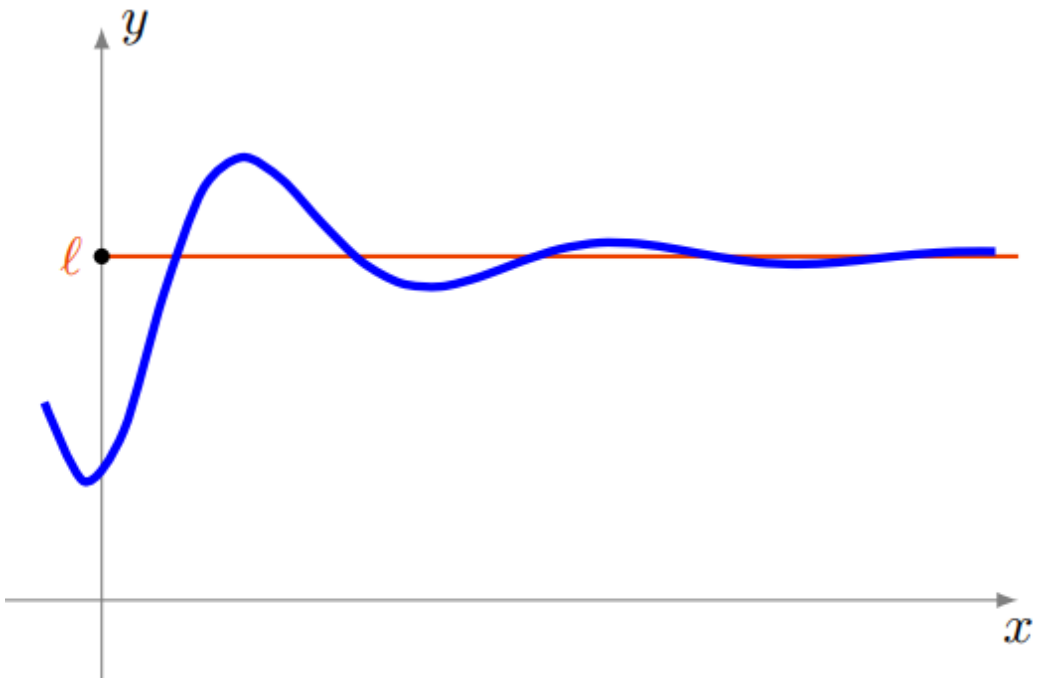
on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

6. On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists B > 0 : x < -B \Longrightarrow f(x) < -A,$$

on écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Limite en l'infini



Propriété 1

Si f admet pour limite ℓ, (ℓ fini ou non), en x_0, (x_0 fini ou non), alors cette limite est unique.

Preuve : On adapte la même preuve de l'unicité de la limite d'une suite (un raisonnement par l'absurde).

Propriétés des limites et opération

Propriété 2

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ sauf peut-être en x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 et g admet pour limite $\ell' \in \mathbb{R}$ en x_0 alors les fonctions $f+g, \lambda f$ et fg ont une limite en x_0 et on a :

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = \ell + \ell'$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda \ell$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = \ell \ell'$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$ si $\ell \neq 0$.
- Si dans un voisinage de x_0 on a $f(x) \geq 0$, alors $\ell \geq 0$.

Cette proposition se montre de manière similaire à la proposition analogue sur les limites de suites. Nous n'allons donc pas donner la preuve de tous les résultats.

Preuve : Montrons par exemple que si f tend en x_0 vers une limite ℓ non nulle, alors $\frac{1}{f}$ est bien définie dans un voisinage de x_0 et tend vers $\frac{1}{\ell}$.
Supposons $\ell > 0$, *le cas* $\ell < 0$ *se montrerait de la même manière*. Montrons tout d'abord que $\frac{1}{f}$ est bien définie et est bornée dans un voisinage de x_0. Par hypothèse

$$\forall \epsilon' > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{V} \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Longrightarrow \ell - \epsilon' < f(x) < \ell + \epsilon'$$

Si on choisit ϵ' tel que $0 < \epsilon' < \ell/2$, alors on voit qu'il existe un intervalle $J = \mathcal{V} \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tel que pour tout x dans J, $f(x) > \ell/2 > 0$, c'est-à -dire, en posant $M = \ell/2$

$$\forall x \in J,\ 0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M}$$

Fixons à présent $\epsilon > 0$. Pour tout $x \in J$, on a

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|\ell - f(x)|}{f(x)\ell} < \frac{1}{M\ell} |\ell - f(x)|.$$

Donc, si dans la définition précédente de la limite de f en x_0 on choisit $\epsilon' = \epsilon M \ell$, alors on trouve qu'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in J \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Longrightarrow \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} \right| < \frac{1}{M\ell} |\ell - f(x)| < \frac{\epsilon'}{M\ell} = \epsilon$$

Remarque

- Les résultats relatifs aux opérations sur les limites en x_0 s'appliquent en particulier lorsqu'il s'agit de limites à droite en x_0, à gauche en x_0, quand x tend vers $+\infty$ ou quand x tend vers $-\infty$.
- Les formes indéterminés qu'on peut rencontrer sont :

$$-\infty+\infty, \quad 0\times\infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty.$$

Continuité en un point

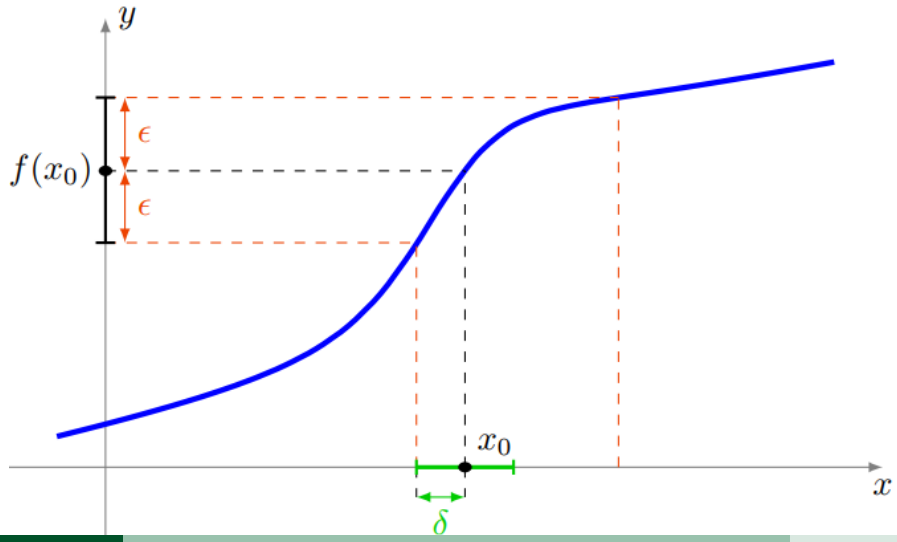
Définition 13

Soit f une fonction définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de $x_0 \in \mathbb{R}$.
On dit que f est continue en x_0 si f admet une limite finie en x_0 et cette limite est égale à $f(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

c-à-d

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{V} \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$



Continuité en un point

Exemple

La fonction $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

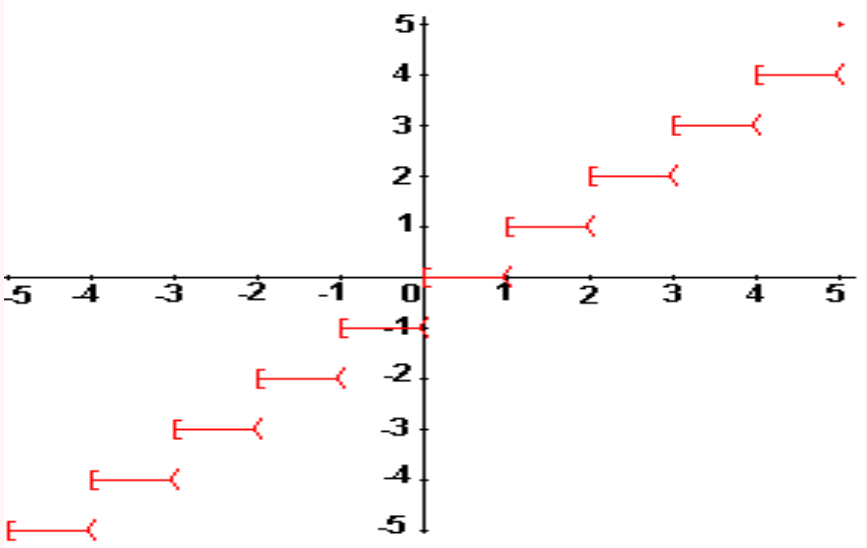
Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe ¡¡ sans lever le crayon ¿¿, c'est-'a -dire si elle n'a pas de saut.
Existe-t-il des fonctions non continues ? Oui, il suffit de tracer une courbe avec une rupture dans le tracé ; la fonction associée n'est alors pas continue.

Exemple d'une fonction explicite non continue, la fonction « Partie entière » :

Soit x un réel. Il existe alors un entier relatif n unique tel que : $n \leq x < n+1$. On définit alors la fonction partie entière, notée E, par : $E(x) = n$. Par exemple, $E(2.3) = 2$; $E(3) = 3$; $E(-4.12) = -5$ (**attention aux nombres négatifs**).

Remarque

Cette fonction est constante sur chaque intervalle de la forme $[n; n+1[$.



Représentation graphique de la fonction partie entière $E(x)$.

Sur $[n\ ;\ n+1[$, $E(x) = n$

$\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x > n}} E(x) = n$, puisque $E(x) = n$ sur $[n\ ;\ n+1[$

$\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x < n}} E(x) = n-1$, puisque $E(x) = n-1$ sur $[n-1\ ;\ n[$

Comme $E(n) = n$, alors on n'a donc pas $\lim\limits_{x \to n} E(x) = E(n)$: E n'est pas continue en n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

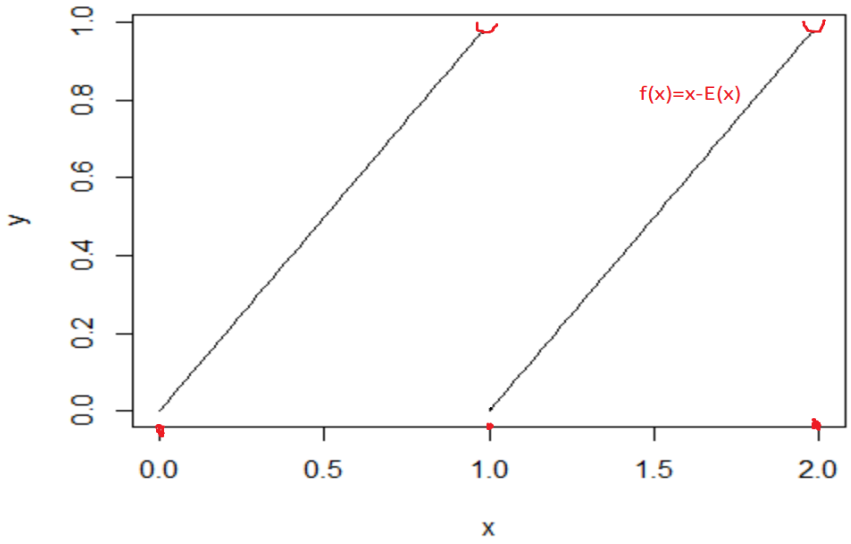
Exercice : Etudier la continuité de la fonction f définie par $f(x) = x - E(x)$ sur l'intervalle $[0, 2]$.

Sur $[0, 1[$, on a $x \to E(x)$ et $x \to x$ sont continues alors f est continue sur $[0, 1[$.

Sur $[1, 2[$, on a $x \to E(x)$ et $x \to x$ sont continues alors f est continue sur $[1, 2[$.

En 1, on a $f(1) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 1 - 0$ alors $f(1) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x)$ et donc f n'est pas continue en 1.

En 2, on a $f(2) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = 2 - 1 = 1$ alors $f(2) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x)$ et donc f n'est pas continue en 2.



Représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = x - E(x)$ sur l'intervalle $[0, 2]$.

Conclusion : La fonction f n'est pas continue sur l'intervalle $[0, 2]$.

Définition 14

Définition Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, $(a < b)$.

- On dit que f est continue à droite en a si : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue à gauche en b si : $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Exemple

La fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 2x & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

est continue à droite en 1 mais n'est pas continue à gauche en 1

Remarque

Pour qu'une fonction f soit continue en un point il faut et il suffit qu'elle soit continue à droite et à gauche en ce point.

Operation sur les fonctions continues

Propriété 3

- Soient f, g deux fonctions continues en un point x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $f+g, \lambda f$ et fg sont continues en x_0. Si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0.
- Si f est définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 et continue en x_0 et si g est définie sur un voisinage $\mathcal{W}$ de $y_0 = f(x_0)$ et continue en y_0, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en x_0.

Prolongement par continuité

Définition 14

Soit f une fonction définie sur D_f.
Si $x_0 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, on définit la fonction g par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si} \quad x \in D_f \\ g(x_0) = l \end{cases}$$

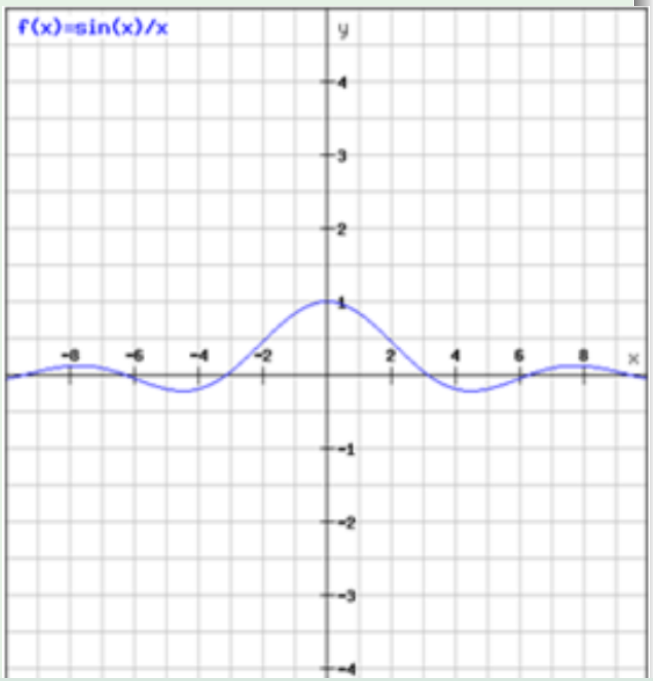
La fonction g est continue en x_0 et coincide avec f sur D_f.
On dit que g est le prolongement par continuité de f en x_0.

Exemple

1. Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ par

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}.$$

En remarquant que $2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$, on peut écrire pour $x \neq 1, f(x) = 2x + 1$.
Donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$.
La fonction $g : x \longmapsto 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ est continue en $x_0 = 1$ et coincide avec f sur D_f. Donc g est le prolongement par continuité de f en $x_0 = 1$.



La fonction $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.
Comme $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 0 , posons

2. $$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

g est le prolongement par continuité de f en 0.

Suites et continuité

Propriété 4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de I. Alors :
f est continue en $x_0 \iff$ [pour toute suite (u_n) qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$]

Fonctions continues sur un intervalle

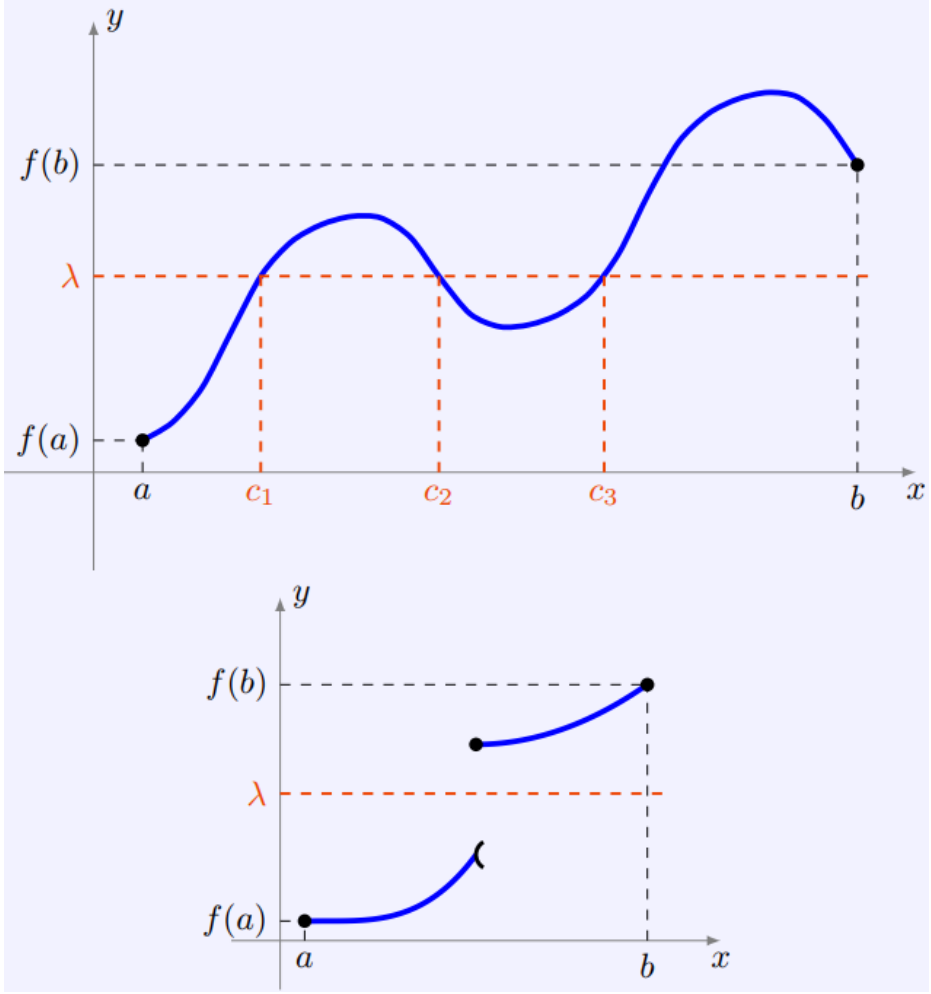
Rappelons qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est appelée intervalle si pour tous x et y dans I, l'intervalle $[x, y]$, $(x < y)$, est inclus dans I.

Définition 15

Une fonction définie sur un intervalle I est dite continue sur I, si elle est continue en tout point de I.

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires T.V.I.)

f est une fonction **continue** définie sur un intervalle I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$, et λ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.



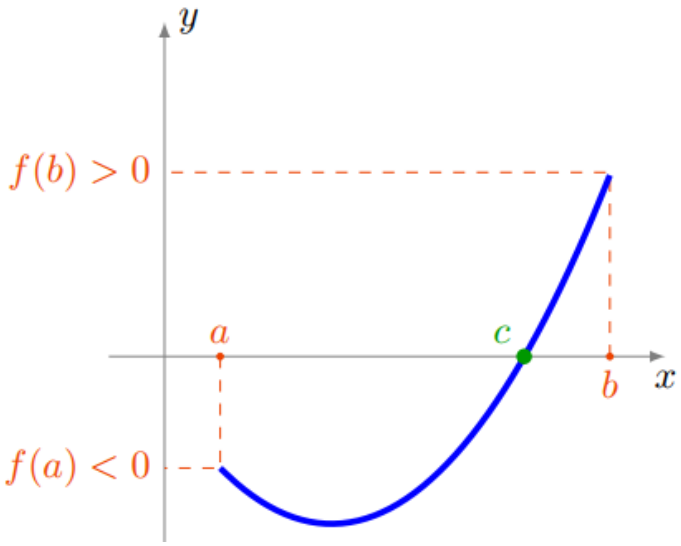
Corollaire

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors $f(I)$ est un intervalle.

Fonctions continues sur un intervalle

Propriété 5

Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$.
Si $f(a).f(b) < 0$ alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.



Preuve : D'après le corollaire $f(I)$ est un intervalle. Si de plus $f(a).f(b) < 0$ alors $0 \in f(I)$ par suite il existe $c \in I$ tel que $f(c) = 0$.

Exemple

Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.

Remarque

On peut exprimer le théorème des valeurs intermédiaires sous la forme plus condensée suivante : l'image d'un intervalle par une application continue (à valeurs réelles) est un intervalle.

Théorème du point fixe

Si f est une fonction continue de $[a, b]$ vers $[a, b]$, alors il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$. Le point x_0 est appelé point fixe de f.

Preuve : Considérons la fonction $g(x) = f(x) - x$. Cette fonction est continue sur $[a, b]$, de plus $g(a) \geq 0$ (car $f(a) \in [a, b]$) et $g(b) \leq 0$ (car $f(b) \in [a, b]$).
La fonction g étant continue sur $[a, b]$ et vérifie $g(a)g(b) \leq 0$, il résulte du T.V.I qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$, donc $f(x_0) = x_0$.

Théorème

Toute fonction continue $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'ils existent x_0 et x_1 dans $[a, b]$ tels que

$$m = f(x_0) = \min_{x \in [a,b]} f(x), \ M = f(x_1) = \max_{x \in [a,b]} f(x) \text{ et } f([a, b]) = [m, M]$$

Propriété 6

- Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b], \ a < b$. Alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.
- Si f une fonction continue, strictement monotone sur $[a, b], \ a < b$ et $f(a).f(b) < 0$, alors il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Injection, surjection, bijection

Définition 16

Soit $f : E \to F$ une fonction, avec E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.

- f est injective si $\forall x, x' \in E$ tel que $f(x) = f\left(x'\right) \Longrightarrow x = x'$,
- f est surjective si $\forall y \in F,\ \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$;
- f est bijective si f est à la fois injective et surjective, c'est-à -dire si

$$\forall y \in F\ \exists! x \in E \text{ tel que } y = f(x).$$

Propriété 7

Si $f : E \to F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$. La fonction g est la bijection réciproque de f et se note f^{-1}.

Propriétés des fonctions monotones sur un intervalle

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur I, alors f est injective sur I.

Preuve : Montrons que f est injective : soient $x \neq y$, alors par exemple $x < y$ et si f est strictement croissante, alors $f(x) < f(y)$ d'où $f(x) \neq f(y)$ donc f injective. C.Q.F.D

Théorème de la bijection

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors

1. f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,
2. la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.

Propriétés des fonctions monotones sur un intervalle

Représentation graphique :
Pour obtenir la courbe représentative de la fonction f^{-1} à partir de la courbe représentative de f, il faut effectuer une symétrie d'axe la droite d'équation $y = x$.

Application :
On utilisera souvent ce théorème pour répondre à la question "Montrer que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle I." En effet si on montre que f est bijective de I sur J et si on vérifie que $k \in J$ alors on peut dire que k admet un unique antécédent α et ce α est bien l'unique solution de $f(x) = k$.

Exemple

Montrer que l'équation $e^x = \dfrac{1}{x}$ admet, sur $]0; +\infty[$, une unique solution α et montrer que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.