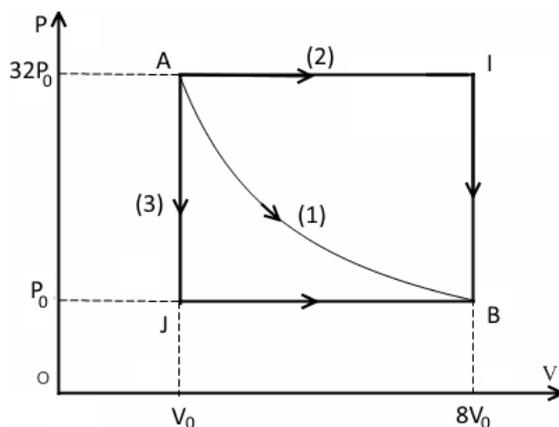


Exercice 1

Une mole d'un gaz parfait monoatomique peut passer réversiblement de l'état A ($32P_0, V_0, T_A$) à l'état B ($P_0, 8V_0, T_B$) par trois chemin distincts (voir figure ci-bas).

- 1) Déterminer le travail W_1 et la quantité de chaleur Q_1 du chemin 1.
- 2) Déterminer le travail W_2 et la quantité de chaleur Q_2 du chemin 2.
- 3) Déterminer le travail W_3 et la quantité de chaleur Q_3 du chemin 3.
- 4) Comparer W_1, W_2 et W_3 puis Q_1, Q_2 et Q_3 . Conclure.
- 5) Comparer $(W+Q)$ pour les trois chemins et conclure.



Chemin 1 : A→B transformation adiabatique.

Chemin 2 : AI (isobare) + IB (isochore)

Chemin 3 : AJ (isochore) + JB (isobare)

Exercice 2

1) Calculer le travail fourni par la détente isotherme d'une mole d'un gaz parfait initialement à pression $P_1=10\text{atm}$ jusqu'à une pression finale $P_2=3\text{atm}$ en fonction du produit (RT) . On fera le calcul dans les deux cas suivants :

- a) Détente réversible.
- b) Détente irréversible.

2) Comparer les deux cas et conclure.

Exercice 4

La quantité de chaleur élémentaire échangée par un gaz avec le milieu extérieur

est donnée en fonction des variables indépendantes (la pression P et la température T) par l'équation :

$$\delta Q = -\frac{nRT}{P} dP + C_p(T) dT$$

Où $C_p(T)$ représente la capacité calorifique du gaz en fonction de la température.

1) Montrer que la chaleur échangée n'est pas une fonction d'état? Aux faibles pressions, la capacité calorifique à pression constante d'un gaz diatomique (oxyde de carbone) est fonction de la température thermodynamique T :

$$C_p(T) = m \left(A_0 - \frac{A_1}{T} + \frac{A_2}{T^2} \right)$$

Avec $A_0=1,41$; $A_1=492$, $A_2=16 \cdot 10^4$; C_p s'exprime en JK^{-1} .

2) Calculer la quantité de chaleur reçue par une mole d'oxyde de carbone ($m=28g$) lorsque ce gaz est chauffé de $27^\circ C$ à $127^\circ C$ à pression constante.

3) En déduire la capacité calorifique moyenne relative à une mole de gaz.

Exercice 5

On comprime de façon isotherme à la température $T_0=273K$, un gaz parfait ($\gamma=1,4$) de la pression $P_0=1atm$ à la pression $P_1=20atm$. Le gaz est ensuite détendu de façon adiabatique et réversible jusqu'à la pression P_0 .

1) Calculer la température T_1 après cette double opération.

On recommence les deux opérations précédentes à la température T_1 .

2) a) Calculer la nouvelle température finale T_2 du gaz.

b) Trouver la formule générale de la température T_n atteinte par le gaz à la fin de n doubles opérations successives décrites précédemment.

A.N. $n=4$ et $n=5$

3) Déterminer la variation d'énergie interne d'une mole du gaz, au cours de la n ème double transformation en fonction de γ , T_0 , P_0 , P_1 et n ainsi que le travail et la chaleur échangés avec le milieu extérieur.

A.N. $n=5$

On donne : $R \approx 8,314 J mol^{-1} K^{-1}$

Module Thermodynamique I

Filière SMP&C-S1 - TD - Série n° 2 - Partie 3

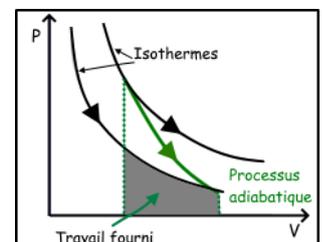
Corrections

Des petits Rappels :

- Pour un **système thermodynamique fermé** (qui n'échange pas de matière avec le milieu extérieur) les échanges avec le milieu extérieur ne peuvent se faire que sous forme de travail W et de quantité de chaleur Q de telle manière que la **variation de l'énergie interne** $\Delta U = W + Q$ sur une transformation ; **c'est l'énoncé du premier principe ou principe des équivalences**, pour une **transformation infinitésimale** le premier principe s'écrit : $dU = \delta W + \delta Q$, δW et δQ représentent le **travail** et la **quantité de chaleur élémentaires** échangés par le système. U est **fonction d'état** sa variation ne dépend que de l'état initial et de l'état final pas du type de transformation (ou chemin suivi), cependant Q et W **dépendent de la transformation subit par le système** et elles ne sont pas des fonction d'état. U **caractérise le système** mais ne peut pas être mesurée mais sa variation oui grâce aux mesure du W et de Q . U **est extensible**, c.-à-d., elle augmente avec l'augmentation du volume et vice versa (volume variable d'état extensive).
- Une transformation irréversible ne passe pas par des états d'équilibre. Cependant, une transformation réversible passe par une multitude d'états d'équilibres infiniment voisins. Une telle transformation est impossible dans la réalité c'est pourquoi on dit plutôt qu'elle est quasi statique.
- Lors d'une **transformation élémentaire** du système, le travail échangé s'écrit $\delta W = -P_{ex} dV$, P_{ex} pression exercée par le milieu extérieur sur le système, quand la **transformation est réversible** $P_{ex} = P$, P est la pression du système. La quantité de chaleur échangée s'écrit $\delta Q = C_p dT + h dP = C_v dT + l dV = \lambda dP + \mu dV$ (C_p , C_v , h , l , λ et μ sont les **coefficients thermométriques**).
- une **transformation** est dite **adiabatique** si elle s'effectue sans échange de chaleur $Q=0$ entre le système thermodynamique et le milieu extérieur (sans perte ou gain de chaleur). Cela n'implique pas pour autant que la température du système reste constante, contrairement au cas **isotherme**. En effet, la **transformation adiabatique n'est pas sans échange d'énergie**. La variation d'énergie mécanique W est le seul échange avec l'extérieur du système qui modifie alors les paramètres d'états (T, V, P) et en occurrence l'énergie interne du système U .
- Quand le système thermodynamique est un **gaz parfait** ($PV = nRT$, n : le nombre de mole et $R \approx 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$: la constante des gaz parfait) :

Si la transformation est adiabatique $\delta Q = 0$ aboutit si elle est en plus réversible à la relation $PV^\gamma = C^{te}$ (loi de Laplace) où le paramètre γ (**indice ou coefficient adiabatique**) vaut : $\gamma = C_p / C_v$; $\gamma = 5/3 \approx 1,67$ pour un gaz monoatomique (He, Ar, ...) et $\gamma = 7/5 = 1,4$ pour un gaz diatomique (H_2, O_2, N_2, CO, \dots) dans les **conditions normales de température et de pression** (CNTP). Pour comparaison, on prend le cas où le **gaz parfait subit une transformation isotherme** $PV = C^{te}$. Pour le gaz parfait on a

$$nR = C_p - C_v \text{ (relation de Mayer), } C_v = \frac{nR}{\gamma - 1} \text{ et } C_p = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} .$$



Transformation adiabatique (en vert) sur un **diagramme de Clapeyron** : le passage d'un isotherme à l'autre, transforme l'énergie interne du gaz en travail (aire figurée) et non en chaleur.

Exercice 1

1) Le travail W_1 ? et la chaleur Q_1 ? Sur le chemin 1. Sur le chemin 1 la transformation est adiabatique (ou calorifugée ou adiatherme) réversible.

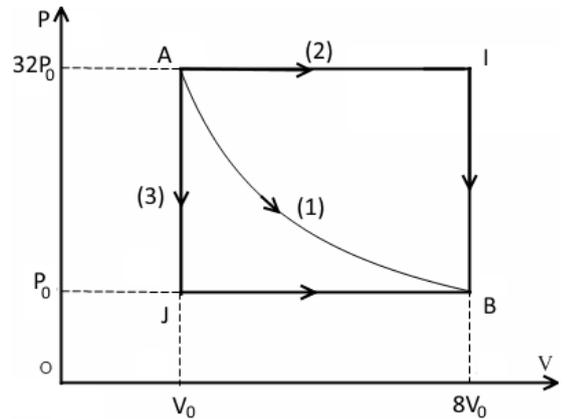
sur le chemin 1 la transformation est adiabatique réversible pour le gaz parfait s'écrit :

$$PV^\gamma = C^{te}$$

$$\Rightarrow d(PV^\gamma) = 0$$

$$\Rightarrow V^\gamma dP + \gamma PV^{\gamma-1} dV = 0$$

$$\frac{dP}{dV} = -\gamma \frac{PV^{\gamma-1}}{V^\gamma} = -\gamma \frac{P}{V}$$



d'où la pente dans le cas dans une transformation adiabatique en valeur absolue :

$$\left| \frac{dP}{dV} \right|_{adiabatique} = \gamma \frac{P}{V}$$

a) Le travail échangé au cours de cette transformation adiabatique réversible :

$$\delta W_1 = -PdV = -C^{te} \frac{dV}{V^\gamma} \Rightarrow -W_1 = -C^{te} \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V^\gamma}$$

$$W_1 = C^{te} \times \frac{V_B^{1-\gamma} - V_A^{1-\gamma}}{\gamma - 1}$$

En prenant la relation de l'adiabatique entre les états A et B, pour un gaz parfait monoatomique nous avons :

$$P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma = C^{te} \Rightarrow 32P_0 V_0^{5/3} = P_0 (8V_0)^{5/3} = C^{te} \text{ donc } 8^{5/3} = (2^3)^{5/3} = 2^5 = 32$$

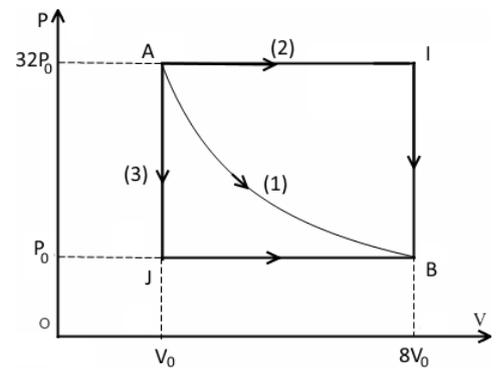
Le travail échangé au cours de la transformation pour passer de l'état A à l'état B devient :

$$W_1 = C^{te} \times \frac{V_B^{1-\gamma} - V_A^{1-\gamma}}{\gamma-1} = \frac{P_B V_B^\gamma V_B^{1-\gamma} - P_A V_A^\gamma V_A^{1-\gamma}}{\gamma-1} = \frac{P_B V_B - P_A V_A}{\gamma-1}$$

Finalemment

$$W_1 = \frac{P_B V_B - P_A V_A}{\gamma-1} = \frac{8P_0 V_0 - 32P_0 V_0}{\gamma-1} = -24 \frac{P_0 V_0}{\gamma-1}$$

$$W_1 = -24 \frac{P_0 V_0}{\gamma-1}$$



Le travail est cédé par le système à l'extérieur au cours de la transformation adiabatique : $W_1 < 0$, le travail est donc moteur (la variation de volume $\Delta V > 0$).

En remplaçant les variables par leurs valeurs :

$\gamma = \frac{5}{3}$ pour une gaz parfait monoatomique :

$$W_1 = -24 \frac{P_0 V_0}{\frac{5}{3}-1} = -24 \times 3 \times \frac{P_0 V_0}{2} = -36 P_0 V_0$$

$$W_1 = -36 P_0 V_0$$

Le travail est $W_1 < 0$ donc c'est un travail moteur. Le système cède du travail au milieu extérieur.

b) Cependant le système n'échange pas de chaleur avec le milieu extérieur au cours de la transformation car la transformation est adiabatique :

$$Q_1 = 0$$

Le système n'échange pas de chaleur avec le milieu extérieur.

2) Le travail W_2 ? et la chaleur Q_2 ? sur le chemin 2. La transformation sur le chemin 2 est réversible.

a) Le travail sur le chemin 2 peut être décomposé en deux parties : le chemin AI et le chemin IB :

$$W_2 = W_A^I + W_I^B$$

sur le segment IB, la transformation est isochore
 $V = C^{te}$, c.-à-d., $dV = 0$.

$$W_I^B = 0 \text{ car } (\Delta V = 0)$$

sur le segment AI, la transformation est isobare
 $P = C^{te}$, c.-à-d., $dP = 0$. Donc $P_A = P_I$.

$$W_A^I = -\int_A^I P_A dV = -P_A \int_A^I dV = -P_A (V_I - V_A)$$

Donc

$$W_A^I = -P_A (V_I - V_A)$$

En remplaçant les variables par leurs valeurs :

$$V_A = V_0$$

$$V_I = 8V_0$$

$$P_A = 32P_0$$

On a :

$$W_A^I = -P_A (V_I - V_A) = -32P_0 (8V_0 - V_0) = -224P_0V_0$$

Donc

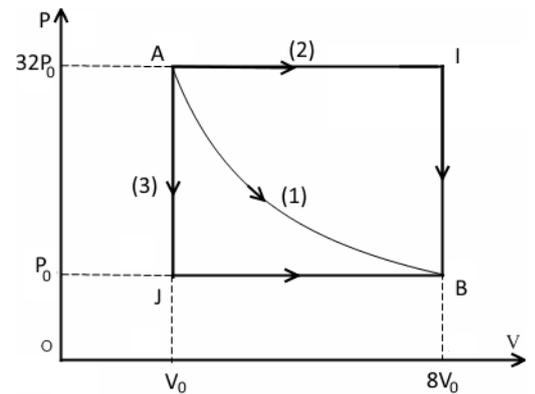
$$W_A^I = -224P_0V_0$$

Finalement nous avons :

$$W_2 = W_A^I + W_I^B = W_A^I = -224P_0V_0$$

Le travail échangé par le système avec l'extérieur au cours de la transformation (AI)+(IB) est :

$$W_2 = -224P_0V_0$$



Le travail est $W_2 < 0$ donc c'est un travail moteur. Le système cède du travail au milieu extérieur.

b) Pour la chaleur Q_2 échangée par le système sur le chemin 2

Le calcul de la quantité de chaleur sur le chemin 2 peut être se faire premièrement sur la portion (AI) et en suite sur la portion (IB) :

$$Q_2 = Q_A^I + Q_I^B$$

Or par définition une variation élémentaire de la chaleur peut s'écrire :

$$\delta Q = C_p dT + h dP = C_v dT + l dV$$

i) sur le segment AI, la transformation est isobare $P=Cste$; $dP=0$.

$$\delta Q = C_p dT + h dP = C_p dT$$

Donc la chaleur élémentaire devient :

$$\delta Q = C_p dT$$

On intègre l'expression par rapport à la température et on a :

$$Q_A^I = C_p \int_A^I dT = C_p (T_I - T_A)$$

On remplace les températures :

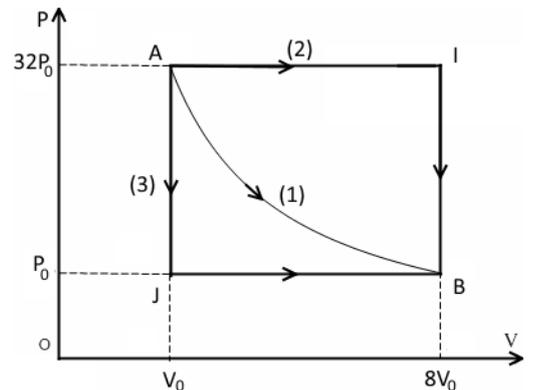
$$T_I = \frac{P_I V_I}{R}$$

$$T_A = \frac{P_A V_A}{R}$$

Et on obtient :

$$Q_A^I = C_p \left(\frac{P_I V_I}{R} - \frac{P_A V_A}{R} \right) = \frac{C_p}{R} (P_I V_I - P_A V_A)$$

Ensuite on remplace les variables par leurs valeurs :



$$P_I = P_A = 32P_0$$

$$V_I = V_B = 8V_0$$

$$Q_A^I = \frac{C_p}{R} (256P_0V_0 - 32P_0V_0)$$

En remplaçant $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ et on obtient :

$$Q_A^I = \frac{\gamma}{\gamma - 1} 224P_0V_0$$

Finalement la chaleur échangée par le système avec l'extérieure au cours de la transformation (AI) est :

$$Q_A^I = 224 \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_0V_0$$

La chaleur est négative $Q_A^I > 0$ donc le système cède la chaleur sur cette portion du chemin 2.

ii) sur le segment IB, la transformation est isochore $V = \text{Cste}$; $dV = 0$.

$$\delta Q = C_v dT + l dV = C_v dT$$

Donc la chaleur élémentaire devient :

$$\delta Q = C_v dT$$

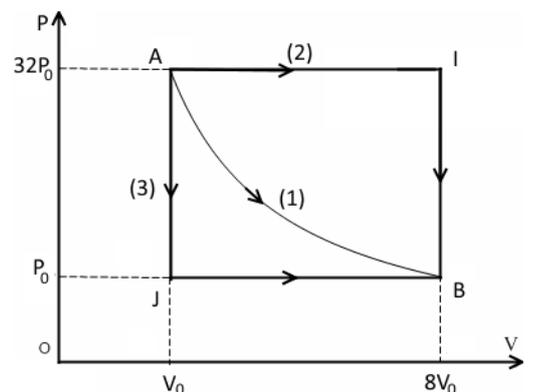
On intègre l'expression par rapport à la température et on a :

$$Q_I^B = C_v \int_I^B dT = C_v (T_B - T_I)$$

On remplace les températures :

$$T_I = \frac{P_I V_I}{R}$$

$$T_B = \frac{P_B V_B}{R}$$



Et on obtient :

$$Q_I^B = C_v \left(\frac{P_B V_B}{R} - \frac{P_I V_I}{R} \right) = \frac{C_v}{R} (P_B V_B - P_I V_I)$$

Ensuite on remplace les variables par leurs valeurs :

$$P_I = P_A = 32P_0$$

$$V_I = V_B = 8V_0$$

$$P_B = P_0$$

On a :

$$Q_I^B = C_v \left(\frac{P_B V_B}{R} - \frac{P_I V_I}{R} \right) = \frac{C_v}{R} (8P_0 V_0 - 256P_0 V_0)$$

En remplace $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$ et on obtient finalement la chaleur échangée par le système avec l'extérieure au cours de la transformation (IB) est :

$$\Rightarrow \boxed{Q_I^B = -\frac{248}{\gamma - 1} P_0 V_0}$$

La chaleur est négative $Q_I^B < 0$ donc le système cède la chaleur sur la portion (IB) du chemin 2.

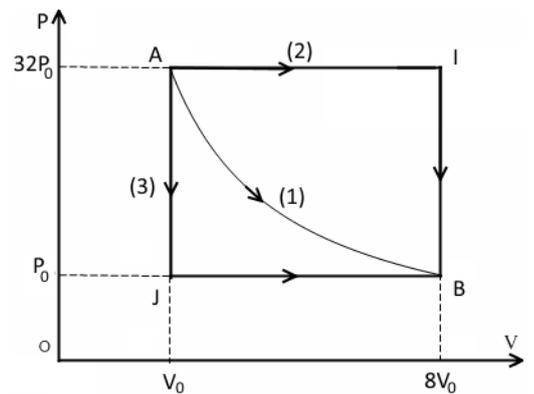
Pour obtenir la chaleur échangée par le système sur le chemin 2, il faut faire la somme des chaleurs échangées sur les portion (AI) et (IB) :

$$Q_2 = Q_A^I + Q_I^B = \frac{224\gamma}{\gamma - 1} P_0 V_0 - \frac{248}{\gamma - 1} P_0 V_0$$

Finalement la chaleur échangée par le système sur le chemin 2 est :

$$Q_2 = 224 \frac{\gamma - \frac{248}{224}}{\gamma - 1} P_0 V_0 = 224 \frac{\gamma - \frac{31}{28}}{\gamma - 1} P_0 V_0 \approx 224 \frac{\gamma - 1,107}{\gamma - 1} P_0 V_0$$

La chaleur $Q_2 > 0$, donc le système reçoit de la chaleur lors de la



transformation sur le chemin 2.

$$Q_2 = \frac{224\gamma - 248}{\gamma - 1} P_0 V_0$$

Donc sur le chemin 2 le système cède du travail mais reçoit de la chaleur.

On remplace $\gamma = \frac{5}{3}$ pour une gaz parfait monoatomique :

$$Q_2 = \frac{224 \times \frac{5}{3} - 248}{\frac{5}{3} - 1} P_0 V_0 = \frac{224 \times 5 - 248 \times 3}{2} P_0 V_0 = \frac{1120 - 744}{2} P_0 V_0 = 188 P_0 V_0$$

donc

$$Q_2 = 188 P_0 V_0$$

Le système reçoit de la chaleur du milieu extérieur.

3) Le travail W_3 ? et la chaleur Q_3 ? sur le chemin 3. La transformation sur le chemin 3 est réversible.

a) Le travail sur le chemin 3 peut être décomposé en deux parties : le chemin AJ et le chemin JB :

$$W_3 = W_A^J + W_J^B$$

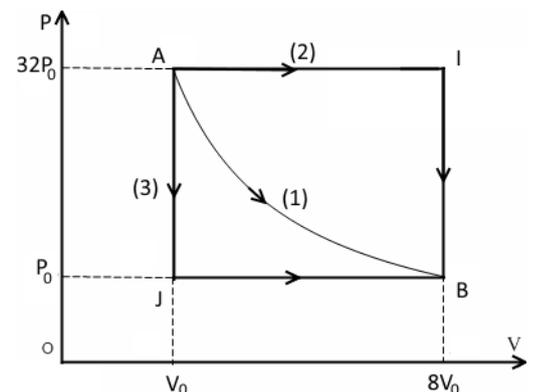
sur le segment AJ, la transformation est isochore $V = C^{te}$; $dV = 0$.

$$W_A^J = 0 \quad (V = C^{te})$$

sur le segment JB, la transformation est isobare $P = C^{te}$, $dP = 0$.

$$W_3 = W_J^B = - \int_J^B P_B dV = -P_B \int_J^B dV = -P_B (V_B - V_J)$$

Ensuite on remplace les variables par leurs valeurs :



$$V_B = 8V_0$$

$$V_J = V_0$$

$$P_B = P_J = P_0$$

On a :

$$W_3 = W_J^B = -P_0(8V_0 - V_0) = -7P_0V_0$$

Finalement le travail devient :

$$\boxed{W_3 = -7P_0V_0}$$

Le travail $W_3 < 0$, donc le travail est cédé au milieu extérieur sur la transformation du chemin 3. Le travail est donc moteur.

b) Pour le chaleur Q_3 échangée par le système sur le chemin 3

Le calcul de la quantité de chaleur sur le chemin 3 peut être se faire premièrement sur la portion (AJ) et en suite sur la portion (JB) :

$$Q_3 = Q_A^J + Q_J^B$$

Or par définition une variation élémentaire de la chaleur peut s'écrire :

$$\delta Q = C_p dT + h dP = C_v dT + l dV$$

i) sur le segment AJ, la transformation est isochore $V = \text{Cste}$; $dV = 0$.

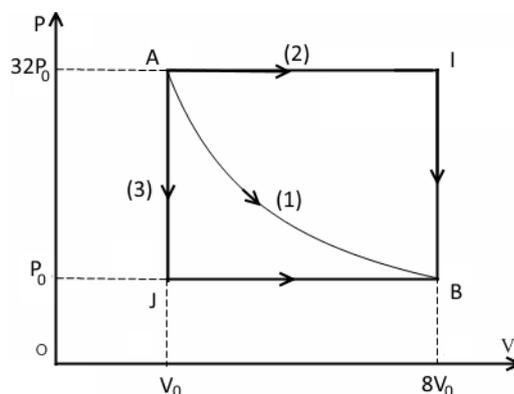
La chaleur élémentaire devient :

$$\delta Q = C_v dT$$

On intègre l'expression par rapport à la température et on a :

$$Q_A^J = C_v \int_A^J dT = C_v (T_J - T_A)$$

On remplace les températures :



$$T_J = \frac{P_J V_J}{R}$$

$$T_A = \frac{P_A V_A}{R}$$

Et on obtient :

$$Q_A^J = C_v \left(\frac{P_J V_J}{R} - \frac{P_A V_A}{R} \right) = \frac{C_v}{R} (P_J V_J - P_A V_A)$$

Ensuite on remplace les variables par leurs valeurs :

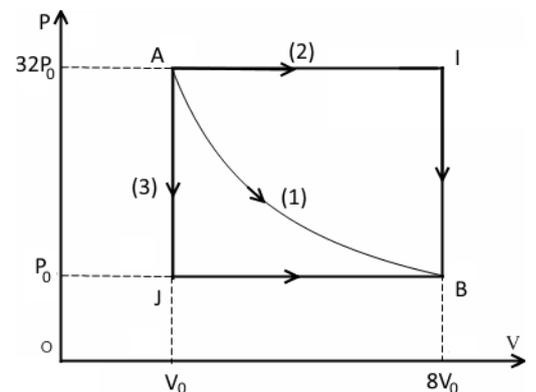
$$P_J = P_B = P_0$$

$$P_A = 32P_0$$

$$V_J = V_A = V_0$$

On a :

$$Q_A^J = \frac{C_v}{R} (P_0 V_0 - 32P_0 V_0)$$



En remplaçant $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$ et on obtient :

$$Q_A^J = -\frac{31}{\gamma - 1} P_0 V_0$$

Finalement la chaleur échangée par le système avec l'extérieure au cours de la transformation (AJ) est :

$$Q_A^J = -\frac{31}{\gamma - 1} P_0 V_0$$

La chaleur est négative $Q_A^J < 0$ donc le système cède la chaleur sur la portion (AJ) du chemin 3.

ii) sur le segment JB, la transformation est isobare $P = C^{te}$; $dP = 0$.

$$\delta Q = C_p dT + h dP = C_p dT$$

La chaleur élémentaire devient :

$$\delta Q = C_p dT$$

On intègre l'expression par rapport à la température et on a :

$$Q_J^B = C_p \int_J^B dT = C_p (T_B - T_J)$$

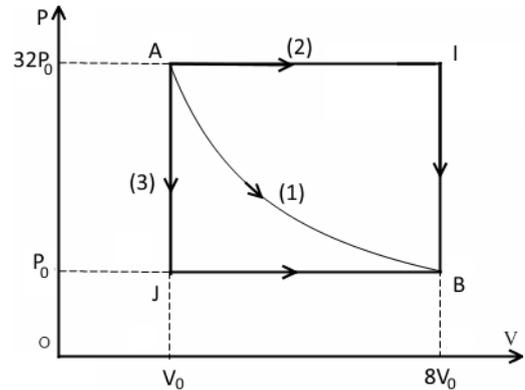
On remplace les températures :

$$T_J = \frac{P_J V_J}{R}$$

$$T_B = \frac{P_B V_B}{R}$$

Et on obtient :

$$Q_J^B = C_p \left(\frac{P_B V_B}{R} - \frac{P_J V_J}{R} \right) = \frac{C_p}{R} (P_B V_B - P_J V_J)$$



Ensuite on remplace les variables par leurs valeurs :

$$V_B = 8V_0$$

$$V_J = V_0$$

$$P_B = P_J = P_0$$

On a :

$$Q_J^B = C_p \left(\frac{P_B V_B}{R} - \frac{P_J V_J}{R} \right) = \frac{C_p}{R} (8P_0 V_0 - P_0 V_0)$$

En remplaçant $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ et on obtient :

$$Q_J^B = \frac{7\gamma}{\gamma - 1} P_0 V_0$$

Finalement la chaleur échangée par le système avec l'extérieure au cours de la transformation (JB) est :

$$Q_J^B = \frac{7\gamma}{\gamma-1} P_0 V_0$$

La chaleur est négative $Q_J^B > 0$ donc le système cède la chaleur sur la portion (JB) du chemin 3.

Pour obtenir la chaleur échangée par le système sur le chemin 3, il faut faire la somme des chaleurs échangées sur les portions (AJ) et (JB) :

$$Q_3 = Q_A^J + Q_J^B = -\frac{31}{\gamma-1} P_0 V_0 + \frac{7\gamma}{\gamma-1} P_0 V_0$$

Finalement la chaleur échangée par le système sur le chemin 3 est :

$$Q_3 = Q_A^J + Q_J^B = -\frac{31}{\gamma-1} P_0 V_0 + \frac{7\gamma}{\gamma-1} P_0 V_0 = 7 \frac{\gamma - \frac{31}{7}}{\gamma-1} P_0 V_0 \approx 7 \frac{\gamma - 4,43}{\gamma-1} P_0 V_0$$

La chaleur $Q_3 < 0$, donc le système cède de la chaleur lors de la transformation du chemin 3.

$$Q_3 = \frac{7\gamma - 31}{\gamma-1} P_0 V_0$$

On remplace $\gamma = \frac{5}{3}$ pour un gaz parfait monoatomique :

$$Q_3 = \frac{7 \times \frac{5}{3} - 31}{\frac{5}{3} - 1} P_0 V_0 = \frac{7 \times 5 - 31 \times 3}{2} P_0 V_0 = -29 P_0 V_0$$

donc

$$Q_3 = -29 P_0 V_0$$

La chaleur échangée par le système avec le milieu extérieur $Q_3 < 0$, donc le système cède de la chaleur au milieu extérieur tout en cédant du travail $W_3 < 0$ sur le chemin 3.

4) Comparaison entre les trois chemins ou les trois transformations

On a d'après les calculs réalisés ci-dessus :

$$\boxed{W_1 = -36P_0V_0 < 0}$$

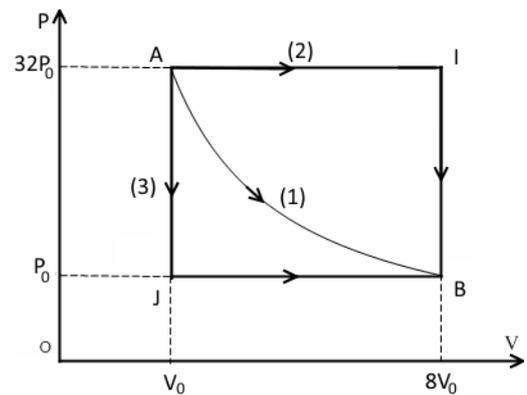
$$\boxed{Q_1 = 0}$$

$$\boxed{W_2 = -224P_0V_0 < 0}$$

$$\boxed{Q_2 = 188P_0V_0 > 0}$$

$$\boxed{W_3 = -7P_0V_0 < 0}$$

$$\boxed{Q_3 = -29P_0V_0 < 0}$$



On constate facilement que :

$$\boxed{W_1 \neq W_2 \neq W_3}$$

$$\boxed{Q_1 \neq Q_2 \neq Q_3}$$

Conclusion : le travail W et la chaleur Q dépendent du chemin suivi ou de la transformation subit par le système.

5) Comparaison de la quantité $(W+Q)$ pour les trois chemins.

Chemin 1 :

$$(W_1 + Q_1) = W_1 = -36P_0V_0$$

donc

$$\boxed{(W_1 + Q_1) = -36P_0V_0}$$

On fait la somme du travail et de la chaleur sur le chemin 2 et on a :

Chemin 2 :

$$W_2 + Q_2 = -224P_0V_0 + 188P_0V_0 = -36P_0V_0$$

On fait la sommation de la chaleur et du travail sur le chemin 2 et on a :

$$\boxed{W_2 + Q_2 = -36P_0V_0}$$

Chemin 3 :

On fait la sommation de la chaleur et du travail sur le chemin 3 et on a

$$(W_3 + Q_3) = -7P_0V_0 - 29P_0V_0 = -36P_0V_0$$

$$\boxed{(W_3 + Q_3) = -36P_0V_0}$$

On conclut que la quantité $(W + Q) = -36P_0V_0$ indépendamment du chemin suivi et que cette quantité ne dépend que de l'état initiale et de l'état finale. Donc $(W + Q)$ doit être une fonction d'état.

Exercice 2

1) 1 mole d'un gaz parfait subit une détente isotherme $T=C^{te}$.

Le système est une mole d'un gaz parfait $PV = RT$

La transformation est isotherme $T=C^{te}$ donc : $PV = RT = C^{te} \Rightarrow P = \frac{RT}{V}$

On cherche à calculer le W ? en fonction du produit RT .

a) La transformation est une détente isotherme **réversible** et fait passer le système de $\left(\begin{matrix} P_1 = 10 \text{ atm} \\ V_1 \end{matrix} \right) \rightarrow \left(\begin{matrix} P_2 = 3 \text{ atm} \\ V_2 \end{matrix} \right)$.

La travail élémentaire pour une transformation réversible : $\delta W = -PdV$. Tous les états intermédiaires de la transformation sont des états d'équilibres.

Le travail élémentaire sur cette transformation s'écrit :

$$\Rightarrow \delta W_1 = -PdV = -RT \frac{dV}{V}$$

L'intégration sur cette transformation est :

$$\boxed{W_1 = -RTL \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)}$$

Alors puisque

$$PV = C^{te} \Rightarrow P_1 V_1 = P_2 V_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}$$

Remplaçant dans l'expression du travail et on a :

$$\Rightarrow W_1 = -RT \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

$$\boxed{W_1 = -RT \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right)}$$

A.N.

$$\Rightarrow W_1 = -RT \ln \left(\frac{10}{3} \right) = -1,2RT$$

Finalement le travail pour **une détente isotherme réversible** est :

$$\boxed{W_1 = -1,2RT}$$

Le travail est négatif, donc il est cédé par le système à l'extérieur. Donc, le travail est moteur.

b) La transformation est **une détente isotherme irréversible** faisant passer le système de $\left(\begin{matrix} P_1 = 10 \text{ atm} \\ V_1 \end{matrix} \right) \rightarrow \left(\begin{matrix} P_2 = 3 \text{ atm} \\ V_2 \end{matrix} \right)$

Dans ce cas seuls les états extrêmes sont des états d'équilibre. Dans ce cas le travail élémentaire s'écrit :

$$\delta W_2 = -P_{ext} dV$$

Or ce qui importe dans ce cas c'est la pression de l'état final du système qui un état d'état d'équilibre (système-milieu extérieur), ainsi on a :

$$\delta W_2 = -P_{ext} dV = -P_2 dV$$

L'intégration du travail entre les deux états d'équilibre 1 et 2, on a :

$$W_2 = -P_2 (V_2 - V_1)$$

Remplaçant $PV = RT \Rightarrow P_1 = \frac{RT}{V_1}$ et $P_2 = \frac{RT}{V_2}$

Donc

$$W_2 = -P_2 \left(\frac{RT}{P_2} - \frac{RT}{P_1} \right) = -RT \left(1 - \frac{P_2}{P_1} \right)$$

$$W_2 = -RT \left(1 - \frac{P_2}{P_1} \right)$$

A.N.

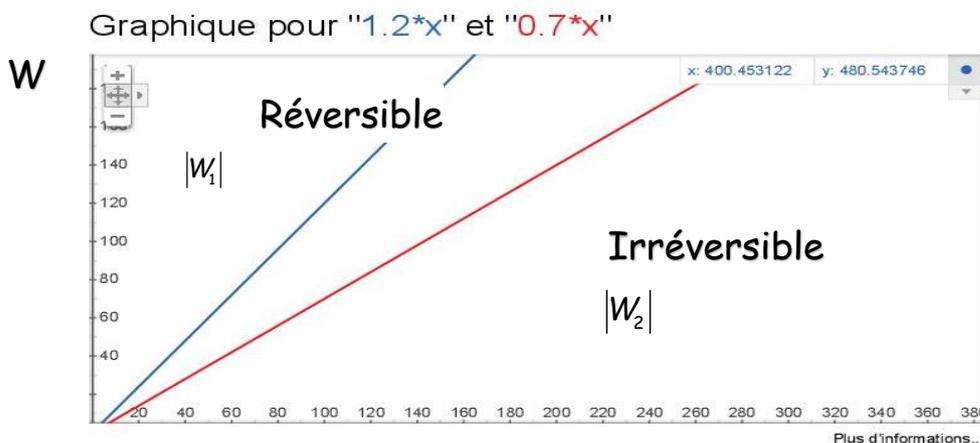
$$W_2 = -RT \left(1 - \frac{3}{10} \right) = -0,7RT$$

Donc finalement le travail devient :

$$W_2 = -0,7RT$$

Le travail est négatif, donc il est cédé par le système à l'extérieur. Donc, le travail est moteur.

2) En comparant les deux travaux $|W_1| > |W_2|$. On conclut que le travail dépend de la transformation et il est maximum pour une transformation réversible. Le système cède plus de travail dans le cas irréversible que dans le cas réversible.



$R=8,314 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ est la constante des gaz parfaits.

RT

Exercice 3

1) La quantité de chaleur élémentaire du gaz échangé avec le milieu extérieur est :

$$\delta Q = -\frac{nRT}{P} dP + C_p(T) dT$$

$$Q = Q(P, T) \Rightarrow \delta Q = \left(\frac{\partial Q}{\partial P} \right)_T dP + \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P dT = M dP + N dT$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial P} \right)_T = -\frac{nR}{P} T \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P = C_p(T)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_P = -\frac{nR}{P} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right)_T = 0$$

Conclusion

La quantité de chaleur élémentaire δQ n'est pas une différentielle totale. Par conséquent, la quantité de chaleur Q dépend du chemin suivi et elle n'est pas une fonction d'état.

2) A pression constante, la capacité calorifique de l'oxyde de carbone (CO) est :

$$C_p(T) = m \left(A_0 - \frac{A_1}{T} + \frac{A_2}{T^2} \right)$$

NB: $C_p = m c_p$; C_p la capacité calorifique (JK^{-1}) et c_p chaleur massique ($Jkg^{-1}K^{-1}$)

La quantité de chaleur élémentaire δQ_p échangée à $P=C^{te}$, par le gaz de $m=28g$ correspondant à la variation de température dT :

$$\delta Q_p = C_p(T) dT = m c_p dT = m \left(A_0 - \frac{A_1}{T} + \frac{A_2}{T^2} \right) dT$$

$$\Rightarrow Q_p = \int_{T_1}^{T_2} C_p(T) dT$$

$$Q_p = m \left[A_0 (T_2 - T_1) - A_1 \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - A_2 \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \right]$$

A.N.

$$T_1 = 300\text{K}, T_2 = 400\text{K}, \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = 0,287, m = 28\text{g}$$

$$A_0 = 1,41 ; A_1 = 492, A_2 = 16 \cdot 10^4 ;$$

$$Q_p = 28 \times 10^{-3} (141 - 141,5 + 133,33) = 3719 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Donc

$$\boxed{Q_p = 3,719 \text{ J}}$$

Le système reçoit de la chaleur cette transformation isobare

3) En déduire la chaleur massique moyenne relative à une mole du gaz est :

$$\bar{c}_p = \frac{\bar{C}_p}{m} = \frac{Q_p}{m(T_2 - T_1)}$$

A.N.

$$1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}, Q_p = 3,719 \text{ J}, m = 28\text{g}$$

La chaleur massique est:

$$\bar{c}_p = \frac{3,719}{28 \times 10^{-3} \times 10^2} = \frac{3,719}{2,8} = 1,33 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Donc

$$\boxed{\bar{c}_p = 1,33 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1}}$$

La capacité calorifique ou thermique est :

$$\bar{C}_p = m\bar{c}_p$$

$$\bar{C}_p = 28 \times 10^3 \times 1,33 = 0,0372 \text{ JK}^{-1}$$

$$\text{Donc } \boxed{\bar{C}_p = 0,0372 \text{ JK}^{-1}}$$

Exercice 4

1) Le gaz parfait diatomique ($\gamma = 7/5 = 1,4$) subit une double transformation :

$$P_0 = 1 \text{ atm} \xrightarrow[T_0=273\text{K}]{\text{isotherme}} P_1 = 20 \text{ atm} \xrightarrow[Q=0]{\text{adiabatique}} P_0 = 1 \text{ atm}$$

$$T_0 = ?$$

On a lors d'une transformation adiabatique d'un gaz parfait :

$$T_0 P_0^{1-\gamma} = T_1 P_1^{1-\gamma} \Rightarrow \boxed{T_1 = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$$

A.N.

$$\frac{1-\gamma}{\gamma} = \frac{1-\frac{7}{5}}{\frac{7}{5}} = -\frac{2}{7}$$

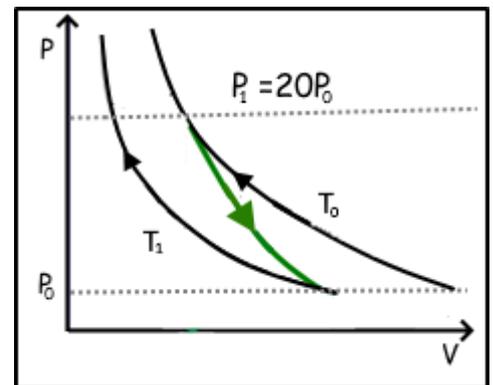
$$T_1 = 273 \times (20)^{-\frac{2}{7}} = 115,995 \text{ K}$$

$$\boxed{T_1 \approx 116 \text{ K}}$$

2) Dans le deuxième cas

$$\text{a) } P_0 = 1 \text{ atm} \xrightarrow[T_1 \approx 116 \text{ K}]{\text{isotherme}} P_1 = 20 \text{ atm} \xrightarrow[Q=0]{\text{adiabatique}} P_0 = 1 \text{ atm}$$

$$T_2 = ?$$



$$\text{On a } T_1 P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 P_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Rightarrow \boxed{T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$$

Puis on remplace T_1 par son expression de la question 1)

$$\boxed{T_2 = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{2^{1-\gamma}}{\gamma}}}$$

A.N.

$$T_2 = 273 \times (20)^{-\frac{4}{7}} = 49,2852K$$

$$\boxed{T_2 \approx 49,3K}$$

b) la température atteinte par le gaz, au bout de $n=3$ double transformation est :

$$T_3 = T_2 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{3^{1-\gamma}}{\gamma}} \Rightarrow \boxed{T_3 = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{3^{1-\gamma}}{\gamma}}}$$

Un raisonnement par récurrence donne la température atteinte au bout de n doubles transformations successives :

$$T_n = T_{n-1} \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{n^{1-\gamma}}{\gamma}} \Rightarrow \boxed{T_n = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{n^{1-\gamma}}{\gamma}}}$$

A.N.

$$n=1 \Rightarrow T_4 = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{4^{1-\gamma}}{\gamma}} = 273 \times 20^{-\frac{8}{7}} = 8,897K \Rightarrow \boxed{T_4 \approx 8,9K}$$

$$n=5 \Rightarrow T_5 = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{5^{1-\gamma}}{\gamma}} = 273 \times 20^{-\frac{10}{7}} = 3,780K \Rightarrow \boxed{T_5 \approx 3,9K}$$

Remarque : par ce procédé, on peut atteindre de très basses températures au

bout d'un grand nombre de doubles transformations.

3) Au cours de la $n^{\text{ième}}$ double transformation, la température passe de T_{n-1} à T_n

Puisqu'il s'agit d'un gaz parfait $dU = C_v dT$ (l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température).

$$\Delta U_n = C_v (T_n - T_{n-1})$$

$$\Delta U_n = \frac{RT_0}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{n \frac{1-\gamma}{\gamma}} - \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{(n-1) \frac{1-\gamma}{\gamma}} \right]$$

$$\Delta U_n = \frac{RT_0}{\gamma - 1} \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{n \frac{1-\gamma}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right]$$

A.N.

$$\gamma = 7/5 = 1,4$$

$$T_4 \approx 8,9K, T_5 \approx 3,9K$$

$$R \approx 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Pour une mole de gaz parfait on $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$

$$n = 5 \Rightarrow \Delta U_5 = \frac{R}{\gamma - 1} (T_5 - T_4) = -8,314 \times \frac{5}{\frac{7}{5} - 1} = -8,314 \times \frac{25}{2} = -103,925$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta U_5 \approx -104J}$$

i) Le long de l'isotherme le travail reçu au bout de n doubles transformations est (la température étant T_{n-1})

Sur cette isotherme on a :

$$P_0 V_{n-1} = P_1 V_n \Rightarrow \frac{V_{n-1}}{V_n} = \frac{P_1}{P_0} \Rightarrow \boxed{\frac{V_{n-1}}{V_n} = \frac{20P_0}{P_0} = 20}$$

Le travail échangé par le gaz sur cette isotherme :

$$\delta W = -PdV$$

$$\Rightarrow W_{isoth}^n = -\int P dV = -\int_{V_n}^{V_{n-1}} RT_{n-1} \frac{dV}{V} = RT_{n-1} \int_{V_n}^{V_{n-1}} \frac{dV}{V} = RT_{n-1} \ln\left(\frac{V_{n-1}}{V_n}\right)$$

$$W_{isoth}^n = RT_{n-1} \ln \frac{P_1}{P_0} = RT_0 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{(n-1)\frac{1-\gamma}{\gamma}} \ln \frac{P_1}{P_0}$$

$$\boxed{W_{isoth}^n = RT_0 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{(n-1)\frac{1-\gamma}{\gamma}} \ln \frac{P_1}{P_0}}$$

Puisque l'énergie interne dans le cas du gaz parfait ne dépend que de la température, lorsque la température est constante ou sur une isotherme la variation de l'énergie interne est nulle :

$$\Delta U_{isoth}^n = W_{isoth}^n + Q_{isoth}^n = 0$$

La quantité de chaleur échangée est alors :

$$Q_{isoth}^n = -W_{isoth}^n$$

$$Q_{isoth}^n = -RT_0 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{(n-1)\frac{1-\gamma}{\gamma}} \ln \frac{P_1}{P_0}$$

ii) La variation de l'énergie interne sur la nième double transformation s'écrit :

$$\Delta U_n = \Delta U_{isoth}^n + \Delta U_{adiab}^n = \Delta U_{adiab}^n = W_{adiab}$$

Donc le long de la nième transformation adiabatique, la chaleur échangée est nulle et le travail échangé W_{adiab} est égale à la variation de l'énergie interne sur la nième double transformation :

$$\boxed{W_{adiab} = \Delta U_{adiab}^n = \Delta U_n}$$

$$W_{adiab} = \Delta U_n = \frac{RT_0}{\gamma - 1} \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right]$$

Au total, pendant la nième double transformation.

-le travail échangé est :

$$W_n = W_{isoth} + W_{adiab} = RT_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{(n-1)1-\gamma}{\gamma}} \ln \frac{P_1}{P_0} + \frac{RT_0}{\gamma - 1} \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right]$$

$$W_n = RT_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{(n-1)1-\gamma}{\gamma}} \ln \frac{P_1}{P_0} + \frac{RT_0}{\gamma - 1} \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - \frac{RT_0}{\gamma - 1} \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{(n-1)1-\gamma}{\gamma}}$$

$$W_n = RT_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \left[\left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} \left(\ln \frac{P_1}{P_0} - \frac{1}{\gamma - 1} \right) + \frac{1}{\gamma - 1} \right]$$

-la chaleur échangée

$$Q_n = -W_{isoth} = -RT_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{(n-1)1-\gamma}{\gamma}} \ln \frac{P_1}{P_0}$$

A.N.

$$R \approx 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}, \frac{P_1}{P_0} = 20, \gamma = 7/5 = 1,4$$

Pour $n = 5$;

$$Q_5 = -RT_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{-\frac{8}{7}} \ln \frac{P_1}{P_0}$$

$$Q_5 = -8,314 \times 273 \times (20)^{-\frac{8}{7}} \ln 20 \approx -221,61 \text{ J}$$

$$Q_5 \approx -221,61J$$

$$W_5 \approx 117,61J$$

$$U_5 = W_5 + Q_5 \approx -104J$$