

TD d'Analyse Numérique & Algorithmique
Série 2: Interpolation polynomiale.

Exercice 1.

Construire le polynôme P qui interpole les points : $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ et $(3, 3)$ en utilisant la méthode de Lagrange et la méthode d'Aitken.

Exercice 2.

L'espérance de vie dans un pays a évolué dans le temps selon le tableau suivant :

Année	1975	1980	1985	1990
Espérance	72,8	74,2	75,2	76,4

Utiliser l'interpolation de LAGRANGE pour estimer l'espérance de vie en 1977, 1983 et 1988.

Exercice 3.

- 1) Construire le polynôme de LAGRANGE P qui interpole les points $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ et $(2, 3)$.
- 2) Soit Q le polynôme de LAGRANGE qui interpole les points $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que : $Q(x) - P(x) = \lambda(x+1)x(x-1)$.

Exercice 4.

- 1) Déterminer le polynôme d'interpolation de la Lagrange $P_2(x)$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ pour les points : 0 ; $\frac{3}{4}$ et 1 .
- 2) Comparer à l'aide d'une calculatrice, $f(\frac{1}{2})$ et $P_2(\frac{1}{2})$.
- 3) Rappeler la formule de l'erreur, et donner une majoration de $|e(x)| = |f(x) - P_2(x)|$.
- 4) Evaluer l'erreur commise en considérant les points : $x_0 = 0$; $x_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{1}{2}$; $x_3 = \frac{3}{4}$ et $x_4 = 1$.

Exercice 5.

Soit f une fonction qui vérifie le tableau suivant :

$x_0 = 0$	$x_1 = \frac{\pi}{6}$	$x_2 = \frac{\pi}{4}$
$f_0 = 0$	$f_1 = 0,5$	$f_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- 1) Donner les trois polynômes de Lagrange L_0 ; L_1 ; L_2 .
- 2) Donner le polynôme d'interpolation P_2 en expression symbolique polynomiale et calculer une approximation de $f(\frac{\pi}{5})$.
- 3) En supposant que $f(x) = \sin(x)$, donner l'erreur commise en confondant $f(\frac{\pi}{5})$ avec $P_2(\frac{\pi}{5})$ et justifier la précision obtenue.
- 4) Reprendre ces questions avec la méthode d'Aitken.