الكلية متعددة التخصصات الناظور

ⵜⴰⵖⵉⵡⴰⵏⵜ ⵜⴰⴳⵜⵉⵣⵍⵉⵜ ⵏ ⵏⵏⴰⴹⵓⵕ

Faculté Pluridisciplinaire de Nador

Analyse I

Chapitre 4 : Fonctions équivalentes & Développements limités

Toufik Chaayra

Département : Mathématiques
Filière : SMPC - S1
Année universitaire : 2022/2023
t.chaayra@gmail.com

24 Novembre, 2022

Plan

Fonctions équivalentes

Définition 1

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0.
On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 s'il existe une fonction h définie au voisinage de x_0 telle que $f(x) = g(x)h(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 1$, et on écrit $f \underset{x_0}{\sim} g$.

Remarque

S'il existe un voisinage de x_0 où g ne s'annule pas, alors

$$f \underset{x_0}{\sim} g \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemples

$$\sin x \underset{0}{\sim} x, \quad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x, \quad e^x \underset{0}{\sim} 1, \quad \tan x \underset{0}{\sim} x, \quad 1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}, \quad e^x - 1 \underset{0}{\sim} x.$$

Proposition 1

1. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence
   - La relation $\sim$ est **réflexive** $f \underset{x_0}{\sim} f$.
   - La relation $\sim$ est **symétrique** $(f \underset{x_0}{\sim} g) \Longrightarrow (g \underset{x_0}{\sim} f)$.
   - La relation $\sim$ est **transitive** $(f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h) \Longrightarrow (f \underset{x_0}{\sim} h)$.
2. Si $(f \underset{x_0}{\sim} g)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.
3. Si $(f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1)$ et si $(f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2)$ alors $(f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 g_2)$ (compatibilité avec le produit).
4. $(f \underset{x_0}{\sim} g)$ et $\dfrac{1}{f}$ est définie au voisinage de x_0 alors $(\dfrac{1}{f} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{1}{g})$.
5. Si $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ avec $a_n \neq 0$ alors $P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_n x^n$.
6. Si $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ avec $a_n \neq 0$ et $Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ avec $b_n \neq 0$ alors $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a_n x^n}{b_n x^n}$.
7. Si $\lim\limits_{t \to a} h(t) = b$ et $(f \underset{b}{\sim} g)$ alors $foh \underset{a}{\sim} goh$.
8. $f \underset{x_0}{\sim} g \Longrightarrow f^\alpha \underset{x_0}{\sim} g^\alpha, \alpha > 0$.

Fonctions équivalentes

Exemple

Montrons que

$$x + 1 + \ln(x) \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

En effet,

$$\frac{x + 1 + \ln(x)}{\ln(x)} = \frac{x}{\ln(x)} + \frac{1}{\ln(x)} + 1 \underset{0}{\to} 1.$$

Fonctions négligeables

Définition 2

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0 (fini ou infini).
On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

On écrit $f \underset{x_0}{=} o(g)$.

Remarque

S'il existe un voisinage de x_0 où g ne s'annule pas alors

$$f \underset{x_0}{=} o(g) \iff \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \right).$$

Exemples

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}, \ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha)$.

Fonctions négligeables

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}, x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^x)$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ et pour tout $\beta \in \mathbb{R}^{*+}, (\ln(x))^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$,
  $\left(\text{car } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0\right)$.
- On a $\ln(1+2x) \underset{0}{=} o(x\ln(x))$. En effet $\dfrac{\ln(1+2x)}{x\ln(x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{2x}{x\ln(x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{\ln(x)} \underset{0}{\to} 0$

Proposition 2

★ $(f \underset{x_0}{=} o(g) \text{ et } g \underset{x_0}{=} o(h)) \Longrightarrow f \underset{x_0}{=} o(h)$.

★ $(f \underset{x_0}{=} o(g) \text{ et } g \underset{x_0}{\sim} h) \Longrightarrow f \underset{x_0}{=} o(h)$.

★ $(f \underset{x_0}{\sim} g) \Longrightarrow f - g \underset{x_0}{=} o(g)$.

Formule de Taylor-Lagrange

Si une fonction f est définie et continue sur $[a, b]$, ainsi que ses $n-1$ premières dérivées, et si elle admet dans l'intervalle $]a, b[$ une dérivée d'ordre n, alors il existe une valeur $c \in]a, b[$ pour laquelle

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c) \tag{1}$$

Cette formule est appelée formule de Taylor d'ordre $n-1$. Le dernier terme est appelé reste ou reste de Lagrange.

Preuve : Considérons la fonction g définie sur $[a, b]$ par :

$$g(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \cdots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) - \frac{(b-x)^n M}{n!}$$

où M est une constante telle que $g(a) = 0$. Puisque $f^{(n-1)}$ est définie et continue, alors g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus $g(a) = g(b) = 0$, donc on peut appliquer le théorème de Rolle à g : il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. On a :

$$g'(x) = -(b-x)f''(x) + \cdots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} M.$$

Après simplifications, on trouve :

$$g'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\left[M - f^{(n)}(x)\right].$$

Or ; $g'(c) = 0$ donc $M = f^{(n)}(c)$. En outre, $g(a) = 0$ d'où le résultat. C.Q.F.D.

Remarque

- L'égalité (1) peut encore s'écrire avec $h = b - a$

$$f(h+a) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h),$$

avec $0 < \theta < 1$.

- **Rappel :** $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ avec n un nombre entier.

Corollaire (Valeur approchée)

Si en plus la fonction $\left|f^{(n)}\right|$ est majorée sur I par un réel M, alors pour tout $a, x \in I$, on a :

$$|f(x) - T_{n-1}(x)| \leqslant M\frac{|x-a|^n}{n!}$$

Exemple (Approximation de $\sin(0,01)$)

Soit $f(x) = \sin x$. Alors
$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f^{(3)}(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x.$
On obtient donc $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f^{(3)}(0) = -1.$
La formule de Taylor-Lagrange ci-dessus en $a = 0$ à l'ordre 3 devient :

$$f(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2!} - 1\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(c)\frac{x^4}{4!},$$

c'est-à-dire

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + f^{(4)}(c)\frac{x^4}{24},$$

pour un certain c entre 0 et x.
Appliquons ceci pour $x = 0,01$. Le reste étant petit, on trouve alors

$$\sin(0,01) \approx 0,01 - \frac{(0,01)^3}{6} = 0,00999983333\ldots$$

On peut même savoir quelle est la précision de cette approximation :
Comme $f^{(4)}(x) = \sin x$ alors $\left|f^{(4)}(c)\right| \leqslant 1$. Donc

$$\left|f(x) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right| \leqslant \frac{x^4}{4!}.$$

Pour $x = 0,01$, cela donne :

$$\left|\sin(0,01) - \left(0,01 - \frac{(0,01)^3}{6}\right)\right| \leqslant \frac{(0,01)^4}{24}.$$

Comme $\frac{(0,01)^4}{24} \approx 4,16 \cdot 10^{-10}$ alors notre approximation donne au moins 8 chiffres exacts après la virgule.

Remarque

Le nombre c est souvent désigné par $a + \theta(b - a)$ avec $0 < \theta < 1$. Comme conséquence immédiat du théorème ci-dessus on a la formule de Taylor Mac-Laurin :

Formule de Taylor-Mac-Laurin

Soit f une fonction définie et continue sur $[0, x]$, ainsi que ses $n - 1$ premières dérivées. On suppose que $f^{(n)}$ existe sur $]0, x[$. Alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x),\ 0 < \theta < 1.$$

Preuve : On applique le théorème ci dessus avec $a = 0$ et $b = x$.

Remarque

Si on prend $b = a + h$ ($h < 0$ ou $h > 0$), on aura :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a + \theta h).$$

Exemple

Soit $f(x) = e^x$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = e^x$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}, \ 0 < \theta < 1$$

Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction définie et continue sur un voisinage I de x_0, ainsi que ses n premières dérivées. Alors pour tout $x \in I$ on a :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x),$$

où ε une fonction définie sur I telle que $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Preuve : Appliquons la formule de Taylor d'ordre n à la fonction f sur $[x_0, x]$ (on suppose $x_0 < x$). Alors, il existe $c_x \in]x_0, x[$, tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^p}{p!} f^{(p)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(c_x) \\ &= \sum_{p=0}^{n} \frac{(x-x_0)^p}{p!} f^{(p)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x) \end{aligned}$$

avec : $c_x = x_0 + \theta(x - x_0), 0 < \theta < 1$ et $\varepsilon(x) = \dfrac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(x_0)}{n!}$

On a bien : $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ car $\lim\limits_{x \to x_0} f^{(n)}(c_x) = f^{(n)}(x_0)$ C.Q.F.D.

Remarque

Si on pose $x_0 = 0$ dans la formule de Taylor-Young on obtient la formule de Mac-Laurin-Young.

Exemple

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

Développement limité d'ordre 1

Proposition 2

Une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable en a si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et une fonction ε définie dans un intervalle J ouvert contenant 0, vérifiant $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ tels que

$$\forall h \in J,\ f(a+h) = f(a) + \alpha h + h\varepsilon(h).$$

Dans ce cas, on a $\alpha = f'(a)$ et on dit que f admet **un développement limité (DL) d'ordre** 1 en a.

Preuve : Soit $a \in I$,

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) < +\infty$$

$$\iff \lim_{h \to 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = f'(a) \text{ (en posant le changement de variable } h = x - a)$$

$\iff$ elle existe une fonction ε vérifiant $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ tel que

$$\frac{f(h+a) - f(a)}{h} = f'(a) + \varepsilon(h) \iff f(a+h) = f(a) + \alpha h + h\varepsilon(h).$$

Remarque

Par un changement de variable, si f est dérivable en a alors, il existe une fonction ε vérifiant $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ tel que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x).$$

Exemples

1. Calculons le D.L d'ordre 1 de la fonction f définie par, $f(x) = \cos(x)$ au point $\frac{\pi}{2}$. La fonction f est dérivable au point $\frac{\pi}{2}$ donc pour tout x au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, il existe une fonction ε vérifiant $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \varepsilon(x) = 0$.

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \cos(\frac{\pi}{2}) + \cos'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\varepsilon(x) \\ &= -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\varepsilon(x).\end{aligned}$$

2. Le D.L d'ordre 1 de la fonction f au point 0. La fonction f est dérivable au point 0, donc pour tout x au voisinage de 0, il existe une fonction ε vérifiant $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Développement limité d'ordre 1

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \cos(0) + \cos'(0)(x-0) + (x-0)\varepsilon(x)\\ &= 1 + x\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Exemple

La fonction f définie par, $f(x) = \ln(1+x)$ est dérivable en 0. Le développement limité d'ordre 1 de la fonction f en 0 est donné par :

$$\ln(1+x) = \ln(1+0) + \ln'(1+0)(x-0) + (x-0)\varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
c-à-d

$$\ln(1+x) = x + x\varepsilon(x).$$

Développement limité d'ordre n

Définition 3

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Soit x_0 un élément de I ou une extrémité de I (exemple : si $I =]a, b[$ alors x_0 peut être dans $[a, b]$). Soit n un entier naturel.
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, en abrégé $DL_n(x_0)$, s'il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$, tels que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Ou

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right).$$

Dans ce cas le polynôme $P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$ est appelé la **partie régulière** du développement limité et $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ est appelé le terme complémentaire ou le reste, on le note $o((x - x_0)^n)$.

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, comme $1 - x^{n+1} = (1-x)(1+x+\cdots+x^n)$, on a

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x+\cdots+x^n)}{1-x} = 1+x+\cdots+x^n,$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1+x+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}\\ &= 1+x+\cdots+x^n+x^n\frac{x}{1-x}\end{aligned}$$

Ici $\varepsilon(x) = \dfrac{x}{1-x}$. On a $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, alors la fonction $x \to \dfrac{1}{1-x}$ admet un développement limité d'ordre n au point 0.

On ne cherche généralement pas à déterminer la fonction $\varepsilon(x)$.

Théorème 1

Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, alors ce développement limité est unique.

Théorème 2

Si f est défine et continue sur un voisinage de 0, ainsi que ses n premieres dérivées, alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 donné par :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x).$$

Preuve : Il suffit d'appliquer la formule de Mac-Laurin-Young.

Remarque

La formule de Mac-Laurin-Young exige l'existence de $f^{(n)}(0)$, alors que le développement limité peut exister sans que f soit dérivable en 0. En effet, considérons la fonction :

$$f(x) = 2 + x + x^2 + x^3 \ln|x|.$$

On voit bien que f n'est pas définie au point 0, donc elle n'est pas dérivable en ce point. Par contre :

$$f(x) = 2 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x),$$

où $\varepsilon(x) = x \ln|x|$ et $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Donc f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de zéro.

Propriété 1

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0.

- Si f est paire, son développement limité ne contient que des monômes de degrés pairs.
- Si f est impaire, son développement limité ne contient que des monômes de degrés impairs.

Développements limités usuels

En utilisant la formule de Mac-Laurin-Young, on obtient les développements limités des fonctions usuelles au voisinage de 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{(\ln a)^2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(\ln a)^n}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

Opérations sur les développements limités

Soient f et g ayant des développements limités d'ordre n au voisinage de 0

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x)$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + x^n \varepsilon_2(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x)$$

Propriétés

- **Somme :** La somme $f+g$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 donné par :

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\, x + \cdots + (a_n + b_n)\, x^n + x^n \left(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)\right) \\ &= P(x) + Q(x) + x^n \varepsilon(x). \end{aligned}$$

- **Produit :** On a :

$$f(x)g(x) = P(x)Q(x) + x^n \overbrace{\left[P(x)\varepsilon_2(x) + Q(x)\varepsilon_1(x) + x^n \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\right]}^{\varepsilon(x)}.$$

Donc le produit fg possède un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 obtenu en supprimant les monômes du polynôme $P(x)Q(x)$ de degré$> n$.

Exemple

1. Déterminons le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

$$h(x) = \frac{\ln(x+1)}{1-x}.$$

Posons : $f(x) = \ln(x+1)$ et $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$. On a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

$x^3 - \frac{x^3}{2}$

Donc :

$$\frac{\ln(x+1)}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + x^3\varepsilon(x).$$

2. Déterminons le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de

$$f(x) = [\ln(x+1)]^2.$$

On a : $\ln(1+x) = x\left[1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + x^3\varepsilon(x)\right]$. Donc

$$[\ln(x+1)]^2 = x^2\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + x^3\varepsilon(x)\right]^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

Opérations sur les développements limités

Quotient : La partie réguliére du développement limité d'ordre n de f/g s'obtient en divisant suivant les puissances croissantes la partie régulière du développement limité de f par celle de g jusqu'à l'ordre n.

Propriété 2

Soient f et g des fonctions ayant pour développement limité à l'ordre n au point 0

$$f(x) = A(x) + x^n \varepsilon(x) \text{ et } g(x) = B(x) + x^n \varepsilon(x).$$

Si le nombre $g(0) \neq B(0)$ est non nul, le développement limité de $\dfrac{f}{g}$ à l'ordre n au point 0 est

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + x^n \varepsilon(x)$$

où Q est le quotient à l'ordre n de la division de A par B selon les puissances croissantes.

Exemples

1. Déterminons le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

$$h(x) = \frac{\ln(x+1)}{1-x}$$

Utilisons cette fois-ci la division suivant les puissances croissantes.

$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ $+ \quad -x + x^2$	$1 - x$
$\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ $+ \quad -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}$	$x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6}$
$\frac{5x^3}{6}$	

$-\frac{5x^3}{6} + \cancel{\frac{5x^4}{6}}$

$f = Q \times g + R$

$f = (1-x)Q + R$

D'où

$$h(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + x^3\varepsilon(x).$$

$= o(x^3)$

2. Déterminons le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction :

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Au voisinage de 0, les développements limités de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$ à l'ordre 5 s'écrivent :

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + x^5\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^5\varepsilon(x)$$

La division suivant les puissances croissantes nous donne

$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$	$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$
$-x + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{24}x^5$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$
$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5$	
$-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^5$	
$\frac{2}{15}x^5$	

D'où

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x)$$

Propriété (Composée)

Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de $g(0)$, et g admet un développement limité au voisinage de 0, alors la fonction composée $fog(x) = f(g(x))$ admet un DL d'ordre n au voisinage de 0, obtenu en remplaçant le DL de g dans celui de f et en ne gardant que les monômes de degré $\leq n$.

En pratique

Si je veux calculer le DL de $f(g(x))$ en 0, je calcule le DL de f en $g(0)$ et je trouve un DL de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - g(0)) + \cdots + a_n(x - g(0))^n + o((x - g(0))^n).$$

Ensuite je remplace le DL de g dans celui de f et je ne garde que les monômes de de degré $\leq n$ (Dans les calculs le terme $g(0)$ disparaît).

Exemple

Calculer le développement limité, à l'ordre 3 au voisinage de 0, de

$$h(x) = \sqrt{1 + \ln(1+x)}.$$

On a : $h(x) = (f \circ g)(x)$ avec $f(x) = \sqrt{1+x}$, $g(x) = \ln(1+x)$ et $g(0) = 0$.
On sait que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon(x) \text{ où } \alpha = \frac{1}{2}$$

Par suite

$$\begin{aligned} h(x) &= \sqrt{1 + \ln(1+x)} \\ &= 1 + \frac{1}{2}[g(x)] - \frac{1}{8}[g(x)]^2 + \frac{1}{16}[g(x)]^3 + [g(x)]^3\varepsilon(x) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right] - \frac{1}{8}\left[x - \frac{x^2}{2}\right]^2 + \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{17}{48}x^3 + x^3\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Remarque

Si on effectue le changement de variable $u = x - x_0$, dans la définition de D.L au voisinage x_0, c-à-d

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$

ou

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right),$$

on obtient

$$f(x) = f\left(u + x_0\right) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_n u^n + o\left(u^n\right),$$

donc le développement limité de f au voisinage de x_0 se ramène au développement limité de $g(u) = f\left(u + x_0\right)$ au voisinage de 0.

Exemple

Calculer le DL de $e^{\cos(x)}$ à l'ordre 3 en 0.
Comme $\cos(0) = 1$, on calcule le DL$_3$ de $f(X) = e^X$ en 1. On pose $h = X - 1$ et $g(h) = f(h+1) = f(X)$, on obtient

$$g(h) = e^{h+1} = ee^h = e\left[1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + o\left(h^3\right)\right],$$

donc le développement limité de e^X au voisinage de 1 est :

$$f(X) = e^X = e\left[1 + (X-1) + \frac{1}{2}(X-1)^2 + \frac{1}{6}(X-1)^3 + o\left((X-1)^3\right)\right]. \qquad (2)$$

Ensuite on remplace le DL en 0 à l'ordre 3 de $\cos(x)$, $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$, dans X de l'équation (2), en ne gardant que les monômes de degré ≤ 3. On a

$$e^{\cos(x)} = e\left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} - 1\right)^2}{2} + \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} - 1\right)^3}{6} + o\left(\left(1 - \frac{x^2}{2} - 1\right)^3\right)\right],$$

alors

$$e^{\cos(x)} = e - \frac{e}{2}x^2 + o\left(x^3\right)$$

Développement limité en $x_0 \neq 0$

Exemple

On cherche le développement limité d'ordre 3 au voisinage de $\frac{\pi}{3}$ de la fonction $f : x \to \sin(x)$.
On pose $y = x - \frac{\pi}{3}$ et on considère la fonction g définie par

$$g(y) = f\left(y + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(y + \frac{\pi}{3}\right).$$

Le développement limité d'ordre 3 de la fonction g au voisinage de 0, en utilisant la formule de Mac-Laurin-Young, est

$$\begin{aligned} g(y) = \sin\left(y + \frac{\pi}{3}\right) &= \sin(y)\cos(\frac{\pi}{3}) + \cos(y)\sin(\frac{\pi}{3}) \\ &= \frac{1}{2}\sin(y) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(y) \\ &= \frac{1}{2}\left(y - \frac{y^3}{6} + o(y^3)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{y^2}{2} + o(y^3)\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{4}y^2 - \frac{1}{12}y^3 + o(y^3) \end{aligned}$$

Développement limité en $x_0 \neq 0$

d'où le développement limité d'ordre 3 de la fonction $\sin$ au voisinage de $\frac{\pi}{3}$ est

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right)$$

Développement limité en $+\infty$

Si f est définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ (ou bien de la forme $]-\infty, a]$), on se ramène au voisinage de 0 en posant $u = \dfrac{1}{x}$. Ainsi, on dira que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de l'infini si la fonction $g(u) = f\left(\dfrac{1}{u}\right)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. Dans ce cas le développement limité d'ordre n au voisinage de ∞ est donné par

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right),$$

$\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$ tendant vers 0 quand x tend vers l'infinie.

Développement limité en $+\infty$

Exemples

1. Calculer le développement limité d'ordre 3 au voisinage de ∞ de

$$f(x) = \frac{x}{x-1}.$$

On pose $u = \dfrac{1}{x}$ et $g(u) = f\left(\dfrac{1}{u}\right)$, on se ramène alors au calcul du développement limité de $g(u)$ au voisinage de 0 . On a

$$g(u) = \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^3\varepsilon(u).$$

Par suite donc le développement limité de $f(x)$ au voisinage de ∞ est

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. On calcule le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $f :\to x\exp\left(\dfrac{2x+1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.
On pose $u = \dfrac{1}{x}$. On a, $\exp\left(\dfrac{2x+1}{x^2}\right) = e^{2u+u^2}$. Et on a

$$e^{2u+u^2} = 1 + (2u+u^2) + \frac{(2u+u^2)^2}{2!} = 1 + 2u + u^2 + 2u^2 + 2u^3 + \frac{u^4}{2} + o(u^4).$$

Alors le développement limité à l'ordre 2 de e^{2u+u^2} au voisinage de 0 est :

$$e^{2u+u^2} = 1 + 2u + 3u^2 + o(u^2).$$

Par la suite,

$$\exp\left(\frac{2x+1}{x^2}\right) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Et alors,

$$f(x) = 2 + x + \frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (2+x) = 0$, alors la droite d'équation $y = x+2$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

Calcule des limites

Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$, alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = P_n(0)$.

Exemples

1. On calcule $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan(x)$. On pose le changement de variable $X = x - \frac{\pi}{2}$, on a alors

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan(x) = \lim_{X \to 0} X \tan\left(X + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{X \to 0} \frac{X}{\tan(X)}$$

Le développement limitée d'ordre 3 de $\tan(X)$ en 0 est :
$\tan(X) = X + \frac{X^3}{3} + o\left(X^3\right)$, alors

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan(x) = \lim_{X \to 0} \frac{X}{\tan(X)} = \lim_{X \to 0} \frac{X}{X + \frac{X^3}{3} + o\left(X^3\right)}$$

$$= \lim_{X \to 0} \frac{1}{1 + \frac{X^2}{3} + o\left(X^2\right)} = 1$$

2. Calculons la limite, quand x tend vers 0 , de $f(x) = \dfrac{\sin x - x}{x^2\left(e^x - 1\right)}$.

   On a $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \quad e^x = 1 + x + x\varepsilon(x)$.

   Donc $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{-x^3}{6x^3}$, par suite $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{6}$.

3. Calculons la limite, quand x tend vers 0, de $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$. On a

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{x^2 - \sin^2 x}{(x\sin x)^2} &\underset{0}{\sim} \frac{x^2 - \left[x - \frac{x^3}{6}\right]^2}{(x\sin x)^2} \\
&\underset{0}{\sim} \frac{x^2 - \left[x^2 - \frac{x^4}{3}\right]}{(x\sin x)^2} \\
&\underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^4}{3}}{x^4} = \frac{1}{3},
\end{aligned}
$$

   donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{3}$

4. Calculons, si elle existe, la limite quand x tend vers $+\infty$ de

$$x\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{6}}-x^{\frac{1}{3}}}{(1+x)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}.$$

En utilisant la formule $(1+u)^{\alpha}=1+\alpha u+u\varepsilon(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0}\varepsilon(u)=0$, on a :

$$\begin{aligned}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{6}}-x^{\frac{1}{3}} &= x^{\frac{1}{3}}\left(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{6}}-1\right)=x^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon_1\left(\frac{1}{x^2}\right)-1\right)\\ &= x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon_1\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}} &= x^{\frac{1}{3}}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right)=x^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{3x}+\frac{1}{x}\varepsilon_2\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)\\ &= x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3x}+\frac{1}{x}\varepsilon_2\left(\frac{1}{x}\right)\right),\end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon_1\left(\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon_2\left(\frac{1}{x}\right)=0.$

On en déduit :

$$x\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{6}}-x^{\frac{1}{3}}}{(1+x)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}=x\frac{x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon_1\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3x}+\frac{1}{x}\varepsilon_2\left(\frac{1}{x}\right)\right)}=\frac{\frac{1}{6}+\varepsilon_1\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{3}+\varepsilon_2\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Ce qui montre que la limite existe et vaut $\dfrac{1}{2}$.