TD d'Analyse numérique et Algorithmique

Série 1: Approximation des solutions de l'équation $f(x) = 0$

Exercice 1.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$.

1) Montrer que la fonction f admet un zéro c dans [1,2].

2) En utilisant la méthode de la dichotomie, trouver une valeur approchée de c avec une précision de 10^{-2}. On pourra utiliser le tableau ci-dessous :

k	a_k	c_k	b_k	signe de $f(a_k)$	signe de $f(c_k)$	signe de $f(b_k)$
0	1		2			
1						
2						
$\cdots$						

Exercice 2.
Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \frac{1}{4}\cos(x)$ et $g(x) = \frac{1}{4}\cos(x)$.

1) Montrer que la recherche des solutions de $f(x) = 0$ est équivalente à la recherche des points fixes de g.

2) Montrer que la suite récurrente définie par : $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = g(u_n)\, \forall n \geq 0$ est convergente.

Exercice 3.
On considère l'équation $f(x) = 0$, avec :

$$f(x) = \cos(x) - xe^x,\ x \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

1) Etudier les variations de f et montrer que cette équation admet une unique solution s dans $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2) Utiliser la méthode de dichotomie pour trouver une valeur approchée de s avec la précision 10^{-2}.

3) Vérifier que la méthode de Newton est applicable pour trouver une valeur approchée de s. En étudiant le signe de f'', indiquer un bon choix de x_0. Calculer les quatre premiers itérés de cette méthode.

4) On met l'équation $f(x) = 0$ sous la forme :

$$x = \frac{\cos(x)}{e^x}.$$

a) Montrer que les hypthèses d'application de la méthode du point fixe ne sont pas vérifiées sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) Montrer qu'elles le sont sur l'intervalle $[0.45, 0.6]$.

c) Combien de termes devrait-on calculer par la méthode du point fixe pour trouver une valeur approchée de s à 10^{-2} près ?

Exercice 4.
En considérant la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2$, utiliser la méthode de Newton pour construire une suite convergeant vers $\sqrt{2}$. Calculer les quatre premiers termes de cette suite.