

TD d'Analyse Numérique & Algorithmique
Série 3: Intégration Numérique et systèmes linéaires.

Exercice 1.

Soient :

$$f : x \mapsto e^{-x^2} \text{ et } I = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

- 1) Calculer les valeurs approchées I_T et I_S de I par la méthode des trapèzes et la méthode de Simpson lorsqu'on utilise la subdivision suivante :

$$\left(0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1\right).$$

- 2) Donner une estimation de l'erreur pour chaque méthode.

Exercice 2.

On considère l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx.$$

- 1) Calculer la valeur exacte de I .
- 2) Évaluer numériquement cette intégrale par la méthode des trapèzes avec $m = 3$ sous-intervalles.
- 3) Quel nombre de sous-intervalles m faut-il choisir pour avoir une erreur inférieure à 10^{-4} ?

Exercice 3.

Considérons le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \delta & \alpha \end{pmatrix},$$

avec α, β, γ et δ des paramètres réels. Donner des conditions suffisantes sur les coefficients pour avoir

- 1) convergence de la méthode de JACOBI.
- 2) convergence de la méthode de GAUSS-SEIDEL .

Exercice 4.

Soit le système linéaire :

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 6 \end{cases}$$

- 1) Résoudre les systèmes linéaires par la méthode d'élimination de GAUSS.
- 2) Approcher la solution avec la méthode de JACOBI avec 3 itérations à partir de $x^{(0)} = (2, 2, 2)$.
- 3) Approcher la solution avec la méthode de GAUSS-SEIDEL avec 3 itérations à partir de $x^{(0)} = (2, 2, 2)$.