TD d'Algèbre 4

Rappels: Algèbre linéaire.

Exercice 1.
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{u_1, u_2\}$ et par G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{u_3, u_4\}$.

1) Déterminer une base de F et de G. En déduire la dimension de chacun d'eux.

2) Déterminer $F \cap G$.

3) En déduire $F + G$. Que peut-on conclure ?

Exercice 2.
Soit f l'application :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_{n+1}[X] \\ & & P(X) & \mapsto & X.P(X) \end{array}$$

1) Montrer que l'application f est linéaire.

2) Déterminer $ker(f)$. L'application f est-elle injective ?

3) Quelle est la dimension de $Im(f)$? L'application f est-elle bijective ?

Exercice 3.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension finie n, et soient f et g des endomorphismes de E tels que :

$$E = Ker(f) + Ker(g) = Im(f) + Im(g).$$

Montrer que :

$$E = Ker(f) \oplus Ker(g) = Im(f) \oplus Im(g).$$

Exercice 4.
Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soient $a = e_1 - e_2 + e_3$, $b = 2e_1 - e_2 + e_3$, $c = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1) Montrer que $\mathcal{B}' = \{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

3) Calculer P^{-1}.

4) Déterminer la matrice R de u dans la base $\mathcal{B}'$.

5) Exprimer A en fonction de R, calculer R^4 et en déduire les valeurs de A^{4n}, avec $n \in \mathbb{N}^*$.