الكلية متعددة التخصصات الناظور

ⵜⴰⵖⵉⵡⴰⵏⵜ ⵜⴰⴳⵜⵉⵣⵍⵉⵜ ⵏ ⵏⵏⴰⴹⵓⵕ

Faculté Pluridisciplinaire de Nador

Analyse I

Chapitre 5 : Fonctions Monotones & Fonctions Convexes

Toufik Chaayra

Département : Mathématiques
Filière : SMPC - S1
Année universitaire : 2022/2023
t.chaayra@gmail.com

1 Décembre, 2022

Plan

1. Fonctions monotones
   - 5.1 Rappel : Logarithme et exponentielle
   - 5.2 Fonctions circulaires réciproques
     - 5.2.1 Fonction Arc cosinus
     - 5.2.2 Fonction Arc sinus
     - 5.2.3 Fonction Arc tangente
     - 5.2.4 Fonction Arc cotangente
   - 5.3 Fonctions hyperboliques-Fonctions hyperboliques réciproques
     - 5.3.1 Fonctions hyperboliques
     - 5.3.2 Fonctions hyperboliques réciproques
2. Fonctions convexes

Logarithme	**Exponentielle**
$\ln :]0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$	$\exp : \mathbb{R} \mapsto]0,+\infty[$
$\ln$ est une fonction continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.	$\exp$ est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En plus, $\exp$ est la bijection réciproque de $\ln$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0,\ \lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$
$\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$	$e^{a+b} = e^a.e^b,\ e^{rx} = (e^x)^r$
$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$	$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
$\forall r \in \mathbb{Q};\ \ln(a^r) = r\ln(a)$	$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)},\ \ln(e) = 1$	$e \approx 2,718..$
$\ln'(x) = \frac{1}{x},\ \ln(1) = 0$	$\forall x \in \mathbb{R};\ (e^x)' = e^x,\ e^0 = 1$
$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to -\infty} xe^x = 0\ \ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty,$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Rappel

Rappel

- L'application $f : \ E \longrightarrow F$ est dite bijective si $(\forall y \in F)\,(\exists! x \in E) : \ f(x) = y$.
- Si f est bijective alors $\big(f(x) = y \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)\big)$, où f^{-1} est l'application réciproque de f.

Fonction Arc cosinus

Soit f la restriction de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0, \pi]$

$$\begin{aligned} f : [0, \pi] &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto f(x) = \cos x \end{aligned}$$

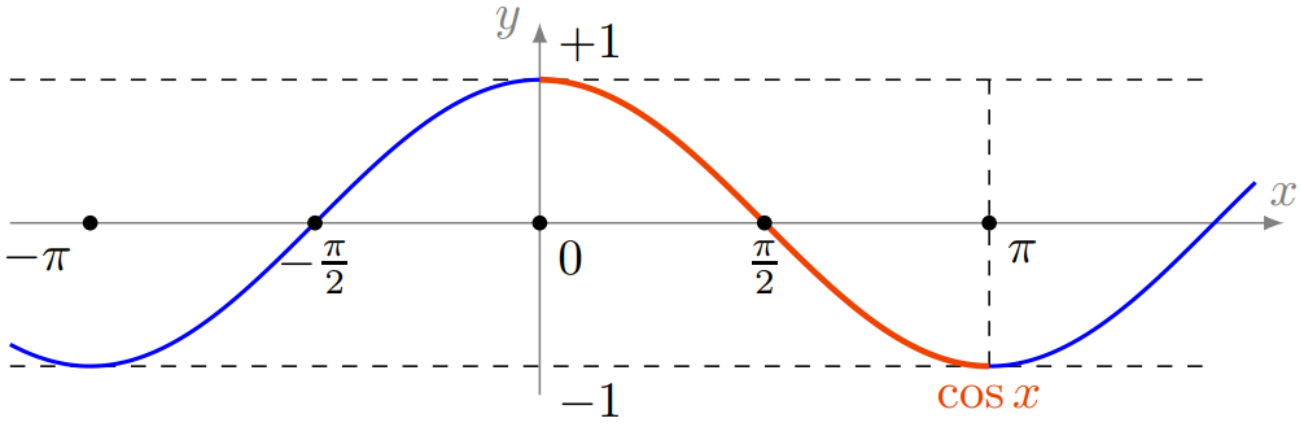
La fonction f (i.e., cosinus) est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$ donc bijective.

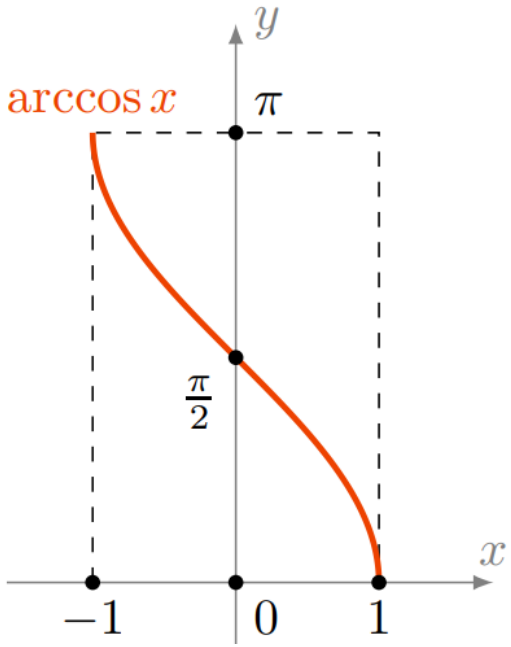
Définition 1

La bijection réciproque de la fonction $\begin{aligned} f : [0, \pi] &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto \cos x \end{aligned}$ est la fonction réciproque appelée Arc cosinus, notée $\arccos$, définie par :

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\longrightarrow [0, \pi] \\ x &\longmapsto \arccos x \end{aligned}$$

$$y = \arccos x \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$





Proposition 1

1. $\forall x \in [-1, 1];\ 0 \leq \arccos x \leq \pi$.
2. La fonction $\arccos$ est continue, strictement décroissante, dérivable sur $]-1, 1[$ de dérivée
$$(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
3. La fonction $\arccos$ n'est ni paire ni impaire et vérifie
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

Fonction Arc sinus

Soit f la restriction de la fonction sinus sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{array}{rcl} f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & f(x) = \sin x \end{array}$$

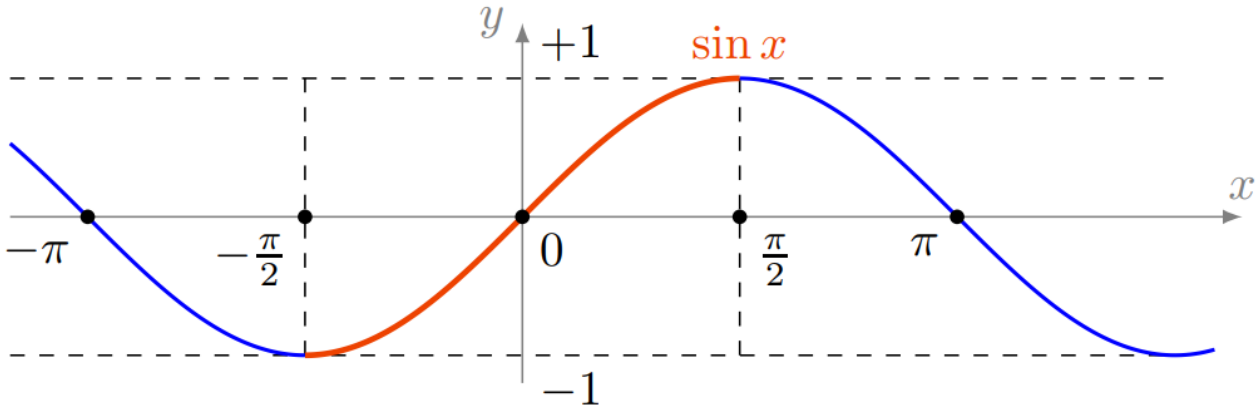
. La fonction f (i.e., sinus) est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc bijective.

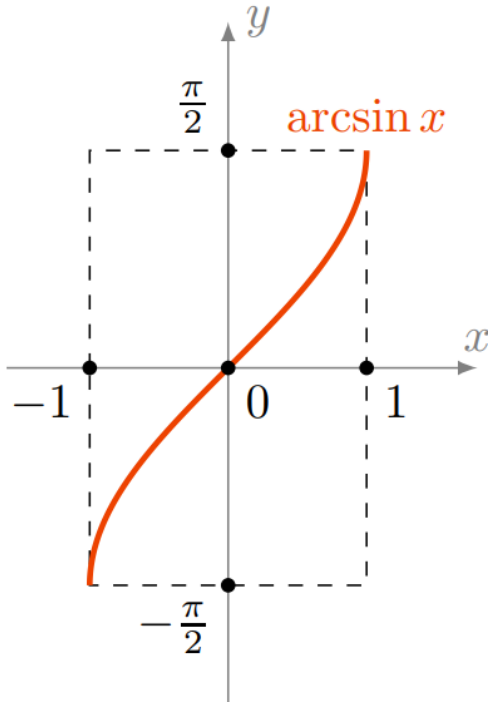
Définition 2

La bijection réciproque de la fonction $\begin{array}{rcl} f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$ est la fonction réciproque appelée Arc sinus, notée $\arcsin$, définie par :

$$\begin{array}{rcl} \arcsin : [-1, 1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \longmapsto & \arcsin x \end{array}$$

$$y = \arcsin x \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$





Proposition 2

1. $\forall x \in [-1, 1];\ -\dfrac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \dfrac{\pi}{2}$.
2. La fonction $\arcsin$ est continue, strictement croissante, impaire dérivable sur $]-1, 1[$ de dérivée
$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exemple : *Voir exercice 7 de TD3.*

Fonction Arc tangente

Soit f la restriction de la fonction tangente sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $\begin{array}{rcl} f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \tan x \end{array}$. La fonction f (i.e., tangente) est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc bijective.

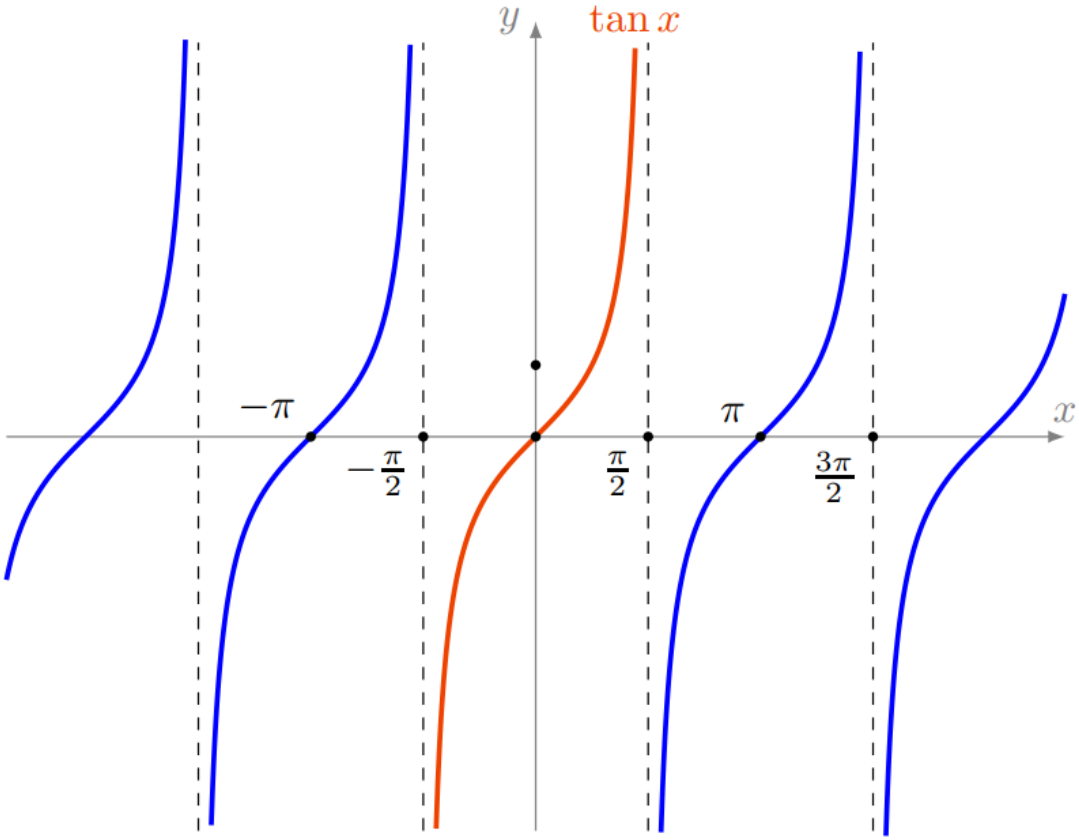
Définition 3

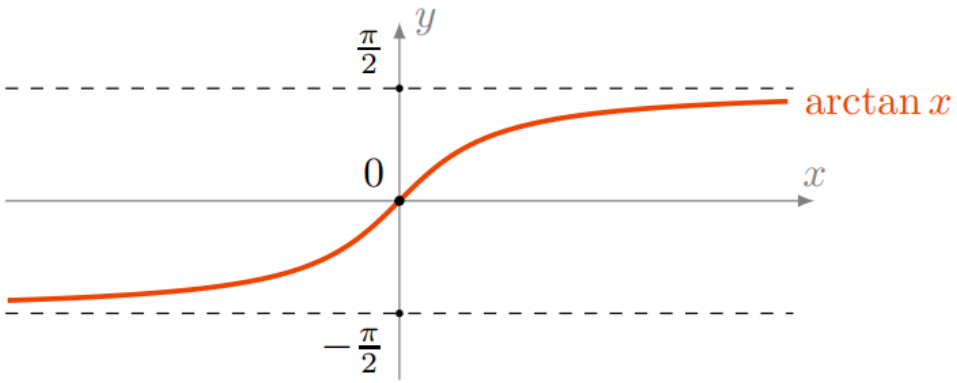
La bijection réciproque de la fonction $\begin{array}{rcl} f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x \end{array}$ est la fonction réciproque appelée Arc tangente, notée $\arctan$, définie par :

$$\begin{array}{rcl} \arctan : \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x & \longmapsto & \arctan x \end{array}$$

$$y = \arctan x \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Fonction Arc tangente





Fonction Arc tangente

Proposition 3

1. $\forall x \in \mathbb{R};\ -\dfrac{\pi}{2} < \arctan x < \dfrac{\pi}{2}$.
2. La fonction $\arctan$ est continue, strictement croissante, impaire dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée
$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Fonction Arc cotangente

Soit f la restriction de la fonction cotangente sur l'intervalle $]0, \pi[$

$$\begin{aligned} f :]0, \pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \operatorname{cotan} x \end{aligned}$$

La fonction f (i.e., cotangente) est continue et strictement décroissante sur $]0, \pi[$ donc bijective.

Définition 4

La bijection réciproque de la fonction

$$\begin{aligned} f :]0, \pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{cotan} x \end{aligned}$$

est la fonction réciproque appelée Arc cotangente, notée $\operatorname{arccotan}$, définie par :

$$\begin{aligned} \operatorname{arccotan} : \mathbb{R} &\longrightarrow]0, \pi[\\ x &\longmapsto \operatorname{arccotan} x \end{aligned}$$

$$y = \operatorname{arccotan} x \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \operatorname{cotan} y \\ 0 < y < \pi \end{cases}$$

Fonction Arc cotangente

Proposition 4

1. $\forall x \in \mathbb{R};\ 0 < \operatorname{arccotan} x < \pi$.
2. La fonction $\operatorname{arccotan}$ est continue, strictement décroissante, dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée
$$(\operatorname{arccotan})'(x) = \frac{-1}{1+x^2}.$$
3. La fonction $\operatorname{arccotan}$ n'est ni paire ni impaire.

Fonctions hyperboliques

Définition 5

- On appelle cosinus hyperbolique de x la quantité noté $\cosh x$ tel que :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- On définit le sinus hyperbolique de x, noté $\sinh x$ par :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

- On définit la tangente hyperbolique de x, notée $\tanh x$ par :

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Fonctions hyperboliques

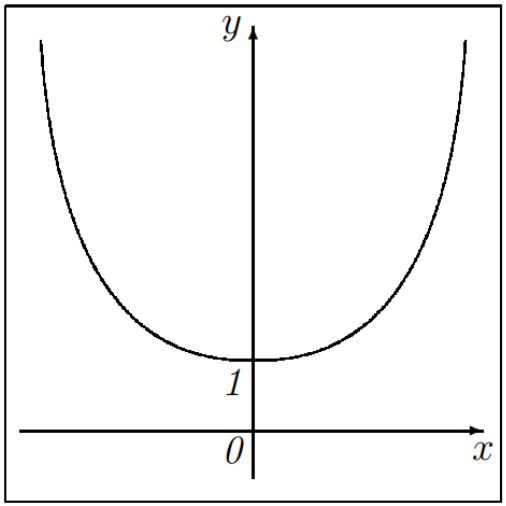
Propriété 1

- $\left.\begin{array}{l}\cosh x + \sinh x = e^{x} \\ \cosh x - \sinh x = e^{-x}\end{array}\right\} \Rightarrow \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$
- $\mathcal{D}_{\sinh} = \mathcal{D}_{\cosh} = \mathbb{R}$, $\sinh(0) = 0$, $\cosh(0) = 1$, $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\sinh x)' = \cosh x$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sinh x}{x} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \cosh x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cosh x}{x} = +\infty$.
- $\mathcal{D}_{\tanh} = \mathbb{R}$, $\tanh(0) = 0$, $(\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh x = -1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \tanh x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tanh x}{x} = 1$.

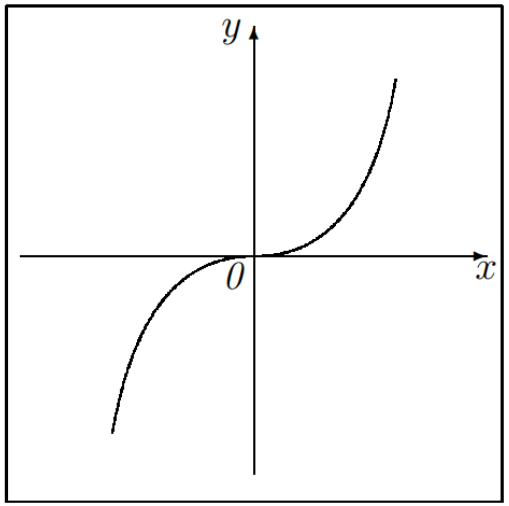
Fonctions hyperboliques

Proposition 5

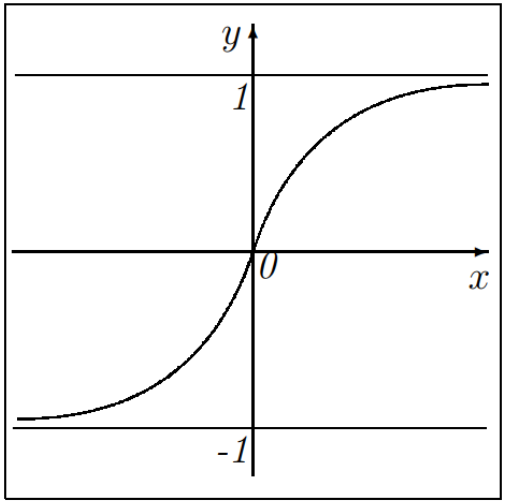
- La fonction $\cosh$ est une fonction définie, paire, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- La fonction $\sinh$ est une fonction définie, impaire, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\tanh$ est une fonction définie, impaire, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



$y = chx$



$y = shx$



$y = thx$

Argument cosinus hyperbolique (argcosh)

Définition 6

La bijection réciproque de la fonction

$$\begin{aligned} \cosh : [0, +\infty[&\longrightarrow [1, +\infty[\\ x &\longmapsto \cosh x \end{aligned}$$

est la fonction réciproque appelée Argument cosinus hyperbolique, notée argcosh, définie par :

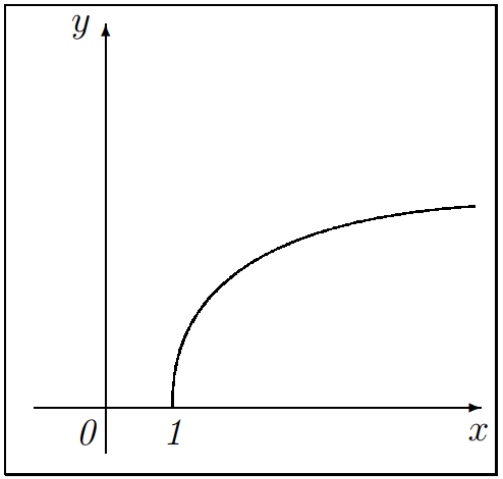
$$\begin{aligned} \text{argcosh} : [1, +\infty[&\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longmapsto \text{argcosh } x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = \text{argcosh } x \\ x \geq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \cosh y \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Argument cosinus hyperbolique (argcosh)

Proposition 6

1. $\forall x \in [1, +\infty[;\ \operatorname{argcosh}(x) \geq 0.$
2. La fonction argcosh est continue, strictement croissante, dérivable sur $]1, +\infty[$ de dérivée
$$(\operatorname{argcosh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$
3. $$\operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \text{ si } x \geq 1.$$



$y = argchx$

Argument cosinus hyperbolique ($\operatorname{argcosh}$)

Pour $x \geq 1$, posons $y = \operatorname{argcosh}(x)$, donc

$$x = \cosh y \text{ et } \sinh y = \sqrt{x^2 - 1} \quad (\text{car } \sinh y \geq 0 \text{ si } y \geq 0)\,.$$

De plus on a : $e^y = \cosh y + \sinh y = x + \sqrt{x^2 - 1}$, donc

$$\operatorname{argcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad \text{si} \quad x \geq 1$$

Argument sinus hyperbolique (argsinh)

Définition 7

La bijection réciproque de la fonction

$$\begin{aligned} \sinh : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sinh x \end{aligned}$$

est la fonction réciproque appelée Argument sinus hyperbolique, notée $\operatorname{argsinh}$, définie par :

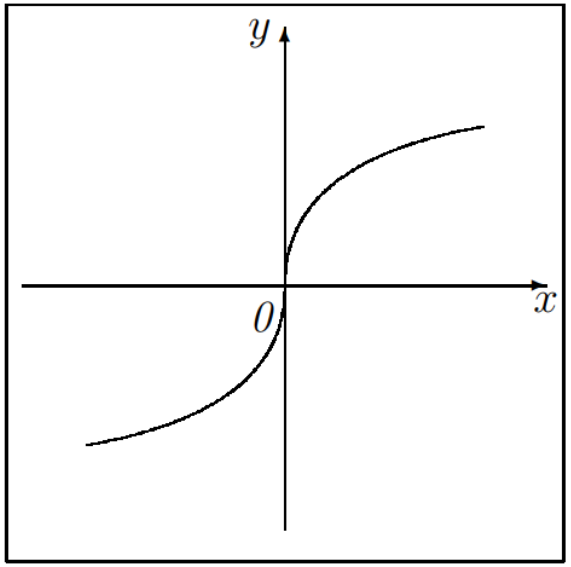
$$\begin{aligned} \operatorname{argsinh} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{argsinh}\, x \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \operatorname{argsinh}\, x \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \sinh y \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Argument sinus hyperbolique (argsinh)

Proposition 7

1. La fonction argsinh est continue, strictement croissante, dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée
$$(\text{argsinh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$
2. $$\text{argsinh } x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \text{ si } x \in \mathbb{R}.$$



$y = argshx$

Argument sinus hyperbolique (argsinh)

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $y = \operatorname{argsinh}(x)$, on a donc

$$x = \sinh y \text{ et } \cosh y = \sqrt{x^2+1} \quad (\text{car } \cosh y > 0)\,.$$

De plus on a : $e^y = \sinh y + \cosh y = x + \sqrt{x^2+1}$, donc

$$\operatorname{argsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{R}$$

Argument tangente hyperbolique (argtanh)

Définition 8

La bijection réciproque de la fonction

$$\begin{aligned} \tanh : \mathbb{R} &\longrightarrow]-1,1[\\ x &\longmapsto \tanh x \end{aligned}$$

est la fonction réciproque appelée Argument tangente hyperbolique, notée argtanh, définie par :

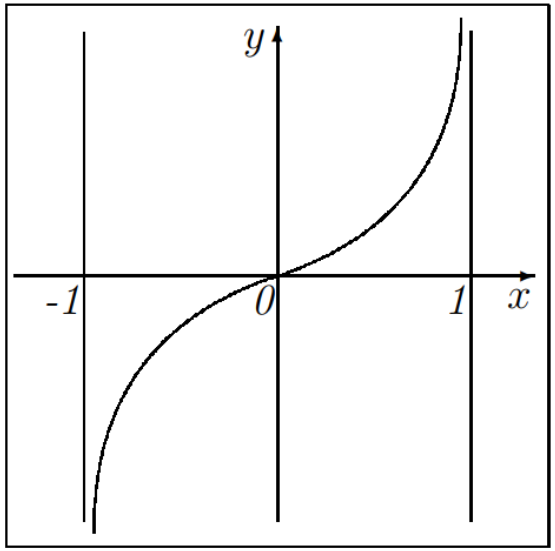
$$\begin{aligned} \text{argtanh} :]-1,1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \text{argtanh } x \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \text{argtanh } x \\ x \in]-1,1[\end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \tanh y \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Argument tangente hyperbolique (argtanh)

Proposition 8

1. La fonction argtanh est continue, strictement croissante, dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée
$$(\text{argtanh})'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$
2. $$\text{argtanh } x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ si } |x| < 1.$$



$y = argthx$

Argument tangente hyperbolique (argtanh)

Soit $x \in]-1,1[$, on a :

$$y = \operatorname{argtanh}(x) \Longleftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \Longleftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

On en déduit que

$$\operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{si} \quad |x| < 1.$$

Argument tangente hyperbolique (argtanh)

Propriété 2

Les fonctions réciproques hyperboliques vérifient les propriétés suivantes

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{argcosh}(x) = +\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{argsinh}(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{argsinh}(x) = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to1^-} \operatorname{argtanh}(x) = +\infty.$

Fonctions convexes

Définition 9

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite Convexe si pour tous $x_0, x_1 \in I$ et $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1) \leq \lambda f(x_0) + (1-\lambda) f(x_1).$$

Concave si pour tous $x_0, x_1 \in I$ et $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1) \geq \lambda f(x_0) + (1-\lambda) f(x_1).$$

Si les inégalités $\leq$ (resp . $\geq$) sont strictes on dit que fest strictement convexe (resp. strictement concave).

Interprétation géométrique

Posons :

$$x(\lambda) = \lambda x_0 + (1-\lambda)x_1 \text{ et } y(\lambda) = \lambda f(x_0) + (1-\lambda) f(x_1).$$

Quand λ décrit l'intervalle $[0,1]$, $x(\lambda)$ et $y(\lambda)$ décrivent respectivement les intervalles $[x_0, x_1]$ et $[f(x_0), f(x_1)]$. Soient $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M_1(x_1, f(x_1))$ deux points de C_f. On dit que f est convexe si l'arc M_0M_1 du graphe reste au-dessous de la corde M_0M_1 pour tous x_0 et x_1 dans I, voir Figure 1.

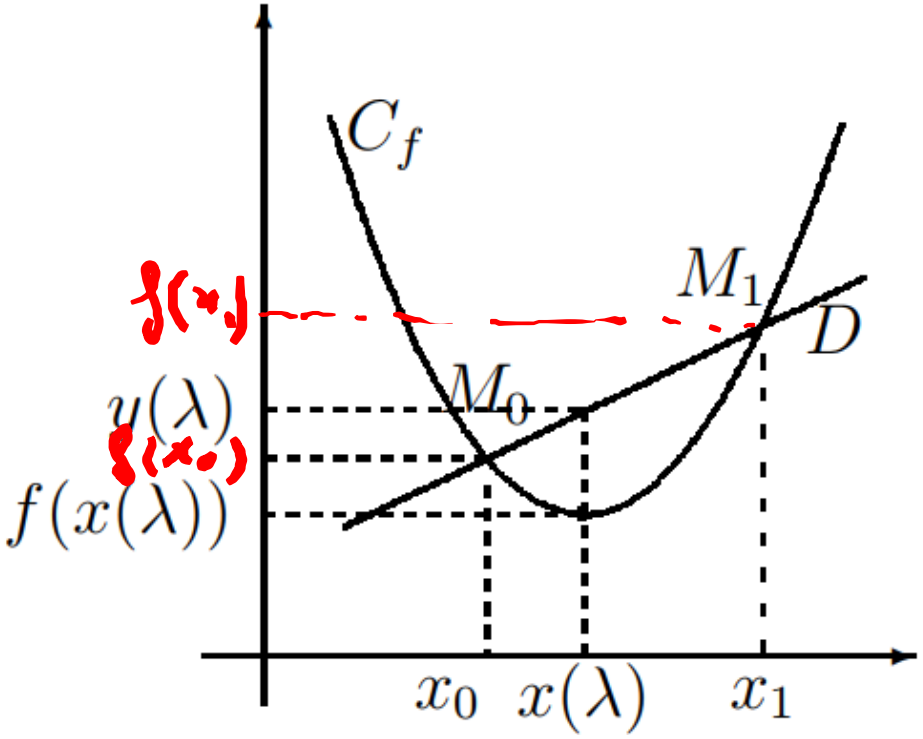


Figure 1 – Fonction convexe

Interprétation géométrique

On dit que f est concave si l'arc M_0M_1 du graphe reste au-dessus de la corde M_0M_1 pour tous x_0 et x_1 dans I, voir Figure 2.

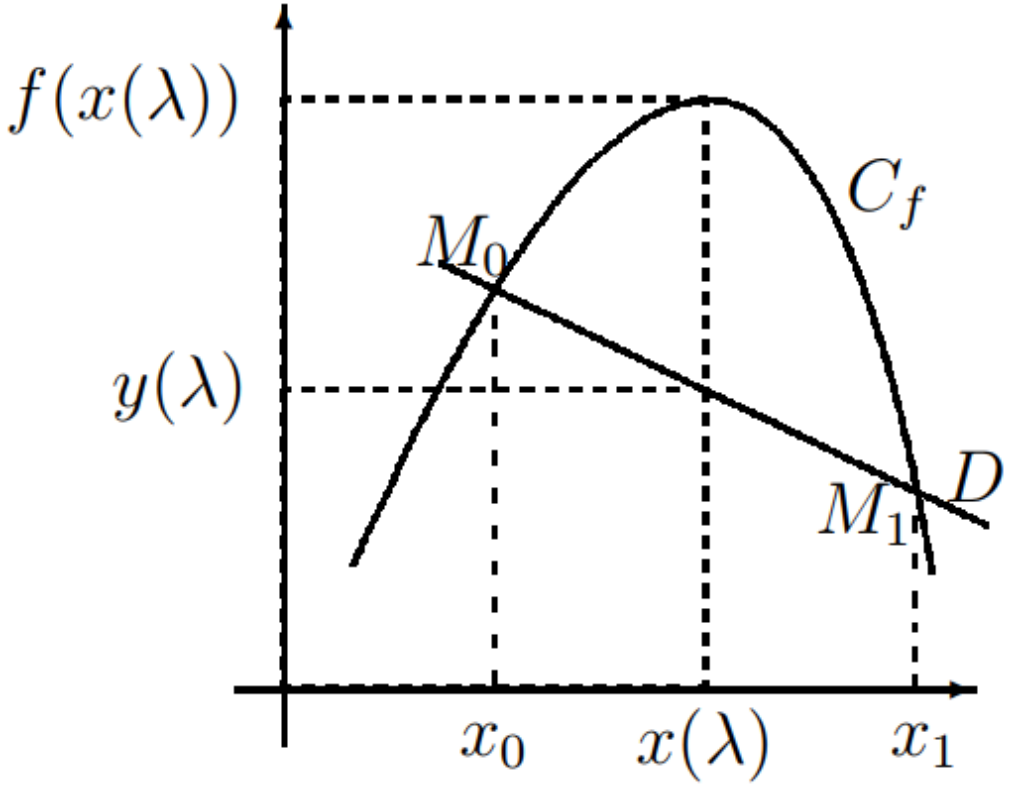


Figure 2 – Fonction concave

Fonctions convexes

Propriété 3

Si f est une fonction continue deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors

- f est concave sur I si et seulement si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.
- f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

Exemple

Voir exercice 6 de TD3.