Correction de la série 2

Exercice 1 :

1. Sans dtailler les calculs, et en faisant notamment une intégration par parties, on a :

$$\int_{-1}^{0}(1+x)e^{-2i\pi\xi x}dx = \frac{i}{2\pi\xi} + \frac{1}{4\pi^2\xi^2} - \frac{e^{2i\pi\xi}}{4\pi^2\xi^2}.$$

De même, on trouve

$$\int_{0}^{1}(1-x)e^{-2i\pi\xi x}dx = \frac{-i}{2\pi\xi} + \frac{1}{4\pi^2\xi^2} - \frac{e^{-2i\pi\xi}}{4\pi^2\xi^2}.$$

On en déduit :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin^2(\pi\xi)}{\pi^2\xi^2}.$$

Ces calculs ne sont valables que si $\xi \neq 0$. Si $\xi = 0$, on doit calculer $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ ou encore calculer l'aire du triangle. Elle vaut 1 (ce qui est cohérent avec l'expression précédente en faisant tendre ξ vers 0).

2. On sait que la transformée de Fourier-Plancherel est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même. En utilisant cette isométrie (relation de Parseval), on en déduit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4(\pi x)}{\pi^4x^4}dx.$$

Avec le changement de variables $y = \pi x$, et en calculant la première intégrale, on trouve

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}dx = \frac{\pi}{3}.$$

Exercice 2 :

On remarque d'abord que f est bien dfinie pour tout x. En effet, on a

$$\left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}\right| \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}.$$

Cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$, car en 0 elle est équivalente $\frac{1}{\sqrt{t}}$ qui est intégrable (intégrale de Riemann), et, au voisinage de $+\infty$, elle vérifie

$$\left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right| \leq \frac{1}{t^2}.$$

Prouvons également que f est de classe C^1. Pour cela, on remarque que la fonction

$$g:(x,t)\mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}$$

admet en tout point de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport x égale à

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=i\sqrt{t}e^{-t}e^{itx}.$$

De plus, on a, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leq \sqrt{t}e^{-t}$$

et la fonction apparaissant droite dans l'inégalité précédente est intégrable sur $]0,+\infty[$ (elle est continue en 0, et au voisinage de $+\infty$, elle est négligeable devant $1/t^2$). On en déduit par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres que f est dérivable, avec

$$f'(x)=\int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t}e^{itx}.$$

On exprime le membre de droite de cette égalité en fonction de f grâce à une intégration par parties, en posant $v(t)=\sqrt{t}$ et $u(t)=\frac{1}{ix-1}e^{(ix-1)t}$. Puisque $u(0)v(0)=0$ et $\lim_{t\to+\infty}u(t)v(t)=0$, on en déduit

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-i}{2(ix-1)}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}dt\\ &= \frac{-i(-ix-1)}{2(x^2+1)}f(x)\\ &= \frac{-x+i}{2(x^2+1)}f(x). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre cette équation différentielle. On l'écrit sous la forme

$$\frac{f'}{f}=\frac{-x}{2(x^2+1)}+\frac{i}{2(x^2+1)}$$

ce qui donne

$$\ln|f|=\frac{-1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{i}{2}\arctan(x)+K.$$

On en déduit qu'il existe une constante $C\in\mathbb{R}$ telle que

$$f(x)=C(x^2+1)^{-1/4}\exp\left(\frac{i}{2}\arctan x\right).$$

On détermine la valeur de la constante C en calculant $f(0)=C$. On a par ailleurs

$$f(0)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du$$

en effectuant le changement de variables $t=u^2$. Utilisant le rappel, on trouve que $C=\sqrt{\pi}$.

Exercice 3 :

1. En faisant le changement de variable $u = x - t$, on a, grâce l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(x-u)du.$$

Donc $(f * g)(x)$ existe si et seulement si $(g * f)(x)$ existe, et on a l'égalité:

$$(f * g)(x) = (g * f)(x)$$

2. a) D'après l'inégalité de Höder nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t)|dt \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^q dt\right)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q < +\infty$$

cela entraîne que la fonction $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$.
b) D'après la question précédente, on a :

$$\|f * g\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f * g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

.

3. a) Cela résulte du Théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
(\widehat{f * g})(y) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-t)e^{-2\pi i(x-t)y}dx\right) g(t)e^{-2\pi ity}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-2\pi iuy}du\right) g(t)e^{-2\pi ity}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)g(t)e^{-2\pi ity}dt \\
&= \widehat{f}(y)\widehat{g}(y)
\end{aligned}$$

b) Puisque f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$, et que la transformée de Fourier transforme le produit de convolution en produit de fonctions, on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi).$$

Puisque ceci est vrai pour toute fonction de $L^1(\mathbb{R})$ et que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, il existe une fonctions f de $L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f}(\xi) \neq 0$, on a $\hat{g}(\xi) = 1$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Maintenant, on sait que la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ tend vers 0 l'infini. Il n'y a donc aucune fonction g telle que $\hat{g}(\xi) = 1$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

4. On compose une fois encore par la transformée de Fourier. On a :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}r, \hat{f}^2(\xi) = \hat{f}(\xi) \iff \hat{f}(\xi)(1 - \hat{f}(\xi)) = 0.$$

On en déduit que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = 0$ ou 1, mais comme $\hat{f}$ est continue, on a forcément $\hat{f}(\xi) = 1$ pour tout ξ ou $\hat{f}(\xi) = 0$ pour tout ξ. Comme auparavant, le cas identiquement gal 1 est impossible, et donc $\hat{f}(\xi) = 0$ pour tout ξ. Par injectivit de la transformée de Fourier, on en déduit que $f = 0$ presque partout.

Exercice 4 :

1. On a :

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_0^{+\infty} e^{(-\alpha-2i\pi\xi)x}dx + \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-2i\pi\xi)x}dx\\ &= \frac{1}{\alpha+2i\pi\xi} + \frac{1}{\alpha-2i\pi\xi} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2\xi^2}.\end{aligned}$$

2. Pour $\alpha = 2\pi$, $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Cette fonction étant dans L^1, sa transformée de Fourier est $f(-x)$. La transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est donc $x \mapsto \pi \times e^{-2\pi|x|}$.

3. On commence par calculer le produit de convolution. On a :

$$\begin{aligned}f \star f(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha(|x-y|+|y|)}dy\\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha(|x-y|-y)} + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha(|x-y|+y)}dy.\end{aligned}$$

Si $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}f \star f(x) &= \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha(x-2y)}dy + \int_0^x e^{-\alpha x}dy + \int_x^{+\infty} e^{-\alpha(2y-x)}dy\\ &= \frac{e^{-\alpha x}}{2\alpha} + xe^{-\alpha x} + e^{\alpha x}\frac{e^{-2\alpha x}}{2\alpha}\\ &= e^{-\alpha x}\left(x + \frac{1}{\alpha}\right).\end{aligned}$$

La fonction f étant paire, $f \star f$ l'est aussi, et on a donc $f \star f(x) = e^{-\alpha|x|}(|x| + 1/\alpha)$. Maintenant, la transformée de Fourier de cette fonction, pour $\alpha = 2\pi$ est $x \mapsto \frac{1}{\pi^2(1+x^2)^2}$, puisque la transformée de Fourier transforme le produit de convolution de deux fonctions en produit usuel. On applique une fois encore la formule d'inversion de la transformée de Fourier (ce qui est lgitime puisque toutes les fonctions sont intégrables). La transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$ est la fonction $x \mapsto \pi^2 e^{-2\pi|x|}(|x| + 1/2\pi)$.

4. Remarquons que la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est $x \mapsto \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$. En utilisant les formules habituelles sur l'influence de la dérivation sur le produit de convolution, on en déduit :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)(\xi) &= -\frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right)(\xi)\\ &= -\frac{1}{2} \times 2i\pi\xi\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi) = -i\pi^2\xi e^{-2\pi|\xi|}.\end{aligned}$$

Exercice 5 :

On sait que si $f_a(x) = e^{-a\|x\|^2}$, alors on a $\hat{f}_a(x) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-\frac{\pi^2}{a}\|x\|^2}$. Il suffit maintenant d'observer que $q_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} f_{1/4t}(x)$. Il vient :

$$\hat{q}_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\sqrt{4\pi t}e^{-4\pi^2 tx} = e^{-4\pi^2 tx^2}.$$

D'autre part, on a :

$$\mathcal{F}(q_t \star q_s)(x) = \hat{q}_t\hat{q}_s(x) = e^{-4\pi^2(s+t)x^2} = \mathcal{F}\left(q_{s+t}\right)(x).$$

Par injectivité de la transformée de Fourier, on en déduit que $q_t \star q_s = q_{s+t}$.

Exercice 6 :

Prouvons d'abord que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Puisque $\hat{f}$ est continue, $\hat{f}$ est bornée sur $[-1,1]$ ce qui justifie la convergence de $\int_{-1}^{1} |\hat{f}(\xi)|d\xi$. D'autre part, si $|\xi| \geq 1$, on a $|\hat{f}(\xi)| \leq |\xi\hat{f}(\xi)|$, ce qui prouve la convergence de $\int_{1}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|d\xi$ ainsi que celle de $\int_{-\infty}^{-1} |\hat{f}(\xi)|d\xi$. Maintenant, d'après la formule d'inversion de la transformée de Fourier, f est égale presque partout la fonction

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2i\pi\xi x}d\xi.$$

Mais il est clair que cette fonction g est de classe C^1 (ou bien parce qu'il s'agit de la transformée de Fourier conjuguée d'une fonction h tel que $x \mapsto xh(x)$ est intégrable, ou bien en dérivant directement sous le signe intégrale)

Exercice 7 :

1. En coupant l'intégrale en deux (intégrale entre $-\infty$ et 0 et intégrale entre 0 et $+\infty$), on calcule facilement cette transformée de Fourier et on trouve que

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}.$$

   ¡li¿ Il est clair que cette équation peut aussi s'écrire $u = f + \beta u \star f$. ¡li¿ On suppose qu'il existe une solution u intégrable. En appliquant la transformée de Fourier, on vérifie que $\hat{u}$ vérifie :

$$\hat{u} = \frac{\hat{f}}{1-\beta\hat{f}} = \frac{2}{(1-2\beta)+4\pi^2\xi^2},$$

   o on a utilisé le résultat de la première question. Dans le cas o $\beta \geq 1/2$, ceci définit une fonction qui n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle n'est même pas définie en un point. L'équation n'admet donc pas de solution.

2. Supposons $\beta \in]0,1/2[$. Si l'équation admet une solution u, la question précédente nous donne une forme unique pour $\hat{u}$. Par injectivité de la transformée de Fourier, l'équation admet au plus une solution. Réciproquement, posons

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2\beta}}e^{-\sqrt{1-2\beta}|x|}$$

   (formule qui vient en inversant la transformée de Fourier). Alors on vérifie que

$$\hat{u} = \mathcal{F}(f + \beta u \star f) = \frac{2}{(1-2\beta)+4\pi^2\xi^2}$$

   et donc, par injectivité de la transformée de Fourier toujours, que u est solution de l'équation.

Exercice 8 :

1. On a :

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\xi x}1_{[a,b](x)}dx = \int_a^b e^{-i2\pi\xi x}dx \\ &= \begin{cases} \dfrac{e^{-2ib\pi\xi}-e^{-2ia\pi\xi}}{-2i\pi\xi} & \text{si } a\neq b \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

2. C'est un résultat bien connu que θ est telle que $\int_0^x \theta(t)dt$ admet une limite quand $x\to+\infty$, sans que θ n'appartienne $L^1(\mathbb{R})$. Pour le prouver, on peut par exemple utiliser

$$\frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{\sin^2 t}{t} \geq \frac{1}{2t} - \frac{\cos 2t}{2t}.$$

On conclut car $\int_1^x \frac{1}{2t}dt$ tend vers l'infini, alors que $\int_1^x \frac{\cos 2t}{2t}dt$ converge si $x\to+\infty$. En revanche, il est clair que θ appartient L^2 (précisons simplement qu'il n'y a aucun problème de convergence en 0 où la fonction est prolongée par continuité en posant $\theta(0)=1$). Il est donc légitime de calculer la transformée de Fourier-Plancherel de θ. Il est difficile de calculer directement cette transformée. Mais remarquons que, si $f(x)=1_{[-1/2\pi,1/2\pi]}(x)$, la question précédente nous donne

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi}\theta(\xi).$$

On utilise la transformée de Fourier conjuguée, et on obtient :

$$\hat{\theta}(x) = \pi f(-x) = \pi 1_{[-1/2\pi,1/2\pi]}(x).$$

Exercice 9 :

1. Il s'agit du produit de convolution de deux fonctions de L^2.

2. Attention, ceci n'est plus conséquence des résultats classiques sur le produit de convolution. Simplement, puisque $\sin x/\pi x$ et f sont éléments de $L^2(\mathbb{R})$, il existe g et h éléments de $L^2(\mathbb{R})$ tels que $\sin x/\pi x = \mathcal{F}(h)$ et $f=\mathcal{F}(g)$. On a alors :

$$Pf = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin x}{x}\right) \star f = \mathcal{F}(g)\star\mathcal{F}(h) = \widehat{gh}.$$

Il reste remarquer que la fonction h est l'indicatrice du segment $[-1/2\pi, 1/2\pi]$. Elle est bornée et donc $gh\in L^2(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$. Par coïncidence de la transformée de Fourier et de la transformée de Fourier-Plancherel sur ces deux espaces, on en déduit que $\mathcal{F}(gh)\in L^2(\mathbb{R})$.

3. Soit $f\in L^2(\mathbb{R})$ qu'on écrit $f=\mathcal{F}(g)$. On a :

$$\begin{aligned}\|Pf\|_2 &= \frac{1}{\pi}\|\mathcal{F}(gh)\|_2 \\ &= \|gh\|_2 \\ &\leq \|g\|_2 = \|f\|_2.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} P \circ P(f) &= P(\mathcal{F}(gh)) \\ &= \mathcal{F}(gh^2). \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que $gh^2 = gh$.