Correction de la série 1

Exercice 1 :

1. Notons T cette application. On a
$$|T(x)| \leq \sum_{n=0}^{N} |x_n| \leq \|x\|_2 \left(\sum_{n=0}^{N} 1^2\right)^{1/2} \leq N^{1/2}\|x\|_2$$
o le point crucial est l'inégalit de Cauchy-Schwarz. T est donc continue, et M_N est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. On en déduit le résultat demandé.

2. a) Soit $x \in M_N$ et $y \in E$. On a
$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{N} x_k \overline{y_k} = \overline{y_0} \sum_{k=0}^{N} x_k = 0.$$
b) Il faut montrer l'inclusion contraire. Prenons donc $y \in M_N^{\perp}$, et soit x la suite donnée par l'énoncé, membre de M_N, avec $i = 0$ et $0 < j \leq N$. On a
$$\langle x, y\rangle = y_0 - y_j = 0,$$
ce qui prouve que $y_j = y_0$ pour $0 \leq j \leq N$. D'autre part, pour $j > N$, on considère la suite x tel que $x_j = 1$ et $x_k = 0$ pour $k \neq i$. Le produit scalaire de y avec cette suite donne $y_j = 0$, ce qui prouve que $y \in E$.

Exercice 2 :

Notons B la boule unit fermée de H. Il faut d'abord faire un dessin en dimension deux pour comprendre quoi doit être égale cette projection. On se rend assez vite compte que l'on doit avoir $Px = x$ si x est dans B, et $Px = x/\|x\|$ si $x \notin H$. C'est clair si x est dans B car un point de l'ensemble se projette dans lui-même. Si $x \notin B$, pour prouver que $Px = x/\|x\|$, il suffit de prouver que, pour tout $z \in B$, on a
$$\operatorname{Re}\left(\langle x - \frac{x}{\|x\|}, z - \frac{x}{\|x\|}\rangle\right) \leq 0.$$
Mais ceci suit du calcul suivant :
$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\langle x - \frac{x}{\|x\|}, z - \frac{x}{\|x\|}\rangle\right) &= \operatorname{Re}\left(\langle x, z\rangle\right) - \|x\| - \operatorname{Re}\langle \frac{x}{\|x\|}, z\rangle + 1 \\ &= (\|x\| - 1)\left(\operatorname{Re}\langle \frac{x}{\|x\|}, z\rangle - 1\right).\end{aligned}$$
Puisque $x \notin B$, on a $\|x\| - 1 \geq 0$ et puisque $z \in B$, on a $\operatorname{Re}\langle \frac{x}{\|x\|}, z\rangle \leq \left|\langle \frac{x}{\|x\|}, z\rangle\right| \leq 1$. On a donc bien démontré la propriété voulue.

Exercice 3 :

1. Il suffit d'appliquer la définition pour montrer que C est convexe. D'autre part, C est fermé : si (x^p) est une suite de C qui converge vers $x \in H$, et si $x_n^p \geq 0$, on a clairement par passage à la limite $x_n \geq 0$, et donc $x \in C$.

2. Soit $x \in \ell^2$. Il faut deviner la formule pour $P_C(x)$. La seule faon de s'en sortir est de faire un dessin en dimension 2 et d'essayer de deviner ainsi quelle est la formule pour $P_C(x)$. En dimension 2, C correspond simplement au quart de plan en haut gauche. Il y a 4 cas différents pour déterminer la projection de x, en fonction de sa position dans l'un ou l'autre des demi-plans. C'est ainsi que l'on est conduit à poser $P_C(x) = (y_n)$, o $y_n = x_n$ si $x_n \geq 0$, et $y_n = 0$ sinon. Pour prouver qu'il s'agit bien de la projection de x sur C, il suffit de vérifier que, pour tout z de C, on a :

$$< x - y, z - y > \leq 0.$$

Mais,

$$< x - y, z - y > = \sum_{n \geq 0} (x_n - y_n)(z_n - y_n).$$

Or, $n \geq 0$ fixé, deux cas sont possibles :
i) Soit $x_n \geq 0$, et dans ce cas $x_n - y_n = 0$.
ii) Soit $x_n \leq 0$, mais alors $y_n = 0$, et donc $(x_n - y_n)(z_n - y_n) \leq 0$.
Dans tous les cas, on a $(x_n - y_n)(z_n - y_n) \leq 0$, ce qui prouve que $< x - y, z - y > \leq 0$.

3. Il faut légèrement adapter pour le cas complexe. Il faut et il suffit cette fois que $y = P_C(x)$ vérifie pour tout z de $\mathbb{C}$

$$\Re e(< x - y, z - y >) = \Re e \left(\sum_{n \geq 0} (x_n - y_n)\overline{(z_n - y_n)} \right) \leq 0.$$

Dans tous les cas, $z_n - y_n$ est réel, et donc

$$\Re e(< x - y, z - y >) = \sum_{n \geq 0} (z_n - y_n) \left(\Re e(x_n) - y_n \right).$$

On est alors conduit à poser $y_n = \Re e(x_n)$ si $\Re e(x_n) \geq 0$ et $y_n = 0$ sinon. On obtient bien que la quantité précédente est négative.

Exercice 4 :

1. Il est clair que si $z \in F$, on a $p(z) \in F$. On en dduit que $p(p(x)) = p(x)$ pour tout x de H.

2. Dcomposons x en $p(x) + x_1$, o x_1 est orthogonal F, et y en $p(y) + y_1$. On a alors :

$$< p(x), y > = < p(x), p(y) > + < p(x), y_1 > = < p(x), p(y) >$$

o la dernire ingalit vient de ce que y_1 est orthogonal F tout entier, et donc en particulier $p(x)$. La mme galit est vraie, pour les mmes raisons, pour $< x, p(y) >$.

3. D'aprs le thorme de Pythagore, on a :

$$\|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 = \|x\|^2.$$

Ceci entrane

$$\|p(x)\| \leq \|x\|,$$

et donc $\|p\| \leq 1$. Maintenant, puisque F n'est pas rduit $\{0\}$, il existe x dans F de norme 1. Pour ce x, on a $\|p(x)\| = \|x\| = 1$, ce qui prouve que $\|p\| = 1$..

Exercice 5 :

1. D'abord, puisque $p(x) \in F$, il est clair que l'on a :

$$\|x - p(x)\| \geq d(x, F).$$

D'autre part, considérons $y \in F$, et décomposons x en $x = p(x) + x_1$, o x_1 est orthogonal F. On a alors :

$$\begin{aligned}
\|x - y\|^2 &= < p(x) - y + x_1, p(x) - y + x_1 >; \\
&= < p(x) - y, p(x) - y > + 2\Re\left(< p(x) - y, x_1 >\right) + < x_1, x_1 >; \\
&= \|p(x) - y\|^2 + \|x_1\|^2.
\end{aligned}$$

Maintenant, on a $\|x_1\|^2 = \|x - p(x)\|^2$ d'après le théorème de Pythagore, et donc $\|x - y\| \geq \|x - p(x)\|$.

2. D'abord, en gardant les mêmes notations, on a

$$< x, x_1 >=< p(x) + x_1, x_1 >=< x_1, x_1 >; = d(x, F)^2.$$

On en déduit que

$$< x, \frac{x_1}{\|x_1\|} >= \frac{d(x, F)^2}{\|x_1\|} = d(x, F),$$

ce qui démontre une première inégalit. D'autre part, soit $y \in F^{\perp}$, avec $\|y\| = 1$, on a :

$$< x, y >=< p(x), y > + < x_1, y >=< x_1, y >,$$

d'où on déduit par l'inégalit de Cauchy-Schwarz

$$| < x, y > | \leq \|x_1\| = d(x, F),$$

ce qui démontre la deuxième inégalité.
a) Par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.
b) Rappelons ce qui caractérise $p(x)$: $p(x)$ est le seul élément de F tel que $x - p(x)$ soit orthogonal tous les éléments de F. Raisonnons par analyse-synthèse. $p(x)$ se décompose dans la base orthonormée de F en

$$p(x) = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n.$$

Maintenant, $x-p(x)$ est orthogonal e_1, puisqu'il est orthogonal F. On a donc :

$$< x-p(x), e_1 >= 0 =< x, e_1 > - < p(x), e_1 >=< x, e_1 > -\alpha_1.$$

On voit que nécessairement $\alpha_1 =< x, e_1 >$, et par un raisonnement similaire, on doit avoir $\alpha_k =< x, e_k >$, ce qui nous conduit poser

$$p(x) =< x, e_1 > e_1 + ...+ < x, e_n > e_n.$$

Réciproquement, on vrifie facilement que $p(x)$ ainsi défini est lment de F, et que $x-p(x)$ est orthogonal tout élément de F.
c) Introduisons $H = L^2([0,1])$ (on pourrait aussi considérer simplement $C([0,1])$), muni du produit scalaire

$$< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Posons F le sous-espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré ≤ 1. Le problème de minimisation peut aussi s'interpréter comme la recherche de $d(t^2, F)$. On applique alors les méthodes mises en valeur dans l'exercice. On commence par chercher (e_1, e_2) une base orthonormée de F. On peut choisir $e_1(t) = 1$, qui est déjà un vecteur normé. Pour e_2, on commence d'abord par chercher f_2 sous la forme

$$f_2(t) = t + \alpha e_1(t) = t + \alpha,$$

de sorte que f_2 soit orthogonal au vecteur précédent construit. On a donc :

$$< f_2, e_1 >= \int_0^1 (t+\alpha)dt = \frac{1}{2} + \alpha = 0.$$

On a donc $f_2 = t - 1/2$, et il suffit maintenant de normaliser ce vecteur :

$$e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = 2\sqrt{3}t - \sqrt{3}.$$

On calcule ensuite la projection de t^2 sur F, en utilisant :

$$< t^2, e_1 >= \frac{1}{3},$$

$$< t^2, e_2 >= \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

On en déduit :

$$p(t^2) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{3}(2t-1)\right)) = t - \frac{1}{6}.$$

Le minimum est donc atteint pour $a = 1$ et $b = -1/6$. Il ne reste plus qu'à calculer la dernière intégrale qui fait $1/180$.

3. F possède une base hilbertienne, car il est lui-même un espace de Hilbert, en tant que sous-espace ferm (donc complet) d'un espace de Hilbert. Si $(e_n)_{n\in I}$ désigne une base hilbertienne de F, le même raisonnement que précédemment montre que

$$p(x) = \sum_{n\in I} < x, e_n > e_n.$$

4. D'une part, M est clairement un sous-espace vectoriel de H, et il est ferm (caractérisation par les suites, ou bien noyau d'une application linéaire continue). Posons ensuite N le sous-espace vectoriel engendré par $(1,1,1\dots,1,0,0,\dots)$. On pourra vérifier qu'il convient. Enfin, pour calculer la distance de $(1,0,0,\dots)$ M, il suffit de déterminer sa projection sur M. Mais x se décompose alors en
$$x = p(x) + k(1,1,\dots,1,0,\dots).$$
Prenant la somme des n premiers termes de chaque membre, on trouve que $k=\frac{1}{n+1}$. Il vient finalement :
$$d(x,M) = \|\frac{1}{n+1}(1,1,1,\dots,0,\dots)\| = \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}.$$

Exercice 6 :

1. On a $\|x(n)\| = 1/n$: la suite $(x(n))$ converge vers 0.
2. Rappelons que si x et y sont deux éléments de l^2, on a :
$$|x_m - y_m| \leq \|x-y\|.$$
On en déduit que si la suite $(x(n))_{n\geq 1}$ converge vers x dans ℓ^2, alors pour chaque m, la suite $(x(n)_m)_{n\geq 1}$ converge vers x_m. Cette propriété permet de deviner la limite des suites de ℓ^2. On pose ici $x=(1,1/2,1/3,\dots,1/n,1/n+1,\dots)$. On a
$$\|x-x(n)\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2},$$
et cette quantité tend vers 0 comme reste d'une série convergente.
3. On remarque que $\|x(n)\|^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, et ceci tend vers $+\infty$ (c'est la somme partielle d'une série termes positifs divergente). La suite $(x(n))$ n'est pas convergente.
4. Il est facile de vérifier que pour $n\neq p$, on a exactement :
$$\|x(n)-x(p)\| = \sqrt{2}.$$
La suite $(x(n))$ ne peut pas converger car elle n'est pas de Cauchy.
5. On pose x l'élément de ℓ^2 défini par $x_m = 1/m$. On a :
$$\|x(n)-x\| = \frac{1}{n}\left(\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^6}\right)^{1/2} \to 0.$$
6. Cette suite n'est pas dans ℓ^2, elle ne peut donc pas converger!

Exercice 7 :

On considère $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ o le 1 est en $n-$ième position. La suite $(e_n)_{n\geq 0}$ est une suite de la boule unité fermée de ℓ^2. Nous allons prouver qu'elle n'admet pas de sous-suite convergente. Il suffit en fait de remarquer que, pour $p \neq q$, on a

$$\|e_p - e_q\| = \sqrt{2}.$$

Aucune sous-suite de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ ne pourra être de Cauchy et donc converger. Ce résultat est un cas particulier du théorème de Riesz qui dit que la boule unité fermée d'un espace vectoriel norm de dimension infinie n'est jamais compacte.

Exercice 8 :

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$|v(n)_k - v(l)_k| \leq \|v(n) - v(l)\|,$$

d'o le rsultat si $n, l \geq N(\epsilon)$.

2. La suite $(v(n)_k)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet, donc elle converge.

3. C'est une conséquence immédiate du fait que $v(N(\epsilon)) \in \ell^2(\mathbb{N})$.

4. Pour tout $n \geq N(\epsilon)$, et tout $L \geq K$, on a d'après l'inégalit de Minkowski

$$\left(\sum_{L\geq k\geq K} v(n)_k^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{L\geq k\geq K} (v(n)_k - v(N(\epsilon))_k)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{L\geq k\geq K} v(N(\epsilon))_k^2\right)^{1/2}$$

et donc

$$\left(\sum_{L\geq k\geq K} v(n)_k^2\right)^{1/2} \leq \|v(n) - v(N(\epsilon))\| + \epsilon \leq 2\epsilon.$$

En passant la limite en n, ce qui est autorisé gauche car on a simplement une somme finie, on en déduit

$$\left(\sum_{L\geq k\geq K} v_k^2\right)^{1/2} 2 \leq \epsilon.$$

5. D'après la question précédente, la série

$$\sum_{k\geq 1} v_k^2$$

est convergente (elle est de Cauchy). Donc $v = (v_k) \in \ell^2(\mathbb{N})$. Si $K \geq 0$, et $n, l \geq N(\epsilon)$, on a :

$$\left(\sum_{k\leq K} (v(n)_k - v(l)_k)^2\right)^{1/2} \leq \epsilon$$

donc en passant la limite en n, on a

$$\left(\sum_{k\leq K} (v_k - v(l)_k)^2\right)^{1/2} \leq \epsilon,$$

puis en passant la limite en K,

$$\|v - v(l)\| \leq \epsilon$$

pour tout $l \geq N(\epsilon)$, ce qui montre que la suite $v(n)$ converge vers v dans $\ell^2(\mathbb{N})$ et donc que cet espace est complet.

Exercice 9 :

1. Soit $x \in \ker(T^*)$. Prenons $y \in \mathrm{Im}(T)$. y peut s'écrire $y = Tz$. On a alors :

$$< y, x >; =< Tz, x >=< z, T^*x >= 0.$$

Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}(T)^\perp$, pour tout $y \in H$, on a

$$< T^*x, y >=< x, Ty >= 0.$$

T^*x est orthogonal tous les vecteurs de l'espace : on en déduit que $T^*x = 0$.

2. Prenons $y \in \mathrm{Im}(T^*)$, $y = T^*x$ avec $x \in H$. Si $z \in \ker(T)$, on a

$$< y, z >=< T^*x, z >=< x, Tz >= 0,$$

et donc $y \in \ker(T)^\perp$.

Exercice 10 :

1. On note $\|\alpha\|_\infty = \sup\{|\alpha_n|;\ n \in \mathbb{N}\}$. On a :

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n\geq 0} |\alpha_n|^2 |x_n|^2 \leq \|\alpha\|_\infty^2 \|x\|^2,$$

ce qui prouve que T est continue avec $\|T\| \leq \|\alpha\|_\infty$. Fixons $y \in \ell^2$. $T^*(y)$ est l'unique élément de ℓ^2 défini par :

$$< x, T^*(y) >=< Tx, y > \text{ pour tout } x \in \ell^2.$$

Or,

$$< Tx, y >= \sum_{n\geq 0} \alpha_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n\geq 0} x_n \overline{\overline{\alpha_n} y_n},$$

ce qui prouve que

$$T^*(y) = (\overline{\alpha_n} y_n)_{n\geq 0}\,.$$

2. Il est clair que dans ce cas on a $\|S(x)\| = \|x\|$ (S est une isométrie). D'autre part, si $y \in \ell^2$, et si on note $S^*(y) = (z_n)_{n\geq 0}$, on a :

$$< Sx, y >=< x, S^*y >= \sum_{n\geq 1} x_{n-1}\overline{y_n} = \sum_{n\geq 0} x_n \overline{y_{n+1}}.$$

On doit donc avoir $(S^*y)_n = y_{n+1}$, c'est--dire encore $S^*(y) = (y_1, y_2, \ldots)$.

Exercice 11 :

1. On a :

$$\begin{aligned}
\|Tf\|^2 &= \int_0^1 \left| \int_0^x f(t)dt \right|^2 dx \\
&= \int_0^1 \left| \int_0^x |f(t)| \times 1 dt \right|^2 dx \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|^2 dt \right) x dx \text{ (Cauchy-Schwarz)} \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(t)|^2 dt dx \\
&\leq \|f\|^2,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que T est continue, avec $\|T\| \leq 1$.

2. Toute l'astuce, pour se ramener des intégrales sur $[0, 1]$, consiste à écrire

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(t)1_{[0,x]}(t)dt.$$

On a :

$$\begin{aligned}
< Tf, g > &= \int_0^1 \int_0^1 f(t)1_{[0,x]}(t)g(x)dtdx \\
&= \int_0^1 f(t) \left(\int_0^1 1_{[0,x]}(t)g(x)dx \right) dt \text{ (Fubini)}.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$T^*(g)(t) = \int_0^1 1_{[0,x]}(t)g(x)dx.$$

Cette expression n'est pas tout à fait satisfaisante : on peut la simplifier en remarquant que

$$0 \leq t \leq x \iff t \leq x \leq 1.$$

On a donc :

$$T^*(g)(t) = \int_t^1 g(x)dx.$$

3. Remarquons qu'on a calculé ici l'adjoint en supposant travailler sur l'espace rel $L^2([0, 1])$. Si on travaillait sur l'espace complexe, on obtiendrait

$$T^*(g)(t) = \int_t^1 \overline{g(x)}dx.$$

Exercice 12 :

1. Il suffit d'appliquer l'inégalit de Cauchy-Schwarz. On a en effet :

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n} \right| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2}.$$

Ceci entraîne que ϕ est continue (elle est clairement linéaire) et que $\|\phi\| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2}$.

2. Supposons qu'il existe un tel élément $a = (a_n)$. Appliquant ϕ au k-ième élément de la base canonique de ℓ^2 $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, on obtient $a_k = \frac{1}{k}$ pour $k \geq 1$. Cette suite n'est pas dans E.

3. E n'est pas complet, car la rponse la question précédente va l'encontre du théorème de reprèsentation de Riesz.