TD d'Algèbre 4

Série 3: Jordanisation & Applications.

Exercice 1.
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix},$$

1) Donner une matrice réduite triangulaire de A en précisant la matrice de passage.

2) Quelle est la réduite de Jordan de la matrice A ?

3) Déterminer une base de Jordan.

Exercice 2.
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -(4+\alpha) & -4 & -1 \end{pmatrix}, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Selon les valeurs de α, donner une réduite de Jordan ainsi qu'une matrice de passage.

Exercice 3.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de f.

2) Déterminer les sous-espaces propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3) Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

4) Donner une décomposition de $\mathbb{R}^4$ comme somme directe de sous-espaces cycliques de f en précisant leur dimension.

5) Donner la matrice réduite de Jordan J de f relativement à la décomposition précédente.

6) Trouver une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle J soit la matrice de f. Exprimer A en fonction de J et la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Exercice 4.
Résoudre le système différentiel : (S) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 3y + 9z + 1 \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 4y - 9z + t \\ \frac{dz}{dt} = -3x + 3y - 8z + t \end{cases}.$

Exercice 5.

1) Réduire à l'expression la plus simple la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2) Résoudre le système différentiel : (S) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -z \\ \frac{dy}{dt} = x - y - z \\ \frac{dz}{dt} = y - 2z \end{cases}.$