Royaume du Maroc
Université Mohammed Premier
Faculté Pluridisciplinaire de Nador
Département de Physique.

Filière SMP- Semestre S4
2014-2020

Fascicule

Travaux Dirigés et Examens

Module Optique II

Responsable : Pr. Abdelkader DOUDOU

Exercice 1

Le champ électrique d'une onde lumineuse monochromatique, se propageant dans le vide, est donné par :

$$\vec{E}(x,y,z,t) = a\cos\left(3\pi.10^6\left(3.10^8 t - x\right)\right)\vec{e}_z$$

Déterminer pour cette onde :

1) La pulsation, la fréquence, la période (les résultats au centième près), la longueur d'onde et le nombre d'onde.
2) Les cosinus directeurs du vecteur unitaire dans la direction de propagation.
3) Les composantes du vecteur d'onde.
4) La nature de sa polarisation et justifier votre réponse.

Exercice 2

On considère trois vibrations lumineuses dont les champs électriques sont :

$$\begin{cases} S_1 = a\cos(\omega t + \varphi) \\ S_2 = a\cos(\omega t) \\ S_3 = a\cos(\omega t - \varphi) \end{cases}$$

1) Calculer l'intensité résultante en utilisant les méthodes : trigonométrique, de Fresnel et complexe.
2).Calculer par la méthode complexe l'intensité résultante lorsque l'on compose N vibrations de même amplitude a et dont les phases sont en progression arithmétique de raison ($-\varphi$).

Exercice 3

Deux ondes harmoniques planes linéairement polarisées ont la forme suivante :

$$\begin{cases} \vec{E}_1(z,t) = E_{10x}\cos(\omega t - kz)\vec{i} + E_{10y}\cos(\omega t - kz)\vec{j} \\ \vec{E}_2(z,t) = E_{20x}\cos(\omega t - kz)\vec{i} + E_{20y}\cos(\omega t - kz)\vec{j} \end{cases}$$

1) Montrer que leur résultante est aussi polarisée linéairement.
2)On considère $\vec{E}$ comme la somme de deux champs électriques perpendiculaires qui se propagent suivant la direction normale au plan qu'ils forment.

$$\vec{E} = A_1\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\vec{u}_x + A_2\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \varphi)\vec{u}_y$$

$\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ étant deux vecteurs unitaires orthogonaux. Dans le plan, $\vec{E}$ est représenté par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de composantes :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} E_1 = A_1\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \\ E_2 = A_2\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \varphi) \end{cases}$$

2a) Montrer que dans le cas général le point M décrit une ellipse. Donner son équation.
2b) Déterminer en fonction du retard de phase φ la nature de la polarisation.

Exercice 4

On considère dans le vide (en absence de charge et de courant) deux ondes électromagnétiques S_1 et S_2, planes, uniformes, polarisées rectilignement, se propagent dans deux direction différentes du plan xOy dont les vecteurs unitaires sont $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ respectivement. Les vecteurs unitaires $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe Ox et on pose $(\widehat{Ox,\vec{u}_1}) = \theta$. Au point M ($\overrightarrow{OM} = \vec{r}$) de coordonnées (x,y,z), les champs électriques de ces ondes ont respectivement pour composantes.

$$\begin{cases} \vec{E}_1(M,t) = \left(E_{1x} = 0, E_{1y} = 0, E_{1z} = E_0\cos(\omega t - \vec{k}_1\cdot\vec{r})\right) \\ \vec{E}_2(M,t) = \left(E_{2x} = 0, E_{2y} = 0, E_{2z} = E_0\cos(\omega t - \vec{k}_2\cdot\vec{r})\right) \end{cases}$$

1) Déterminer les composantes.
1a) du vecteur d'ondes $\vec{k}_1$ et du champ magnétique $\vec{B}_1$ de l'onde S_1.
1b) du vecteur d'onde $\vec{k}_2$ et du champ magnétique $\vec{B}_2$ de l'onde S_2.

On posera : $k\cos\theta = \alpha$, $k\sin\theta = \beta$, k étant le module des vecteurs d'onde $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$.

2) 2a) Calculer les composantes du champ électrique $\vec{\varepsilon}$ résultant de la superposition de S_1 et S_2 (les mettre sous la forme de produits de deux fonctions périodiques).
2b) Décrire cette onde (planéité, direction et sens de propagation, uniformité). Trouver les surfaces d'égale valeur moyenne, $\overline{\varepsilon}^2$, dans le temps, du carré du module du champ $\vec{\varepsilon}$.
2c) La fréquence se trouve dans le domaine visible. L'œil étant sensible à $\overline{\varepsilon}^2$, décrire les franges d'interférences que l'on pourrait observer dans un plan perpendiculaire et donner l'expression de l'interfrange i en fonction de θ et λ..

Solution

Module Optique II
Filière SMP-S4 – TD - série n° 1
Généralités

Exercice 1

1°) La pulsation, la fréquence et la période, la longueur d'onde et le nombre d'onde.

$$\vec{E}(x,y,z,t) = a\cos\left(3\pi.10^6\left(3.10^8 t - x\right)\right)\vec{e}_z = A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})\vec{e}_z = A\cos(\omega t - \varphi)\vec{e}_z$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega = 9\pi.10^{14}\, rad/s, \\ \omega = 2\pi\nu \Rightarrow \nu = \dfrac{\omega}{2\pi} \Rightarrow A.N.\ \nu = \dfrac{9\pi.10^{14}}{2\pi} = 0,45.10^{15}\, Hz \\ T = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{1}{0,45.10^{15}} \approx 2,22.10^{-15}\, s \end{array}}$$

La longueur d'onde dans le vite ou la vitesse de la lumière est 3 10^8.

$$\lambda_0 = cT \Rightarrow A.N.\ \lambda_0 = cT = 3.10^8 x 2,22.10^{-15} = 0,666.10^{-6}\ m;\ \lambda_0 = 0,666\,\mu m$$

La longueur d'onde du rouge.

Le nombre d'onde est :

$$\varphi = \vec{k}.\vec{r} \Rightarrow \left|\vec{k}\right| = \frac{2\pi}{\lambda_0} = 2\pi\sigma$$

$$\sigma = \frac{1}{\lambda_0} \Rightarrow A.N.\ \sigma = \frac{1}{0,666.10^{-6}} \approx 1,50.10^6\, m^{-1}$$

2°) Les cosinus directeurs du vecteur unitaire dans la direction de propagation.

$$\varphi = \vec{k}.\vec{r} \Rightarrow \vec{k} = \left|\vec{k}\right|\vec{u} = k\vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$\varphi = \vec{k}.\vec{r} = \left|\vec{k}\right|\vec{u}.\vec{r} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(\alpha x + \beta y + \gamma z) \Rightarrow \varphi = \vec{k}.\vec{r} = \left|\vec{k}\right|\vec{u}.\vec{r} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\alpha x, \beta = \gamma = 0$$

A.N.

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\alpha x \Rightarrow A.N.\ \varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\alpha x = 3\pi 10^6 x \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi 10^6}{2\pi}\lambda_0 = \frac{3}{2}10^6 x 0,666.10^{-6} = \frac{1,998}{2} = 0,999 \approx 1$$

Les cosinus directeurs

$$\vec{u} = (\alpha,\beta,\gamma) = (1,0,0)$$

3°) Les composantes du vecteur d'onde.

$$\vec{k} = \left|\vec{k}\right|\vec{u} = k\vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(\alpha,\beta,\gamma) = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0},0,0\right)$$

La propagation se fait dans la direction Ox.

4°) La nature de sa polarisation et justifier votre réponse.

$$\vec{E}(x,y,z,t) = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z = a\cos\left(3\pi.10^6\left(3.10^8 t - x\right)\right)\vec{e}_z$$

Le champ électrique à une direction fixe, la polarisation est donc rectiligne et elle est toujours dans la direction Oz.

Exercice 2

1) Méthode trigonométrique :

$$S = \sum_{i=1}^{3} S_i = a_1\cos(\omega t + \varphi) + a_2\cos(\omega t) + a_3\cos(\omega t - \varphi)$$

$$S = a_1\cos(\omega t)\cos\varphi - a_1\sin(\omega t)\sin\varphi + a_2\cos(\omega t) + a_3\cos(\omega t)\cos\varphi + a_3\sin(\omega t)\sin\varphi$$

$$S = \left(a_2 + (a_1 + a_3)\cos\varphi\right)\cos(\omega t) + (a_3 - a_1)\sin\varphi\sin(\omega t)$$

Si on prend le cas ou $\boldsymbol{a_1 = a_2 = a_3 = a}$, on aura

$$S = \left(a_2 + \left(a_1 + a_3\right)\cos\varphi\right)\cos(\omega t) + \left(a_3 - a_1\right)\sin\varphi\sin(\omega t)$$

$$S = \left(a + 2a\cos\varphi\right)\cos(\omega t) = a\left(1 + 2\cos\varphi\right)\cos(\omega t) = A\cos(\omega t)$$

L'intensité résultante sera :

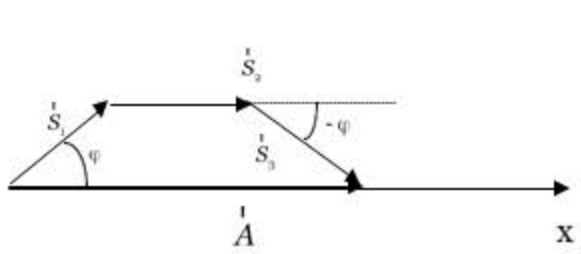
$$A = a\left(1 + 2\cos\varphi\right)$$

Et de A l'intensité de l'onde résultante :

$$I = A^2 = a^2\left(1 + 2\cos\varphi\right)^2$$

<u>Méthode de Fresnel :</u>

On pose t=0, pour la construction de Fresnel.



$$\vec{S}_1 \begin{cases} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \end{cases} \qquad \vec{S}_2 \begin{cases} a \\ 0 \end{cases} \qquad \text{et } \vec{S}_3 \begin{cases} a\cos\varphi \\ -a\sin\varphi \end{cases}$$

Le vecteur résultant est :

$$\vec{A} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 = \begin{cases} 1 + 2a\cos\varphi \\ 0 \end{cases}$$

Et l'intensité de l'onde résultante :

$$I = \left|\vec{A}\right|^2 = a^2\left(1 + 2\cos\varphi\right)^2 = a^2\left(1 - 4\cos\varphi + 4\cos^2\varphi\right)$$

<u>Méthode Complexe:</u>

$$\begin{cases} S_1 \Rightarrow z_1 = a_1 e^{j(\omega t + \varphi)} \\ S_2 \Rightarrow z_2 = a_2 e^{j(\omega t)} \\ S_3 \Rightarrow z_3 = a_3 e^{j(\omega t - \varphi)} \end{cases}$$

$$z = \sum_{i=1}^{3} z_i = \boldsymbol{a_1} e^{j(\omega t + \varphi)} + \boldsymbol{a_2} e^{j(\omega t)} + \boldsymbol{a_3} e^{j(\omega t - \varphi)} = \left(\boldsymbol{a_1} e^{j\varphi} + \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3} e^{-j\varphi}\right) e^{j(\omega t)}$$

Comme $\boldsymbol{a_1 = a_2 = a_3 = a}$:

$$z = \boldsymbol{a}\left(1 + e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}\right) e^{j(\omega t)} = z_0 e^{j(\omega t)}$$

Alors

$$z_0 = 1 + e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} = 1 + 2\cos\varphi$$

Alors l'intensité est :

$$I = zz^* = |z|^2 = |z_0|^2 = a^2\left(1 + 2\cos\varphi\right)^2$$

2)

$$\begin{cases} z_1 = a_1 e^{j(\omega t)} \\ z_2 = a_2 e^{j(\omega t - \varphi)} \\ z_3 = a e^{j(\omega t - 2\varphi)} \\ . \\ . \\ . \\ z_N = a e^{j(\omega t - (N-1)\varphi)} \end{cases}$$

$$z = \sum_{i=1}^{N} z_i = \boldsymbol{a} e^{j(\omega t)} + \boldsymbol{a} e^{j(\omega t - \varphi)} + \boldsymbol{a} e^{j(\omega t - 2\varphi)} + \ldots\ldots\ldots + \boldsymbol{a} e^{j(\omega t - (N-1)\varphi)}$$

$$z = \boldsymbol{a} e^{j(\omega t)} + \boldsymbol{a} e^{j(\omega t - \varphi)} + \boldsymbol{a} e^{j(\omega t - 2\varphi)} + \ldots\ldots\ldots + \boldsymbol{a} e^{j(\omega t - (N-1)\varphi)}$$

$$z = \boldsymbol{a} e^{j(\omega t)} \left(1 + e^{-j\varphi} + \boldsymbol{a} e^{-2j\varphi} + \ldots\ldots\ldots + \boldsymbol{a} e^{-j(N-1)\varphi}\right)$$

$$z = \boldsymbol{a} \left(\frac{1 - e^{-jN\varphi}}{1 - e^{-j\varphi}}\right) e^{j(\omega t)} = z_0 e^{j(\omega t)}$$

$$z = \boldsymbol{a} \left(\frac{1 - e^{-jN\varphi}}{1 - e^{-j\varphi}}\right) e^{j(\omega t)} = \boldsymbol{a} \left(\frac{e^{+j\frac{N\varphi}{2}} - e^{-j\frac{N\varphi}{2}}}{e^{+j\frac{\varphi}{2}} - e^{-j\frac{\varphi}{2}}}\right) \frac{e^{+j\frac{\varphi}{2}}}{e^{+j\frac{N\varphi}{2}}} e^{j(\omega t)} = \boldsymbol{a} \left(\frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right) e^{-j(N-1)\frac{\varphi}{2}} e^{j(\omega t)} = z_0 e^{j(\omega t)}$$

$$z_0 = \boldsymbol{a} \left(\frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right) e^{-j(N-1)\frac{\varphi}{2}}$$

L'intensité de l'onde résultante est :

$$I = zz^* = |z|^2 = |z_0|^2 = \boldsymbol{a}^2 \frac{\sin^2\frac{N\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \boldsymbol{a}^2 \frac{1 - \cos N\varphi}{1 - \cos\varphi}$$

En appliquant
$$\boxed{\begin{aligned} \cos\varphi &= \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \\ \cos N\varphi &= \cos^2\frac{N\varphi}{2} - \sin^2\frac{N\varphi}{2} = 2\cos^2\frac{N\varphi}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{N\varphi}{2} \end{aligned}}$$

Exercice 3

On a deux ondes harmoniques planes linéairement:

Pour la première onde on a :

$$\vec{E}_1(z,t) = \begin{cases} E_{1x} = E_{10x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{1y} = E_{10y} \cos(\omega t - kz) \end{cases}$$

$$\vec{E}_1(z,t) = \left(E_{10x}\vec{i} + E_{10y}\vec{j}\right)\cos(\omega t - kz) = E_{1x}\vec{i} + E_{1y}\vec{j}$$

Pour la deuxième onde on a :

$$\vec{E}_2(z,t) = \begin{cases} E_{2x} = E_{20y} \cos(\omega t - kz) \\ E_{2y} = E_{20y} \cos(\omega t - kz) \end{cases}$$

$$\vec{E}_2(z,t) = \left(E_{20x}\vec{i} + E_{20y}\vec{j}\right)\cos(\omega t - kz) = E_{2x}\vec{i} + E_{2y}\vec{j}$$

Les deux ondes satisfont aux relations :

$$\begin{cases} \dfrac{E_{1x}}{E_{10x}} - \dfrac{E_{1y}}{E_{10y}} = 0 \\ \dfrac{E_{2x}}{E_{20x}} - \dfrac{E_{2y}}{E_{20y}} = 0 \end{cases}$$

Les champs électriques des deux ondes décrivent des segments de droites : la polarisation est linéaire dans les deux cas.

L'onde résultante :

$$\vec{E} = \vec{E}_1(z,t) + \vec{E}_2(z,t) = \begin{cases} E_x = (E_{10x} + E_{20x})\cos(\omega t - kz) \\ E_y = (E_{10y} + E_{20y})\cos(\omega t - kz) \end{cases}$$

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_1(z,t) + \vec{E}_2(z,t) = \left((E_{10x} + E_{20x})\vec{i} + (E_{10y} + E_{20y})\vec{j}\right)\cos(\omega t - kz) = \left(E_{0x}\vec{i} + E_{0y}\vec{j}\right)\cos(\omega t - kz) = E_x\vec{i} + E_y\vec{j}$$

L'on de résultante satisfait elle aussi à la relation :

$$\frac{E_x}{E_{0x}} - \frac{E_y}{E_{0y}} = 0$$

Le champ électrique de l'onde résultante décrit un segment de droite : la polarisation est linéaire.

2°) On a

$$\vec{OM} = \vec{E} = \begin{cases} E_1 = A_1\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \\ E_2 = A_2\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \varphi) \end{cases}$$

Ce qui peut être développé de la manière suivante :

$$\vec{OM} = \vec{E} = \begin{cases} E_1 = A_1\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \\ E_2 = A_2\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \varphi) = A_2\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\cos\varphi + A_2\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\sin\varphi \end{cases}$$

Ensuite, on divise les composantes par les amplitudes :

$$\begin{cases} \dfrac{E_1}{A_1} = \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \\ \dfrac{E_2}{A_2} = \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\cos\varphi + \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\sin\varphi \end{cases}$$

Dans la suite on pose $\tau = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}$ et on remplace dans l'équation ci-dessous :

$$\begin{cases} \dfrac{E_1}{A_1} = \cos\tau \\ \dfrac{E_2}{A_2} = \dfrac{E_1}{A_1}\cos\varphi + \sin\tau\sin\varphi \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} \dfrac{E_1}{A_1} = \cos\tau \\ \dfrac{E_2}{A_2} - \dfrac{E_1}{A_1}\cos\varphi = \sin\tau\sin\varphi \end{cases}$$

Par la suite on va les élevées au carré :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{E_1}{A_1}\right)^2 = \cos^2\tau \\ \left(\dfrac{E_2}{A_2} - \dfrac{E_1}{A_1}\cos\varphi\right)^2 = \sin^2\tau\sin^2\varphi = (1 - \cos^2\tau)\sin^2\varphi \end{cases}$$

Puis

$$\left(\frac{E_2}{A_2} - \frac{E_1}{A_1}\cos\varphi\right)^2 = (1 - \cos^2\tau)\sin^2\varphi = \left(1 - \left(\frac{E_1}{A_1}\right)^2\right)\sin^2\varphi$$

$$\left(\frac{E_2}{A_2} - \frac{E_1}{A_1}\cos\varphi\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{E_1}{A_1}\right)^2\right)\sin^2\varphi$$

$$\left(\frac{E_2}{A_2}\right)^2+\left(\frac{E_1}{A_1}\right)^2\cos^2\varphi-2\left(\frac{E_2}{A_2}\right)\left(\frac{E_1}{A_1}\right)\cos\varphi=\sin^2\varphi-\left(\frac{E_1}{A_1}\right)^2\sin^2\varphi$$

$$\left(\frac{E_2}{A_2}\right)^2+\left(\frac{E_1}{A_1}\right)^2-2\left(\frac{E_2}{A_2}\right)\left(\frac{E_1}{A_1}\right)\cos\varphi=\sin^2\varphi \quad (1)$$

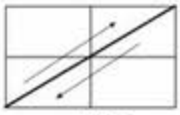
C'est l'équation d'une ellipse dont les axes ne sont pas un vertical et l'autre horizontal.

Discussion de la nature de la polarisation :

Polarisation rectiligne :

Si $\begin{cases}\cos\varphi=\pm1\\ \sin\varphi=0\end{cases} \Leftrightarrow \varphi=2k\pi \text{ ou } (2k+1)\pi$

Dans ce cas l'équation (1) devient :



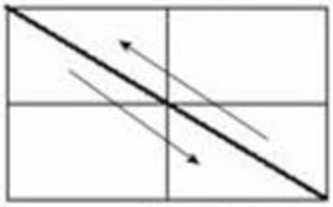
$\varphi=2k\pi$

$$\left(\frac{E_2}{A_2}\right)^2+\left(\frac{E_1}{A_1}\right)^2\pm2\left(\frac{E_2}{A_2}\right)\left(\frac{E_1}{A_1}\right)=0$$

$$\left(\frac{E_2}{A_2}\pm\frac{E_1}{A_1}\right)^2=0 \Leftrightarrow \frac{E_2}{A_2}=\pm\frac{E_1}{A_1}$$

$$\frac{E_2}{A_2}=+\frac{E_1}{A_1}$$

$$\vec{E}=\begin{cases}E_1=A_1\cos(\tau)\\ E_2=A_2\cos(\tau-\varphi)=A_2\cos(\tau-2\kappa\pi)=A_2\cos(\tau)\end{cases}$$ polarisation droite



$\varphi=(2k+1)\pi$

$$\frac{E_2}{A_2}=-\frac{E_1}{A_1}$$

$$\vec{E}=\begin{cases}E_1=A_1\cos(\tau)\\ E_2=A_2\cos(\tau-\varphi)=A_2\cos(\tau-(2\kappa+1)\pi)=A_2\cos(\tau-\pi)\end{cases}$$ polarisation gauche

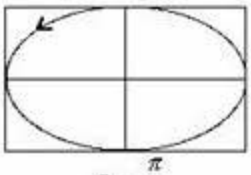
Polarisation circulaire:

Si $\begin{cases}\cos\varphi=0\\ \sin\varphi=\pm1\end{cases} \Leftrightarrow \varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$

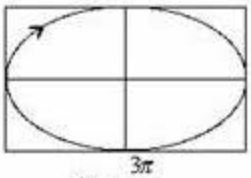
Dans ce cas l'équation (1) devient :

$$\left(\frac{E_2}{A_2}\right)^2+\left(\frac{E_1}{A_1}\right)^2=1$$

L'équation d'une ellipse dont les axes sont vertical et horizontal :



$\varphi=\frac{\pi}{2}$ elliptique gauche et



$\varphi=\frac{3\pi}{2}$ elliptique droite

Dans le cas ou $A_1=A_2$, la polarisation devient circulaire.

Sens de la polarisation :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_1 = A_1 \cos(\tau) \\ E_2 = A_2 \cos(\tau - \varphi) = A_2 \cos(\tau - \frac{\pi}{2}) \end{cases} \text{ polarisation gauche}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} E_1 = A_1 \cos(\tau) \\ E_2 = A_2 \cos(\tau - \varphi) = A_2 \cos(\tau - \frac{3\pi}{2}) = A_2 \cos(\tau - (2\pi - \frac{\pi}{2})) = A_2 \cos(\tau - (-\frac{\pi}{2})) \end{cases} \text{ polarisation droite}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} E_1 = A_1 \cos(\omega t) \\ E_2 = A_2 \cos(\omega t - \varphi) \end{cases}$$ et la dérivée de E_2 par rapport au temps, $\frac{dE_2}{dt} = -A_2 \omega \sin(\omega t - \varphi)$

À t=0 ; on a $\vec{E} = \begin{cases} E_1 = 0 \\ E_2 = A_2 \cos(-\varphi) = A_2 \cos(\varphi) \end{cases}$ et $\frac{dE_2}{dt} = -A_2 \omega \sin(-\varphi) = A_2 \omega \sin(\varphi)$

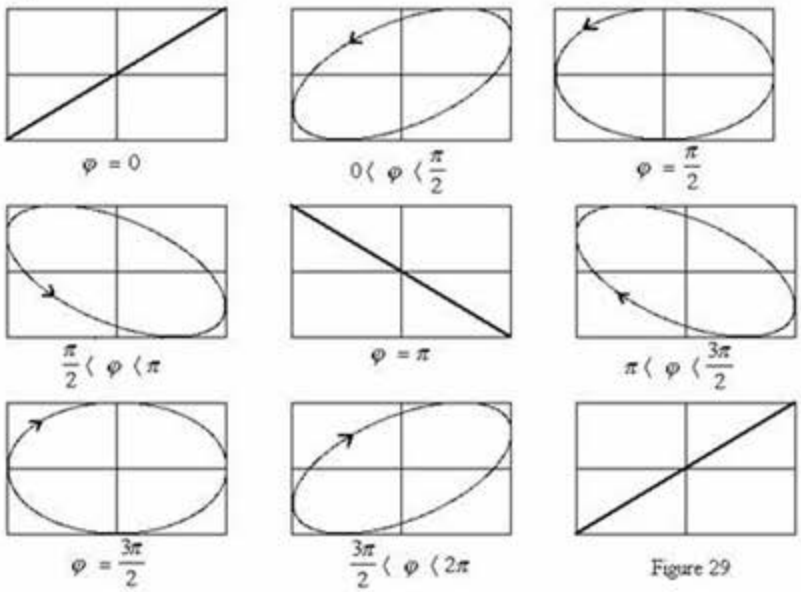


Figure 29

Si $\frac{dE_2}{dt} > 0; \sin(\varphi) > 0 \Leftrightarrow 0 < \varphi < \pi$, E_2 est croissant et donc **<u>la polarisation est gauche</u>**.

Si $\frac{dE_2}{dt} < 0; \sin(\varphi) < 0 \Leftrightarrow \pi < \varphi < 2\pi$, E_2 est décroissant et donc **<u>la polarisation est droite</u>**.

Dans la figure suivante sont résumés tous les types de polarisation

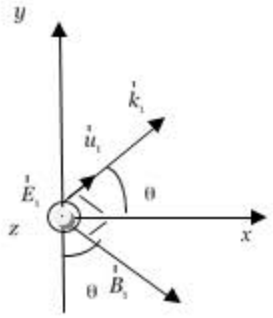
- La polarisation linéaire droite $\varphi = 0$, gauche $\varphi = \pi$ et droite $\varphi = 2\pi$
- La polarisation elliptique gauche $0 < \varphi < \pi$ ou droite $\pi < \varphi < 2\pi$

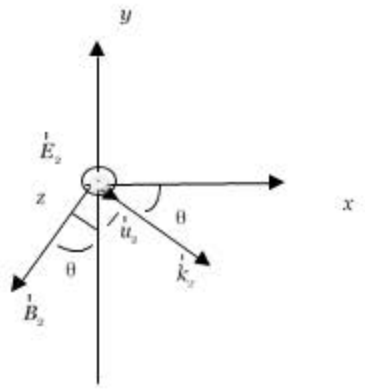
<u>Exercice 4</u>

<u>Deux ondes planes polarisées rectilignement</u>

$$\vec{E}_1(M,t) = \begin{cases} E_{1x} = 0 \\ E_{1y} = 0 \\ E_{1z} = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{E}_2(M,t) = \begin{cases} E_{2x} = 0 \\ E_{2y} = 0 \\ E_{2z} = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r}) \end{cases}$$

1) on pose $k = |\vec{k}_1| = |\vec{k}_2|$ et on a $k \cos\theta = \alpha$ et $k \sin\theta = \beta$:





Une onde plane forme un trièdre direct $(\vec{E}_i, \vec{B}_i, \vec{k}_i)$

Les composantes de $\vec{r} = \begin{cases} x \\ y \\ 0 \end{cases}$

Pour l'onde S1, on a :

$$\vec{k}_1 = \begin{cases} k_{1x} = k\cos\theta = \alpha \\ k_{1y} = k\sin\theta = \beta \\ k_{1z} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} E_{1x} = 0 \\ E_{1y} = 0 \\ E_{1z} = E_0\cos(\omega t - \vec{k}_1\vec{r}) = E_0\cos(\omega t - \alpha x - \beta y) \end{cases}$$

$$\vec{B}_1 = \begin{cases} B_{1x} = \left|\vec{B}_1\right|\sin\theta = B_1\sin\theta \\ B_{1y} = -\left|\vec{B}_1\right|\cos\theta = -B_1\cos\theta \\ B_{1z} = 0 \end{cases}$$

Pour l'onde S2, on a :

Comme les vecteurs unitaires $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont symétriques par rapport à l'axe Ox, il suffit de changer θ par $(-\theta)$ dans $\vec{k}_1$ et $\vec{B}_1$ pour trouver $\vec{k}_2$ et $\vec{B}_2$, c.-à-d., $(Ox, \vec{u}_2) = -\theta$.

$$\vec{k}_2 = \begin{cases} k_{2x} = k\cos\theta = \alpha \\ k_{2y} = -k\sin\theta = -\beta \\ k_{2z} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} E_{2x} = 0 \\ E_{2y} = 0 \\ E_{2z} = E_0\cos(\omega t - \vec{k}_2\vec{r}) = E_0\cos(\omega t - \alpha x + \beta y) \end{cases}$$

$$\vec{B}_2 = \begin{cases} B_{2x} = -\left|\vec{B}_2\right|\sin\theta = -B_2\sin\theta \\ B_{2y} = -\left|\vec{B}_2\right|\cos\theta = -B_2\cos\theta \\ B_{2z} = 0 \end{cases}$$

Pour les ondes planes on a la relation suivante (voir le cours) :

$$\left|\vec{E}\right| = c\left|\vec{B}\right| \Leftrightarrow \left|\vec{B}\right| = \frac{1}{c}\left|\vec{E}\right|$$

Dans ce cas on a :

$$\Rightarrow B_i = \frac{1}{c}E_i = \frac{1}{c}E_{iz}$$

$$\vec{B}_1 = \begin{cases} B_{1x} = \left|\vec{B}_1\right|\sin\theta = B_1\sin\theta = \frac{1}{c}E_1\sin\theta = \frac{1}{c}E_{1z}\sin\theta \\ B_{1y} = -\left|\vec{B}_1\right|\cos\theta = -B_1\cos\theta = -\frac{1}{c}E_1\cos\theta = -\frac{1}{c}E_{1z}\cos\theta \\ B_{1z} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{B}_2 = \begin{cases} B_{2x} = -\left|\vec{B}_2\right|\sin\theta = -B_2\sin\theta = -\frac{1}{c}E_2\sin\theta = -\frac{1}{c}E_{2z}\sin\theta \\ B_{2y} = -\left|\vec{B}_2\right|\cos\theta = -B_2\cos\theta = -\frac{1}{c}E_2\cos\theta = -\frac{1}{c}E_{2z}\cos\theta \\ B_{2z} = 0 \end{cases}$$

Après

$$E_{1z} = E_0\cos(\omega t - \vec{k}_1\vec{r}) = E_0\cos(\omega t - \alpha x - \beta y)$$

$$\vec{B}_1 = \begin{cases} B_{1x} = \frac{1}{c}E_{1z}\sin\theta = \frac{E_0}{c}\sin\theta\cos(\omega t - \alpha x - \beta y) \\ B_{1y} = -\frac{1}{c}E_{1z}\cos\theta = -\frac{E_0}{c}\cos\theta\cos(\omega t - \alpha x - \beta y) \\ B_{1z} = 0 \end{cases}$$

$$E_{2z} = E_0\cos(\omega t - \vec{k}_2\vec{r}) = E_0\cos(\omega t - \alpha x + \beta y)$$

$$\vec{B}_2 = \begin{cases} B_{2x} = -\frac{1}{c}E_{2z}\sin\theta = -\frac{E_0}{c}\sin\theta\cos(\omega t - \alpha x + \beta y) \\ B_{2y} = -\frac{1}{c}E_{2z}\cos\theta = -\frac{E_0}{c}\cos\theta\cos(\omega t - \alpha x + \beta y) \\ B_{2z} = 0 \end{cases}$$

2)

2a) La résultantes des deux ondes S1 et S2

$$\vec{\varepsilon}(M,t) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (E_{1z} + E_{2z})\vec{z}$$

$\vec{z}$ est le vecteur unitaire dans la direction Oz.

$$\vec{\varepsilon}(M,t) = E_0\left(\cos(\omega t - \vec{k}_1\vec{r}) + \cos(\omega t - \vec{k}_2\vec{r})\right)\vec{z}$$

$$\vec{\varepsilon}(M,t) = E_0\left(\cos(\omega t - \alpha x - \beta y) + \cos(\omega t - \alpha x + \beta y)\right)\vec{z}$$

$$\vec{\varepsilon}(M,t) = 2E_0\cos(\beta y)\cos(\omega t - \alpha x)\vec{z} = \varepsilon_0\cos(\omega t - \alpha x)\vec{z}$$

L'amplitude résultante est donc :

$$\boxed{\varepsilon_0 = 2E_0\cos(\beta y)}$$

2b) caractéristique de l'onde résultante :

$\vec{\varepsilon}(M,t)$ est une fonction d'onde plane, et il a une direction fixe (celle de Oz) ; donc la polarisation est rectiligne.

$\omega t - \alpha x = \omega t - \vec{k}\vec{r} \Leftrightarrow \vec{k}(\alpha,0,0)$,le vecteur d'onde $\vec{k}$ est porté par l'axe Ox, ce qui implique la propagation de l'onde se fait selon l'axe Ox.

L'amplitude de l'onde résultante $\varepsilon_0 = 2E_0\cos(\beta y)$ dépend de y; donc elle varie dans l'espace, ce qui implique que $\vec{\varepsilon}(M,t)$ n'est pas uniforme.

$$\varepsilon^2 = 4E_0^2\cos^2(\beta y)\cos^2(\omega t - \alpha x)$$

Donc la moyenne est :

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{2}{T}\int_0^T \varepsilon^2 dt \text{ par définition de la moyenne}$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{2}{T}\int_0^T \left(4E_0^2\cos^2(\beta y)\cos^2(\omega t - \alpha x)\right)dt = 4E_0^2\cos^2(\beta y)\left(\frac{2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - \alpha x)dt\right)$$

$$\overline{\varepsilon^2} = 4E_0^2\cos^2(\beta y)\left(\frac{2}{T}\int_0^T \frac{1+\cos(2\omega t - 2\alpha x)}{2}dt\right) = 4E_0^2\cos^2(\beta y)\left(\frac{2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}dt + \frac{2}{T}\int_0^T \frac{\cos(2\omega t - 2\alpha x)}{2}dt\right)$$

$$\overline{\varepsilon^2} = 4E_0^2\cos^2(\beta y)\left(\frac{2}{T}\frac{T}{2} + \frac{2}{T}\left[\frac{\sin(2\omega t - 2\alpha x)}{2x2\omega}\right]_0^T\right)$$

$$\left[\frac{\sin(2\omega t - 2\alpha x)}{2x2\omega}\right]_0^T = \frac{\sin(4\pi\frac{T}{T} - 2\alpha x) - \sin(-2\alpha x)}{2x2\omega} = \frac{\sin(4\pi - 2\alpha x) - \sin(-2\alpha x)}{2x2\omega} = \frac{\sin(-2\alpha x) - \sin(-2\alpha x)}{2x2\omega} = 0$$

$$\boxed{\overline{\varepsilon^2} = 4E_0^2\cos^2(\beta y)}$$

Les surfaces d'égales valeur moyenne dans le temps sont les plans de y=Ctes (ce sont des franges d'interférences).

2c) Franges d'interférences

L'œil est sensible à $\overline{\varepsilon^2}$ et I l'intensité est proportionnelle à $\overline{\varepsilon^2}$. Pour simplifier, on écrit :

$$I = \overline{\varepsilon^2}$$

$$I = \overline{\varepsilon^2} = 4E_0^2\cos^2(\beta y) = 2E_0^2(1+\cos 2\beta y) = \left(E_0^2 + E_0^2 + 2E_0^2\cos 2\beta y\right)$$

Alors

$$I_{max} = 4E_0^2 \Leftrightarrow \cos 2\beta y = 1 \Rightarrow 2\beta y = 2k\pi \Leftrightarrow y = \frac{k\pi}{\beta}$$

$$I_{min} = 0 \Leftrightarrow \cos 2\beta y = -1 \Rightarrow 2\beta y = (2k+1)\pi \Leftrightarrow y = \frac{(2k+1)\pi}{2\beta}$$

L'interfrange i est la distance entre deux franges de même nature :

$$i = \frac{\pi}{\beta} = \frac{\pi}{k\sin\theta} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta} = \frac{\lambda}{2\sin\theta}$$

Remarque :

Nous appellerons donc l'intensité lumineuse de l'onde (où encore éclairement) le module au carré du champ électrique et nous retiendrons donc que pour une onde plane :

$$I = \vec{E}\cdot\vec{E}^* = E_0^2$$

D'une façon beaucoup plus générale, l'intensité que peut mesurer un détecteur est la valeur moyenne de l'intensité de l'onde prise sur le temps de réponse du détecteur T_r soit

$$I_m = \langle\vec{E}(t)\cdot\vec{E}*(t)\rangle = \frac{1}{T_r}\int_0^{T_r}\vec{E}(t)\cdot\vec{E}*(t)\,dt$$

ce qui conduit pour l'onde plane monochromatique à

$$I_m = \frac{1}{T_r}\int_0^{T_r}\vec{E}_0 e^{i(\omega_0 t+\phi)}\cdot\vec{E}_0 e^{-i(\omega_0 t+\phi)}\,dt = E_0^2$$

L'intensité lumineuse est nécessairement une quantité réelle comme le montre l'introduction du module du champ.
Si l'on travaille avec des champs réels la définition de l'intensité doit être corrigée d'un facteur 2 pour être compatible avec le calcul fait en complexe. De plus pour l'onde monochromatique périodique de période T_0 le temps d'intégration est ramené à la période T_0 car intégrer sur une période est équivalent à intégrer sur autant de périodes que l'on veut. On a alors

$$I_m = 2\langle E^2(t)\rangle = 2\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} E_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)\, dt$$

soit

$$I_m = E_0^2$$

Pour des champs non stationnaires c'est à dire des champs dont la valeur moyenne dépend de l'origine prise pour faire la mesure on définit l'intensité par

$$I_m = \langle \vec{E} \cdot \vec{E}^* \rangle = \frac{1}{T_r}\int_t^{t+T_r} \vec{E} \cdot \vec{E}^* d\theta$$

En optique l'onde a une pulsation très élevée de l'ordre de $10^{15} rad \cdot s^{-1}$ soit une période très petite de l'ordre de $10^{-14} s$. Les détecteurs usuels ne peuvent pas intégrer l'énergie instantanée à ce rythme. Leur temps de réponse est beaucoup plus grand. L'œil a par exemple un temps de réponse de l'ordre du 1/10ème de seconde.

Exercice 1

Soit une source ponctuelle monochromatique S de longueur d'onde λ éclairant deux fentes fines S_1 et S_2 parallèles distantes l'une de l'autre de a=2mm. La source S se trouve à une distance D' du plan formé par les deux fentes S1 et S2. On observe des interférences sur un écran E situé une distance D du plan des deux fentes. D et D' sont supposés très grands par rapport à a.

1°) Décrire l'aspect des franges observées sur l'écran (E).
2°) Déterminer en fonction de a, D, λ la position de la frange centrale et la valeur de l'interfrange i.
3°) Comment le phénomène serait-il modifié si la bifente, au lieu de rester centrée sur l'axe zz', était déplacée dans son plan, perpendiculairement à la direction des fentes, d'une distance x' ?
4°) On incline maintenant l'écran E d'un angle β autour de l'axe vertical, quelle est la nouvelle valeur de l'interfrange i'. 5°) On redresse l'écran E verticalement quelle radiation monochromatique faudrait-il faire émettre à la fente source S pour que l'interfrange soit le même que dans la 4ème question ?

Application numérique :
a=1,5mm, D= 2m, D'= 1m, λ=0,5 μm, x'= 1 cm, β=45°

Exercice 2

Un système de demi-lentilles de Billet a été obtenu en coupant suivant un diamètre un verre de presbyte plan convexe, de 4 cm de diamètre. L'indice du verre est n = 1,5 et le rayon de courbure de la face convexe ρ = 25 cm.
Les centres optiques des demi-lentilles sont écartés de ε= 1 mm. Le système est placé à 1 m d'une fente fine F, éclairée en lumière monochromatique de longueur d'onde λ= 0,5 μm.

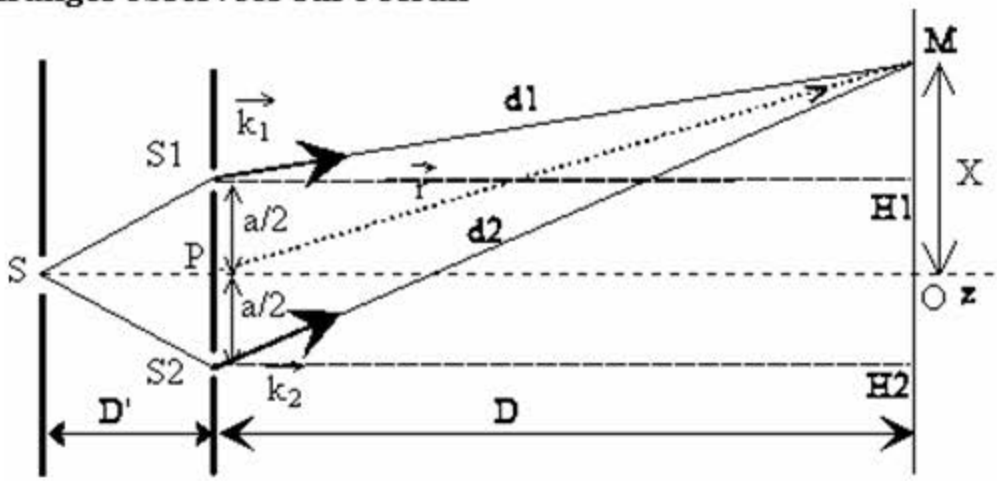
1°) Déterminer la position et l'écartement des images que le système donne de la fente source.
2°) A quelle distance minimale du plan des demi-lentilles faut-il disposer un écran (E) pour observer des franges d'interférences ? Comment varie la largeur du champ d'interférences lorsque l'on augmente cette distance ?
3°) L'écran (E) est placé à 1,50 m des demi-lentilles. Calculer l'interfrange, la largeur du champ d'interférences, le nombre de franges.
4°) On supprime les demi-lentilles. La fente source et l'écran gardant la disposition précédente, déterminer les caractéristiques et la position d'un biprisme de Fresnel qui, interposé entre F et (E), donnerait sur l'écran le même interfrange et le même nombre de franges que les demi-lentilles.

Module Optique II
Filière SMP-S4 – TD - série n° 2
Interférence par division du front d'onde

Exercice 1

1°)

a) aspect des franges observées sur l'écran



OM=x

On sait d'après le cours que l'on obtiendra des franges rectilignes parallèles aux fentes, équidistantes entre elles si SP et PO >> S_1S_2.

b) Position de la centrale et la valeur de l'interfrange i

Les deux sources ont le même éclairement ε_0. Si l'on appelle $\Delta\varphi$ la différence de phase entre les deux ondes arrivant au point M, on sait que l'intensité lumineuse au point M sera:

$$\begin{cases} \varepsilon = 2\varepsilon_0(1+\cos\Delta\varphi) = 2\varepsilon_0\left(2\cos^2\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = 4\varepsilon_0\cos^2\frac{\Delta\varphi}{2} \\ \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}((S_2M)-(S_1M)) \end{cases}$$

<u>δ est **la différence de marche** entre les deux ondes arrivant au point M.</u>

$$\delta = ((SS_2)+(S_2M))-((SS_1)+(S_1M))$$

Or pour raison de symétrie $(SS_1)=(SS_2)$

donc

$$\delta = (S_2M)-(S_1M) = S_2M-S_1M = d_2-d_1$$

or $d_2-d_1=(d_2^2-d_1^2)/(d_2+d_1)$ or $x<<D=PO$

donc $\delta=d_2-d_1\sim(d_2^2-d_1^2)/2D$ avec $D=PO$

Avec H_2 projection de S_2 sur l'écran E et H_1 projection de S_1 sur l'écran E.

on a:

$$d_2^2=(S_2H_2)^2+(H_2M)^2=D^2+(x+S_1S_2/2)^2$$
$$d_1^2=(S_1H_1)^2+(H_1M)^2=D^2+(x-S_1S_2/2)^2$$

la distance entre les deux fentes S_1 et S_2 est a.

$$d_2^2=D^2+(x+a/2)^2$$
$$d_1^2=D^2+(x-a/2)^2$$
$$d_2^2-d_1^2=D^2+(x+a/2)^2-D^2-(x-a/2)^2=2ax$$
$$\delta\sim(d_2^2-d_1^2)/2D=2ax/2D=ax/D$$
$$\delta = ax/D \quad (1)$$

<u>La frange centrale :</u>

La frange centrale est définie par $\delta=0$, donc ici x=0, frange centrale en O.

<u>Interfrange :</u>

On sait que d'après le cours que l'interfrange i est le déplacement du point M Δx entre deux franges de même nature ce qui correspond à une variation de la différence de marche $\Delta\delta=\lambda$.

D'après la relation (1) on a:

$$\Delta\delta = a\Delta x/D \text{ soit } \lambda = ai/D$$
$$\text{soit } i = \lambda D/a$$

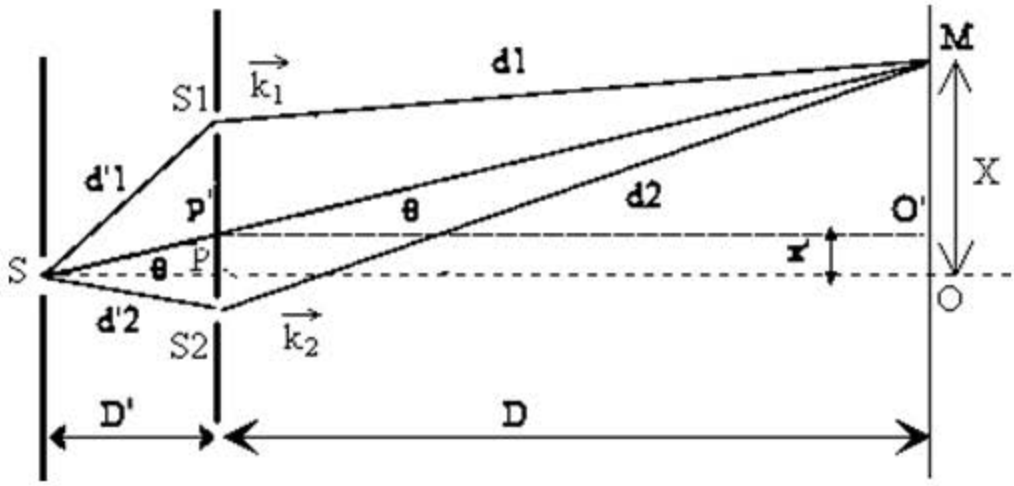
Application numérique

a=1.5 mm, D=2m et λ=0,5µm

$$i=(0{,}5\ 10^{-6} \times 2)/(1.5\ 10^{-3}) = 10^{-3}/1.5 = 0{,}66\ 10^{-3}\text{m},\ \boxed{\mathbf{i=0{,}66\ mm}}$$

2°) Fentes déplacées dans leur plan d'une quantité x'.

P passe à P'



la différence de marche entre les ondes arrivant au point M s'écrit:

$$\delta = (SS_2+S_2M)-(SS_1+S_1M)$$
$$\delta = (SS_2-SS_1)+(S_2M-S_1M) = (d'_2-d'_1)+(d_2-d_1) = \delta_1+\delta_2$$

pour les mêmes raisons que dans la question précédente

$$d_2-d_1 \sim (d_2^2-d_1^2)/2D \text{ et } d'_2-d'_1 \sim (d'^2_2-d'^2_1)/2D'$$

i) $\delta_2 = d_2-d_1$

Si l'on examine la figure 2 on constate que est du même type que celle calculée à la question 1 en prenant pour origine le point O' la projection du point P' sur l'écran E d'ordonnée x' par rapport à O.

On aura donc:

$$\delta_2 \sim (\mathbf{d_2^2-d_1^2})/\mathbf{2D} = \mathbf{2}a\,(\mathbf{x-x'})/\mathbf{2D} = a\,(\mathbf{x-x'})/\mathbf{D}$$

ii) $\delta_1 = d'_2-d'_1$

On voit que δ_1 est identique à la différence de marche pour un point M d'ordonnée **-x'** situé à une distance D' des fentes.

donc :

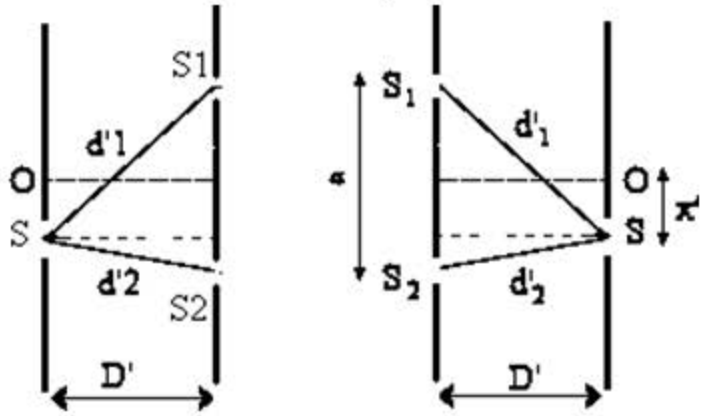
$$\delta_1 \sim (\mathbf{d'^2_2-d'^2_1})/\mathbf{2D'} = \mathbf{2}a\,(\mathbf{-x'})/\mathbf{2D'} = \mathbf{-}a\mathbf{x'/D'}$$

la différence de marche totale δ est donc:

$$\delta = \delta_1+\delta_2 = -ax'/D'+a(x-x')/D = -ax'/D'+ax/D-ax'/D = ax/D-ax'(1/D'+1/D)$$
$$\delta = \mathbf{ax/D-ax'(D'+D)/D'D}$$

Si x'=0 on retrouve le cas précédent

$$\delta = \mathbf{ax/D}$$



La frange centrale:

La frange centrale est définie par $\delta = \mathbf{0}$, la frange centrale est en $x=x_0$
soit

$$\delta = ax_0/D - ax'(D'+D)/D'D=0$$

$$\boxed{x_0 = x'(D'+D)/D'}$$

Donc la frange centrale s'est déplacée vers x positifs.

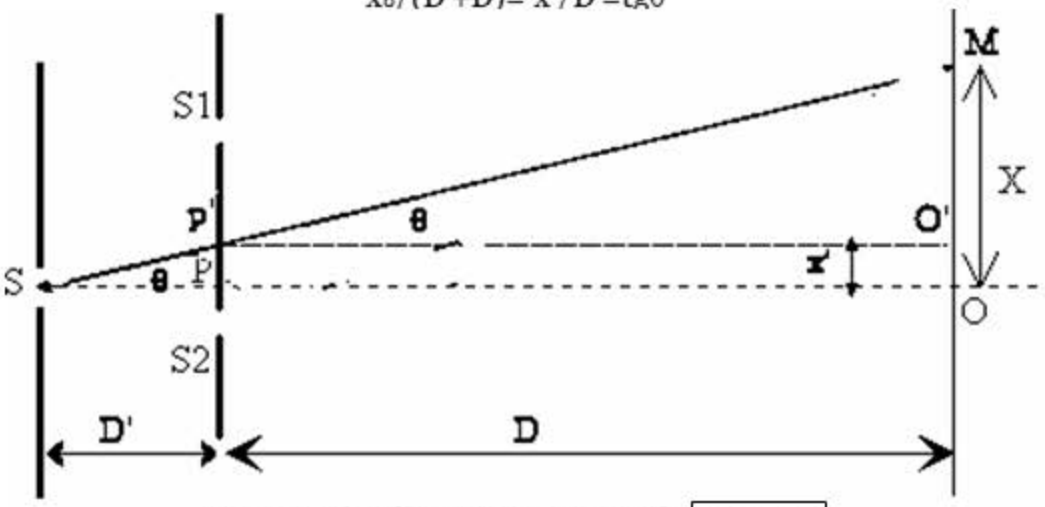
Application numérique

D'=1 m, D=2m et x'=1 cm

$$x_0 = 1\ 10^{-2}(1+2)/1=3\ 10^{-2}\text{m}$$

$$x_0 = 3\ \text{cm}$$

$$x_0/(D'+D)= x'/D'=tg\theta$$



$tg\theta=0{,}01$ implique $\theta=0{,}00999$ rd, $\boxed{\theta=0{,}573^0}$

Interfrange:

$i=\Delta x$ tel que $\Delta\delta=\lambda$.

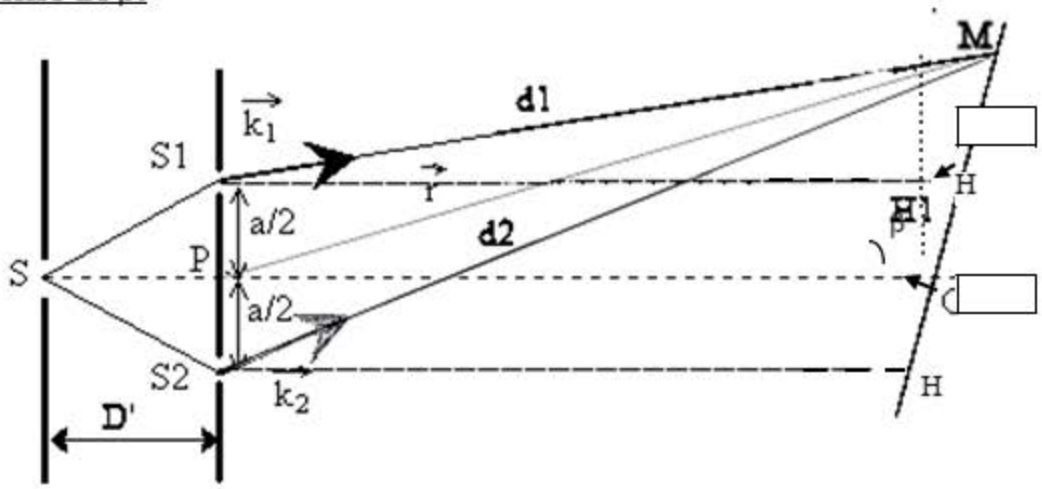
$$\Delta\delta=a\Delta x/D$$

$$\lambda= ai/D$$

$$\text{soit } i=\lambda D/a$$

l'interfrange n'a pas changé le système de frange s'est donc déplacé en bloc de la quantité $x_0= 3$ cm vers le haut.

3°) Écran incliné de β.



$\delta = d_2 - d_1 + d'_2 - d'_1 = d_2 - d_1$

$d_2 - d_1 \sim (d_2^2 - d_1^2)/2D$

l'axe des x est toujours compté suivant OM sur l'écran.

$$d_2^2=(S_2H_2)^2+(H_2M)^2=(D+x\cos\beta)^2+(x\sin\beta+a/2)^2$$

$$d_1^2=(S_1H_1)^2+(H_1M)^2=(D+x\cos\beta)^2+(x\sin\beta-a/2)^2$$

$d_2^2-d_1^2=2xa\sin\beta$

$\delta =(2xa\sin\beta)/2D=(xa\sin\beta)/D$

La frange centrale se situe en x=0 donc ou point O.

L'interfrange $\delta = \lambda$, $\lambda = (i'a\sin\beta)/D$ et $i' = \lambda D/a\sin\beta = i/\sin\beta$
$i = i'\sin\beta$
i' correspond à la projection du système de franges initial sur l'écran incliné.
$i' = i/\sin\beta$
Application numérique:
i=0,66 mm; β=45°; sinβ=0,707
soit i'=0,93 mm
<u>4°) longueur d'onde λ'.</u>
Pour obtenir le même interfrange après redressement de l'écran, il faut utiliser une radiation de longueur d'onde plus grande λ'.
soit $i' = \lambda' D/a$ et $i = \lambda D/a$
$i'/i = \lambda'/\lambda$
Application numérique:
i'/i=0,94/0,66=1,4242
λ'=λi'/i=0,5x1,4242=0,712 µm (lumière rouge), alors que λ=0,5 µm (lumière verte).

Exercice 2

1°) la convergence de la lentille
La relation de conjugaison d'une lentille formée de deux dioptres dont les rayons de courbure sont SC1 et SC2.

$$\frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{SC_1}} - \frac{1}{\overline{SC_2}}\right)$$

$SC_2 \to \infty$, donc la deuxième face est plane de la lentille :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} = (n-1)\frac{1}{\overline{SC_1}}$$

Si on envoie l'objet à l'infini $\overline{SA} \to \infty$ alors $\overline{SA'} = f'$ et $\overline{SC_1} = \rho$

$$\frac{1}{f'} = \frac{n-1}{\rho}$$

A partir de maintenant on va nommer $f = -f'$
Ce qui donne, avec n=1,5 et ρ =25 cm,

$$f' = 50 \text{ cm}$$

F est alors dans le plan antiprincipal objet, F1 et F2 sont dans le plan antiprincipal image des demi-lentilles.

$$\overline{OH} = -\overline{OF} = \overline{FO} = 2f'$$

$$\overline{HO} = -2f'$$

On considérant les triangles semblables FF2F1 et FC2C1, on a :

$$\frac{\overline{FH}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{F_2F_1}}{\overline{C_2C_1}}$$

$$\frac{\overline{FO} + \overline{OH}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{F_2F_1}}{\overline{C_2C_1}}$$

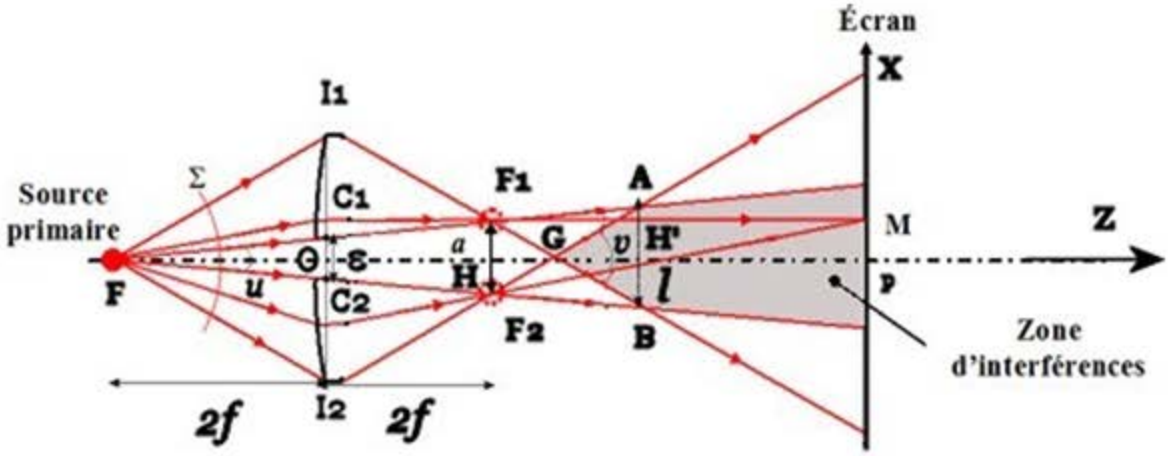
Donc :

$$\frac{\overline{F_2F_1}}{\overline{C_2C_1}} = \frac{4f'}{2f'} = 2$$

Il s'ensuit que :

$$\overline{F_2F_1} = 2\overline{C_2C_1} = 2\varepsilon$$

Car $\overline{C_2C_1} = \varepsilon$
Les deux sources virtuelles F1 et F2 sont de même taille que la source mère F.



Le grandissement $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OF}} = \frac{2f'}{-2f'} = -1$, donc $|\gamma| = 1$

2°) les deux faisceaux n'ont de partie commune qu'au-delà du point G.
Posons $\overline{I_1C_1} = \overline{I_2C_2} = R$ (rayon des demi-lentilles) et $\overline{OG} = z_0$.
On voit géométriquement en considérant les triangles semblables GI1I2 et GF1F2 que

$$\frac{\overline{HG}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{F_2F_1}}{\overline{I_2I_1}}$$

$$\frac{\overline{HO} + \overline{OG}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{F_2F_1}}{\overline{I_2I_1}}$$

Soit

$$\overline{HG} = \overline{HO} + \overline{OG} = z_0 - 2f'$$

$$\overline{I_2I_1} = 2R + \varepsilon$$

$$\frac{z_0 - 2f'}{z_0} = \frac{2\varepsilon}{2R + \varepsilon}$$

Soit

$$z_0 2R + z_0\varepsilon - 2f'(2R + \varepsilon) = 2\varepsilon z_0$$

$$z_0(2R - \varepsilon) - 2f'(2R + \varepsilon) = 0$$

$$z_0 = 2f'\frac{(2R + \varepsilon)}{(2R - \varepsilon)} = 2f'\frac{(1 + \frac{\varepsilon}{2R})}{(1 - \frac{\varepsilon}{2R})} = 2f'(1 + \frac{\varepsilon}{2R})^2 = 2f'(1 + \frac{\varepsilon}{R} + \frac{\varepsilon^2}{4R^2}) \approx 2f'(1 + \frac{\varepsilon}{R})$$

$$\boxed{z_0 \approx 2f'\left(1 + \frac{\varepsilon}{R}\right)}$$

$$\boxed{\overline{OG} = z_0 \approx 2f'\left(1 + \frac{\varepsilon}{R}\right)}$$

A.N.
Avec: $\varepsilon = 1$ mm , R=2 cm et $2f' = 1$ m

$$\boxed{\overline{OG} = z_0 \approx 1\left(1 + \frac{10^{-3}}{2 \cdot 10^{-2}}\right) = 1(1 + 0,05) = 1,05\ m}$$

On a donc

$$\boxed{\overline{HG} = z_0 - 2f' \approx 2f'\frac{\varepsilon}{R}}$$

A.N.

Avec : ε =1 mm , R=2 cm et 2 f =1 m

$$\boxed{\overline{HG} = z_0 - 2f' = 1,05 - 1 = 0,05\ m}$$

$$\boxed{\overline{HG} = 5\ cm}$$

Lorsque l'on s'éloigne de G, la longueur du champ augmente jusqu'en H'.
L'angle :

$$u = \frac{\overline{C_2C_1}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{F_2F_1}}{\overline{FH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{FH'}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{FH'}} = \frac{l}{z_{H'} + 2f'}$$

$$\frac{\overline{C_2C_1}}{\overline{FO}} = \frac{\varepsilon}{2f'} \quad et \quad \frac{\overline{F_2F_1}}{\overline{FH}} = \frac{2\varepsilon}{4f'} = \frac{\varepsilon}{2f'} \quad et \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{FH'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{FO} + \overline{OH'}} = \frac{\overline{AB}}{z_{H'} + 2f'}$$

$$v = \frac{\overline{I_2I_1}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{GH'}} = \frac{\overline{F_2F_1}}{\overline{HG}}$$

$$\frac{\overline{I_2I_1}}{\overline{OG}} = \frac{2R + \varepsilon}{z_0} = \frac{2R}{z_0}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2R}\right) = \frac{2R\left(1 + \frac{\varepsilon}{2R}\right)}{2f'\left(1 + \frac{\varepsilon}{R}\right)} = \frac{R}{f'}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2R}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right) \approx \frac{R}{f'}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2R}\right)$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{GH'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{GO} + \overline{OH'}}\frac{\overline{AB}}{\overline{OH'} - \overline{OG}} = \frac{\overline{AB}}{z_{H'} - z_0}$$

$$\frac{\overline{F_2F_1}}{\overline{HG}} = \frac{2\varepsilon}{z_0 - 2f'} \approx \frac{2\varepsilon}{\frac{2f'\varepsilon}{R}} \approx \frac{R}{f'}$$

u étant petit devant l'angle v,
$\overline{GH'}$ n'est que légèrement supérieur à $\overline{GH}$.
H' est donc à une dizaine de centimètre du plan F_1F_2 des images de F. Au-delà de H' la largeur du champ augmente beaucoup plus lentement.

A la distance z des bilentilles, comme $u = \frac{l}{\overline{FP}} = \frac{l}{\overline{FO} + \overline{OP}} = \frac{l}{2f' + z}$ elle est :

$\overline{FP} = 2f' + z$

$$u = \frac{l}{\overline{FP}} = \frac{\overline{C_2C_1}}{\overline{FO}} \Rightarrow u = \frac{l}{2f' + z} = \frac{\varepsilon}{2f'}$$

$$\Rightarrow \boxed{l = \frac{\varepsilon}{2f'}(2f' + z) = \varepsilon\left(1 + \frac{z}{2f'}\right)}$$

3°) Pour **z=1,50 m** l'écran est au-delà de H'.

Largeur du champ : $l = \varepsilon\left(1 + \frac{z}{2f}\right) = 2,5\varepsilon = 2,5\ mm$ mm et $\overline{F_2F_1}$=2ε= 2 mm

$$\boxed{l = 2,5\ mm}$$

Interfrange : $i = \frac{\lambda\overline{HP}}{\overline{F_2F_1}} = \frac{\lambda(z - 2f')}{2\varepsilon} = \frac{0,5.10^{-3}.500}{2} = 0,125$ mm

$$\boxed{i = 0,125\ mm}$$

Nombre de franges : $\boxed{n = \frac{l}{i} = \frac{2,5}{0,125} = 20}$

3°) Soit p et p' les distances du biprisme à la fente et à l'écran, D=(n-1)A la déviation de chaque prisme.

La distance des sources est $\overline{F_1F_2}=a=2Dp$;

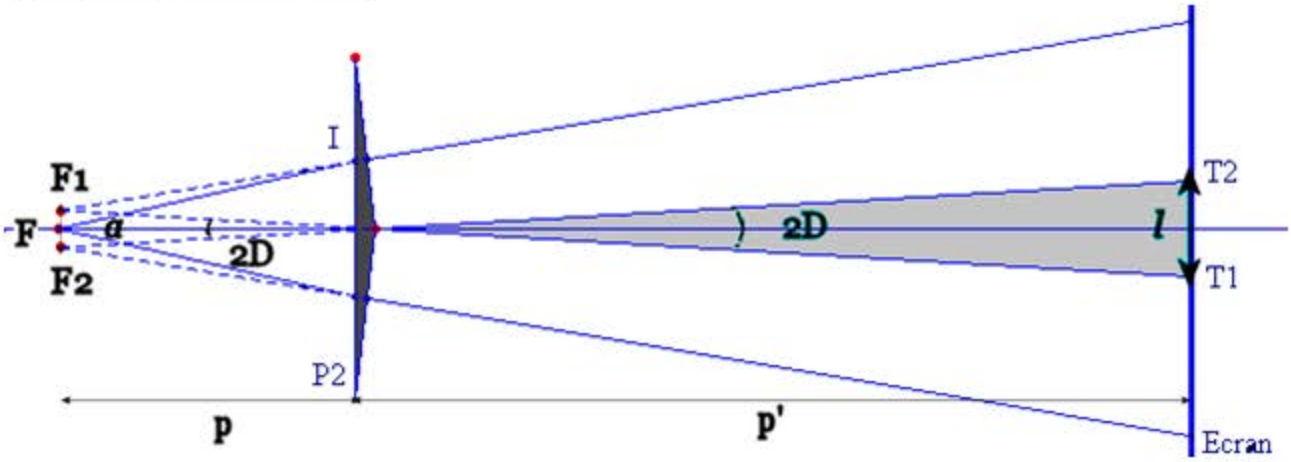
La largeur du champ $l=2Dp'$

L'interfrange $i=\dfrac{\lambda(p+p')}{a}$

On a $p+p'=\overline{FP}=z+2f'$

A.N.

$\boxed{p+p'=1,5+1=2,5\ m}$



λ, $p+p'$ et i étant imposés, l'écartement des sources doit être :

$$a=\frac{\lambda(p+p')}{i}=\frac{0,5.10^{-3}.2,5.10^{3}}{0,125}=10\ mm$$

On doit avoir alors :

$$\frac{a}{l}=\frac{2Dp}{2Dp'}=\frac{p}{p'}=\frac{10}{2,5}=4 \Rightarrow p=4p'$$

On en déduit immédiatement

$\boxed{p+p'=4p'+p'=5p'=2,5\ m}$

$\boxed{p'=\dfrac{2,5}{5}=0,50\ m}$

$\boxed{p=5p'=2,5\ m-p'=2,5-0,5=2\ m}$

Alors $2D=\dfrac{a}{p}=\dfrac{10\cdot10^{-3}}{2}=5\cdot10^{-3}\ rd$

Si l'indice du biprisme est n=1,5, l'angle de chaque prisme devra être :

$$A=\frac{2D}{2(n-1)}=\frac{5\cdot10^{-3}}{2\cdot0,5}=5\cdot10^{-3}\ rd$$

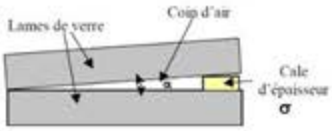
Exercice 1

Soit dans l'air, une lame de verre à face parallèle d'indice n=1,5 et d'épaisseur e=1 cm. Elle est éclairée par une source étendue de lumière monochromatique de longueur d'onde λ=0,42 μm dans le vide. Un rayon incident SI donne naissance aux différents rayons réfléchi et réfracté.
On s'intéresse aux phénomènes d'interférences par transmission.

1) Calculer, en fonction de n, e et de l'angle de réfraction r, la différence de marche optique entre les rayons T1 et T2.
2) Montrer que les surfaces d'égale différence de phase sont des anneaux localisés à l'infini.
3)On recueille les rayons transmis à l'aide d'une lentille mince de distance focale f= 1 m et on observe les anneaux dans le plan focal de celle-ci
4) En supposant l'ordre d'interférence entier au centre, calculer les rayons des trois premiers anneaux brillants.

Exercice 2

On considère un coin formé par 2 glaces de longueur L= 10^{2} mm et séparées par une cale d'épaisseur σ= 25 10^{-2} mm.
On éclaire ce coin à l'aide d'une source de longueur d'onde λ= 0,5 10^{-3} mm et l'on observe le système par réflexion.



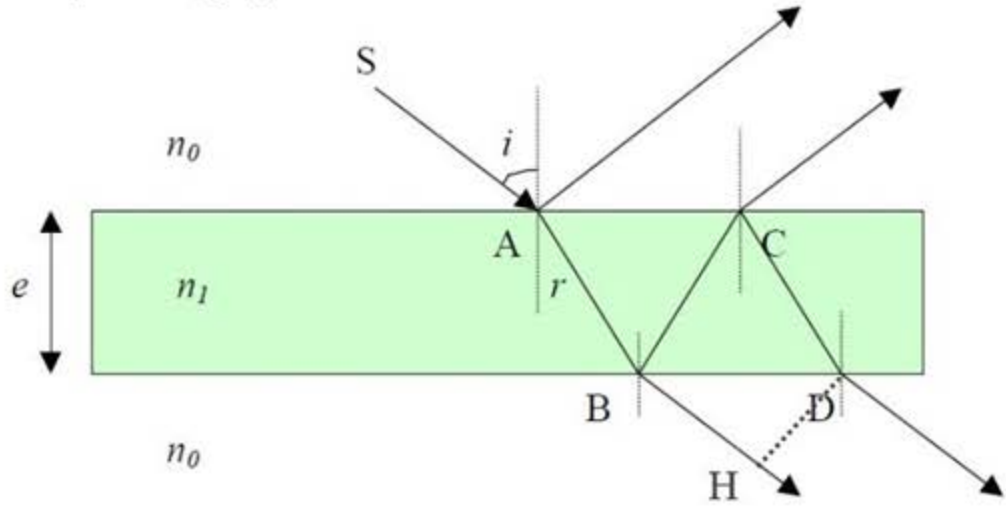
1) Quelle est la nature de la frange située en O.
2) Calculer l'interfrange du système de franges ?
3) On éclaire alors le coin d'air avec une source comprenant deux longueurs d'onde λ_1= 0,5000 10^{-3} mm et λ_2= 0,5050 10^{-3} mm.
On observe alors des zones à fort contraste (coïncidences) pour le système de franges et des zones à très faibles contraste (anti-coïncidences).
a) Montrer que le point O correspond à une coïncidence.
b) Écrire la relation qui existe entre les ordres d'interférences correspondant à chacune des longueurs d'onde λ_1 et λ_2 pour la coïncidence suivante.
c) En déduire la distance l qui sépare cette coïncidence du point O.
4) On éclaire le coin d'air en lumière blanche et on place la fente d'un spectroscope à 10 mm de l'arrête O du coin d'air parallèlement à cette arête.
Calculer le nombre de cannelures noires observées dans le spectroscope sachant que le spectre visible s'étend de 0,4 10^{-3} mm à 0,8 10^{-3} mm.

Module Optique II
Filière SMP-S4 – TD - série n° 3
Interférence par division d'amplitude

Exercice 1

Lame à face parallèle dont les caractéristiques sont :

$n = 1,5, \quad e = 1cm, \quad \lambda = 0,42\ \mu m$



1) La différence de marche entre les rayons transmis T1 et T2.
A partir des points D et H les deux rayons parcourent les mêmes chemins optiques. La différence de marche est donc

$$\delta = [BCD] - [BH] = n_1\left(\overline{BC} + \overline{CD}\right) - n_0\overline{BH}$$

Alors $\overline{BC} = \overline{CD}$, donc

$$\delta = 2n_1\overline{BC} - n_0\overline{BH}$$

$$\delta = 2n_1\frac{e}{\cos r} - n_0 2e \cdot \tan r \sin i$$

En utilisant la loi de Snell-Descartes, $n_0 \sin i = n_1 \sin r$, nous obtenons

$$\delta = 2n_1\frac{e}{\cos r} - n_0 2e \cdot \tan r \sin i = 2n_1\frac{e}{\cos r} - n_1 2e \cdot \frac{\sin r}{\cos r}\sin r = n_1 2e\left(\frac{1 - \sin^2 r}{\cos r}\right)$$

$$\delta = n_1 2e\left(\frac{\cos^2 r}{\cos r}\right) = 2n_1 e \cos r$$

$$\boxed{\delta = 2ne\cos r}$$

2) Nature des franges :
On a $\delta = Cte$ si $r = Cte$ par conséquent $i = Cte$.
On a des franges d'égales inclinaisons pour chaque valeur de i.
Pour tous les i, on obtient des anneaux localisés à l'infini.
3) on a alors

$$\tan i = \frac{\rho}{f} \Rightarrow i \simeq \frac{\rho}{f} \Rightarrow \rho = fi$$

Pour les trois premiers anneaux (angles petits), l'ordre d'interférence s'écrit :

$$p = \frac{\delta}{\lambda} \Rightarrow p = \frac{2ne\cos r}{\lambda} = \frac{2ne}{\lambda}\left(1 - \frac{r^2}{2}\right)$$

Et comme $\sin i = n \sin r \Rightarrow ni = nr \Rightarrow \boxed{i^2 = n^2 r^2}$

$$p = \frac{\delta}{\lambda} \Rightarrow p = \frac{2ne\cos r}{\lambda} = \frac{2ne}{\lambda}\left(1 - \frac{r^2}{2}\right) = \frac{2ne}{\lambda}\left(1 - \frac{i^2}{2n^2}\right) = \frac{2ne}{\lambda} - \frac{2ne}{\lambda}\frac{i^2}{2n^2} = \frac{2ne}{\lambda} - \frac{e}{\lambda}\frac{i^2}{n}$$

$$p_0 = \frac{2ne}{\lambda}$$

Après on a :

$$p = \frac{2ne}{\lambda} - \frac{e}{\lambda}\frac{i^2}{n} = \frac{2ne}{\lambda} - \frac{e}{n\lambda}\left(\frac{\rho}{f}\right)^2$$

$$\frac{e}{n\lambda}\left(\frac{\rho}{f}\right)^2 = \frac{2ne}{\lambda} - p$$

Alors

$$\frac{e}{n\lambda}\left(\frac{\rho}{f}\right)^2 = \frac{2ne}{\lambda} - p = p_0 - p$$

Comme i est petit, le rayon ρ de l'anneau d'ordre p s'écrit en posant $p_0 - p = k$, ou k est le numéro d'ordre de l'anneau compté à partir du centre, c.-à-d. quand $p = p_0$ tel que $p_0 - p_0 = 0$.

$$\frac{e}{n\lambda}\left(\frac{\rho_k}{f}\right)^2 = k \Rightarrow \left(\frac{\rho_k}{f}\right)^2 = k\frac{n\lambda}{e} \Rightarrow \rho_k = f\sqrt{k\frac{n\lambda}{e}} = f\sqrt{\frac{n\lambda}{e}}\sqrt{k}$$

A.N. avec $n = 1,5, \quad e = 1cm, \quad \lambda = 0,42\ \mu m$

$$\rho_k = 1\sqrt{\frac{1,5\ 0,42\ 10^{-6}}{10^{-2}}}\sqrt{k} = 0,00794\sqrt{k}$$

$$pour\ l'anneau\ 1, k = 1 \Rightarrow \rho_1 = 0,00794\sqrt{1} = 0,00794\ m$$

$$pour\ l'anneau\ 1, k = 2 \Rightarrow \rho_2 = 0,00794\sqrt{2} = 0,01123\ m$$

$$pour\ l'anneau\ 1, k = 3 \Rightarrow \rho_3 = 0,00794\sqrt{3} = 0,01375\ m$$

$$pour\ l'anneau\ 1, k = 4 \Rightarrow \rho_4 = 0,00794\sqrt{4} = 0,01588\ m$$

$$\rho_2 - \rho_1 = 0,01123 - 0,00794 = 0,00329\ m$$

$$\rho_3 - \rho_2 = 0,01375 - 0,01123 = 0,00252\ m$$

$$\rho_4 - \rho_3 = 0,01588 - 0,01375 = 0,00213\ m$$

Exercice 2

Localisation des franges d'interférence :

Un coin réalisé à chaque fois que deux surfaces réfléchissantes ne sont pas rigoureusement parallèles entre elles mais forment un dièdre d'angle au sommet α faible.

On a un rayon lumineux ***SA*** se réfléchit sur le premier dioptre et est transmis ***(AB)*** dans le coin avant de se réfléchir sur le second dioptre. Les deux rayons émergents R_1 et R_2 ne sont pas parallèles entre eux compte tenu de l'angle α du dièdre. Ils se coupent donc, non pas à **l'infini**, mais en un point ***P*** qui se trouve localisé au voisinage du coin. En ce point les deux rayons se superposent avec un déphasage qui dépend principalement de **l'épaisseur du coin**. C'est le seul endroit ou ces rayons se superposent et c'est donc en ce point que les interférences sont observées; pour cette raison les interférences sont dites

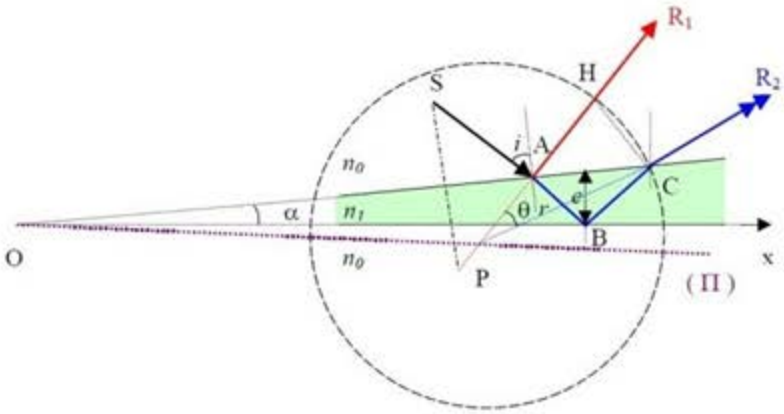


Figure : Illustration du cheminement de la lumière dans un coin d'angle au sommet α

localisées. Expérimentalement on observe une figure d'interférences constituée de franges rectilignes parallèles à l'axe du dièdre.
Cette observation est une nouvelle fois conforme à la loi de Curie sur la symétrie des effets. La présence d'un dièdre détruit la symétrie de révolution de la lame à faces parallèles et les franges adoptent la symétrie imposée par le dièdre.
Leur localisation peut être parfaitement déterminée analytiquement. Pour cela il faut trouver la position du point P de croisement des deux rayons en se rappelant que contrairement à la figure les angles i et r sont très petits. Dans le triangle ACP (cf. Fig.) nous pouvons écrire que

$$\frac{AC}{\sin\theta}=\frac{CP}{\sin A}\Rightarrow\frac{AC}{\sin\theta}=\frac{CP}{\sin\left(i+\frac{\pi}{2}\right)}\Rightarrow\frac{AC}{\sin\theta}=\frac{CP}{\cos i}\Rightarrow\frac{AC}{\theta}=\frac{CP}{1}\Rightarrow\boxed{CP=\frac{AC}{\theta}}$$

Dans le triangle ACP nous avons :

$$\theta+i+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-i'=\pi\Rightarrow\boxed{\theta=i'-i}$$

Dans le triangle ABC nous avons :

$$\frac{\pi}{2}-r+2r+2\alpha+\frac{\pi}{2}-r'=\pi\Rightarrow\boxed{r'=2\alpha+r}$$

$$\theta=i'-i=\frac{n_1r'}{n_0}-\frac{n_1r}{n_0}=\frac{n_1(r'-r)}{n_0}=\frac{n_1 2\alpha}{n_0}\Rightarrow\boxed{\theta=\frac{n_1 2\alpha}{n_0}}$$

et

$$i'=\frac{n_1 2\alpha}{n_0}+i=\frac{n_1 2\alpha}{n_0}+\frac{n_1 r}{n_0}=\frac{n_1(2\alpha+r)}{n_0}\Rightarrow\boxed{i'=\frac{n_1(2\alpha+r)}{n_0}}$$

avec i' représentant l'angle de sortie du rayon R_2 par rapport à la normale au dioptre.
Dans le triangle OBC nous avons :

$$\frac{OB}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-r'\right)}=\frac{BC}{\sin\alpha}\Rightarrow\frac{x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-r'\right)}=\frac{BC}{\sin\alpha}\Rightarrow\frac{x}{\cos r'}=\frac{BC}{\alpha}\Rightarrow\boxed{BC=\alpha x}$$

(x étant la position du point B par rapport à l'arête O du dièdre)
D'autre part dans le triangle ABC nous avons :

$$\frac{AC}{\sin(2r+2\alpha)}=\frac{BC}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-r\right)}\Rightarrow\frac{AC}{\sin(2r+2\alpha)}=\frac{BC}{\cos r}\Rightarrow\frac{AC}{\sin(2r+2\alpha)}=\frac{BC}{1}\Rightarrow\frac{AC}{2r+2\alpha}=\frac{\alpha x}{1}$$

d'où

$$\Rightarrow\boxed{AC=\alpha x(2r+2\alpha)}$$

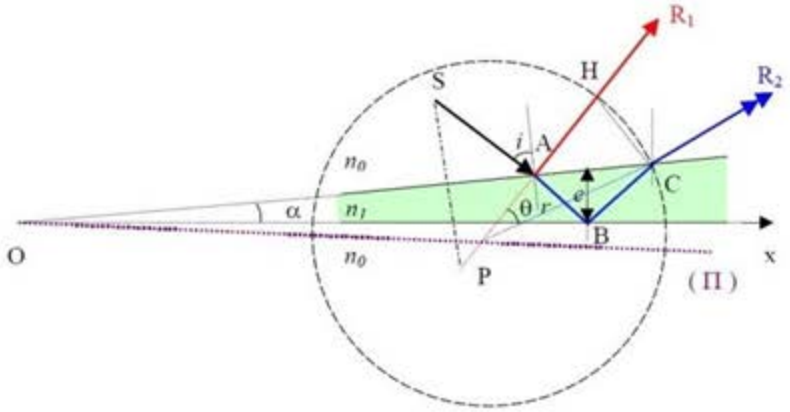
$$CP = \frac{AC}{\theta} = \frac{\alpha x(2r+2\alpha)}{\theta} = \frac{\alpha x(2r+2\alpha)}{\frac{n_1 2\alpha}{n_0}} = \frac{n_0 x(r+\alpha)}{n_1} = \left(\frac{n_0(r+\alpha)}{n_1}\right)x$$

Compte tenu de la faiblesse des angles, le point P est très proche de B et

$$\widehat{COP} = \frac{CP}{x} = \frac{n_0(r+\alpha)}{n_1} = \alpha'$$

Cela montre que l'angle $\widehat{COP}$ ne dépend pas de x et que le point P est situé dans le voisinage immédiat des deux dioptres.

Différence de marche :



Nous considérons les deux rayons R_1 et R_2. Soit (C) le cercle de centre P et de rayon PC (cf. Fig.). Il est facile de voir qu'en A le rayon est unique et se divise en ce point. Après le passage aux points C et H, les rayons se propagent de la même manière dans le milieu d'indice n_0. Il s'ensuit que la différence de marche entre les deux rayons R_1 et R_2 est égale à la différence de chemin optique entre les deux rayons soit :

$$\delta = [ABC] - [AH] = n_1(AB + BC) - n_0 AH$$

Le calcul est donc identique à celui mené pour la lame à face parallèle et conduit à

$$\delta = 2n_1 e \cos r \pm \frac{\lambda_0}{2}$$

Nous considérons que le coin est éclairé en incidence quasi-normale ce qui conduit au deuxième ordre près à

$$\delta \simeq 2n_1 e(P) \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2n_1 \alpha x(P) \pm \frac{\lambda_0}{2}$$

où $e(P)$ est l'épaisseur du coin à l'abscisse $x(P)$.

L'ordre d'interférence au point p est donné par

$$\delta = p\lambda_0 \Rightarrow p\lambda_0 = 2n_1 \alpha x(P) \pm \frac{\lambda_0}{2} \Rightarrow p = 2n_1 \frac{e(P)}{\lambda_0} \pm \frac{1}{2} = 2n_1 \alpha \frac{x(P)}{\lambda_0} \pm \frac{1}{2}$$

Nous voyons que, dans le cas d'un coin, l'ordre d'interférence est constant si l'épaisseur e est constante. Les franges sont de ce fait qualifiées de **franges d'égale épaisseur** et sont aussi appelées **franges de Fizeau**. Comme l'épaisseur du film augmente avec l'éloignement $x(P)$ du centre du dièdre l'ordre n'est pas constant; il est minimal sur l'arête du dièdre et croît au fur et à mesure que l'on s'en éloigne.

1) La différence de marche en O est égale à $\frac{\lambda_0}{2}$ on a donc une frange noire.

2) Interfrange

L'interfrange qui sépare deux franges consécutives de même nature est donné par

$$\Delta p = 1 = 2n_1 \alpha \frac{x_{p+1} - x_p}{\lambda_0} \Rightarrow i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda_0}{2n_1 \alpha}$$

L'interfrange est donc constant et ne dépend que de l'angle du dièdre. Il croît lorsque cet angle devient très faible. Il délimite des franges rectilignes parallèles à l'axe du dièdre.
Comme

$$\tan\alpha \simeq \alpha = \frac{\sigma}{L} \Rightarrow i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda_0}{2n_1\alpha} = \frac{\lambda_0 L}{2n_1\sigma}$$

A.N.

$$i = \frac{0,5x10^{-3}x10^{2}}{2x25x10^{-2}} = 10^{-1}mm$$

3)

a) On en $O\,(x=0)$ on a $\delta_1 = -\frac{\lambda_1}{2}$ et $\delta_2 = -\frac{\lambda_2}{2}$, donc on a la première coïncidence.

b) Au niveau de la 2ième coïncidence si l'épaisseur du coin d'air est e on doit avoir pour les franges noires des longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 :

$$\delta_1 = 2e - \frac{\lambda_1}{2} \Rightarrow p_1 = \frac{2e}{\lambda_1} - \frac{1}{2}$$

$$\delta_2 = 2e - \frac{\lambda_2}{2} \Rightarrow p_2 = \frac{2e}{\lambda_2} - \frac{1}{2}$$

Comme $\lambda_1 < \lambda_2$ on a $p_1 > p_2$

À chaque coïncidence on doit avoir un même état énergétique donc p_1 et p_2 différent d'un nombre entier. A chaque coïncidence p_1 et p_2 différent de 1.

$$p_1 = p_2 + 1$$

$$p_1 = p_2 + 1 \Leftrightarrow \frac{2e}{\lambda_1} - \frac{1}{2} = \frac{2e}{\lambda_2} - \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow \frac{2e}{\lambda_1} - \frac{2e}{\lambda_2} = 1 \Rightarrow 2e = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

c) Or $e = \alpha l$, on a donc:

$$l = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} x \frac{1}{2\alpha} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} x \frac{1}{2} x \frac{L}{\sigma}$$

A.N.

$$l = \frac{0,5\ 10^{-3} \cdot 0,505\ 10^{-3}}{0,005\ 10^{-3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{10^{2}}{25\ 10^{-2}} = 10,1\ mm$$

4) à $l' = 10\ mm$ l'épaisseur est $e' = \alpha l' = \frac{\sigma}{L} l' = \frac{25\ 10^{-2}}{100} 10^{-2} = 25\ 10^{-6}$

$$\delta = 2e'(P) - \frac{\lambda}{2}$$

On a une cannelure pour $\frac{2e'}{\lambda}$ entier

Pour 0,4 µm $\quad p = 2\frac{e'}{\lambda} = \frac{2 \cdot 25\ 10^{-6}}{0,4\ 10^{-6}} = \frac{50}{0,4} = 125$

Pour 0,8 µm $\quad p = 2\frac{e'}{\lambda} = \frac{2 \cdot 25\ 10^{-6}}{0,8\ 10^{-6}} = \frac{50}{0,8} = 62,5$

On a 63 cannelures.

Exercice 1

On se propose dans cet exercice de retrouver directement à partir du postulat d'Huygens-Fresnel l'intensité diffractée par une fente de largeur a et de hauteur b>>a.
Un élément diffractant de surface élémentaire dS, centré en un point P de la fente, a une contribution à l'amplitude dA. Dans le cas d'une étude à l'infini dans une direction $\vec{u}'$ cette contribution élémentaire a pour forme:

$$dA(\vec{u}') = k\, e^{j\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\overrightarrow{OP}\cdot(\vec{u}-\vec{u}')}\, dS$$

où k est facteur multiplicatif complexe, O est point origine arbitraire (pris souvent au centre de la fente par commodité) et $\vec{u}$ (vecteur) donnant la direction de l'onde incidente.

a) À partir des éléments ci-dessus, retrouver l'expression de I(θ). Donner l'expression de la tache centrale de diffraction.
b) L'observation se fait maintenant dans le plan focal d'une lentille convergente d'axe Oz et distance focale f'. Donner dans le plan focal l'allure de la tache centrale.
c) La lumière incidente fait maintenant un angle i, supposé petit, par rapport à Oz. Décrire l'allure de la figure de diffraction, en précisant la position de la tache centrale.
d) revenant au cas de la question a). Si maintenant La tache principale de diffraction à mi-hauteur d'une fente a une largeur angulaire de $5\ 10^{-3}$ rd pour une longueur d'onde 0,5µm. Quel est alors la largeur de la fente ?

Exercice 2

On réalise une expérience de diffraction à l'aide d'un laser émettant une lumière monochromatique de longueur d'onde λ. À quelques centimètres du laser, on place successivement des fils verticaux de diamètres a connus. La figure de diffraction obtenue est observée sur un écran blanc situé à une distance D = 1,60 m des fils. Pour chacun des fils, on mesure la largeur L de la tache centrale. À partir de ces mesures et des données, il est possible de calculer l'écart angulaire θ (l'angle θ étant petit, on a la relation tanθ = θ (rad)) du faisceau diffracté (voir figure 1).

1. Établir la relation entre L et D qui a permis de calculer θ pour chacun des fils.
2. Donner la relation liant θ, λ et a. Préciser les unités de ces trois grandeurs.
3. Dans la figure 2, on a construit la représentation graphique de la fonction $\theta = f(1/a)$. Montrer que la courbe obtenue est en accord avec l'expression de θ donnée à la question précédente.
4. Calculer, à partir de cette courbe, la longueur d'onde λ de la lumière monochromatique utilisée.
5. On réalise la même étude expérimentale en utilisant une lumière blanche. On observe que les bords de la tache centrale sont irisés. Expliquer ce phénomène en utilisant la réponse donnée à la question 2.

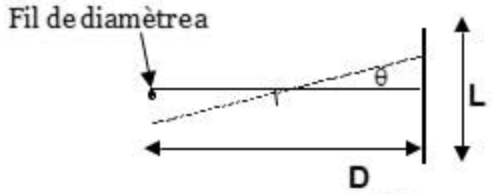


Figure 1

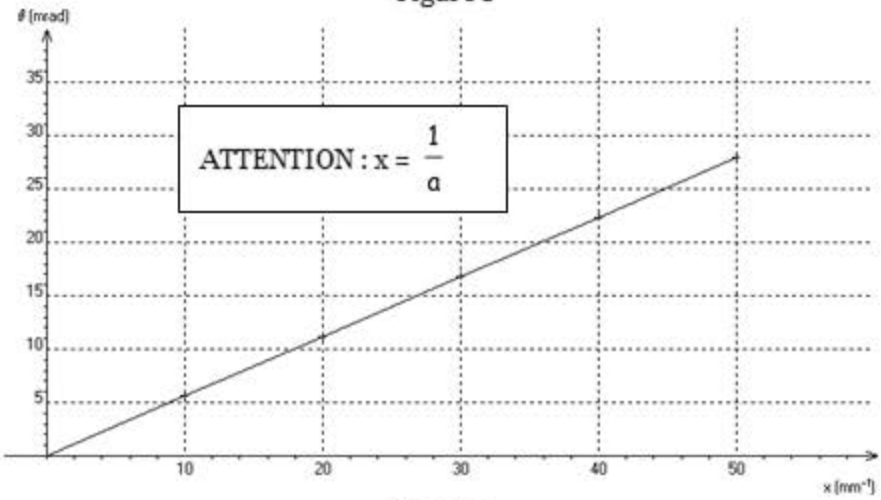
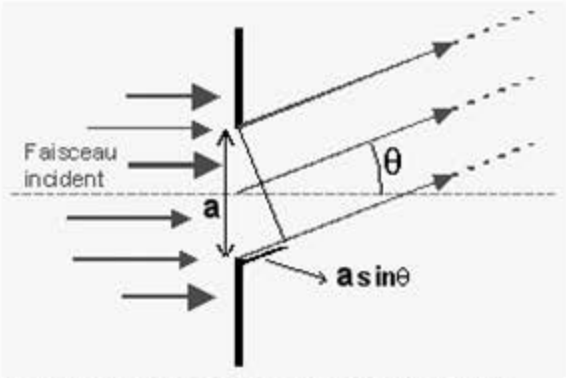


Figure 2

Module Optique II
Filière SMP-S4 – TD - série n° 4
Phénomène de diffraction

Exercice 1 :

a) A partir des éléments ci-dessus, retrouver l'expression de I(θ). Donner l'expression de la tache centrale de diffraction.



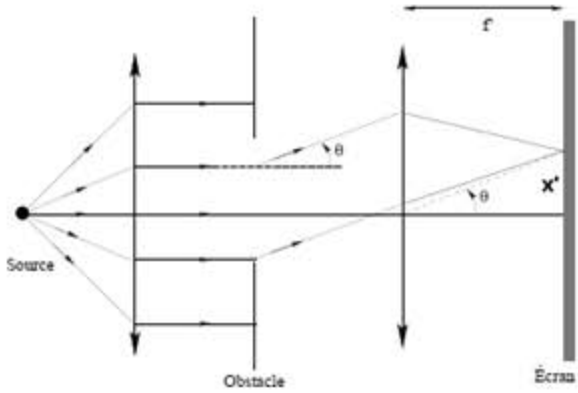
Il n'y a pas de diffraction dans la direction Oy car b est grand, d'où :

$$\overrightarrow{OP}\cdot(\vec{u}-\vec{u}')=\delta=-x\theta$$

En intégrant dA de x=-a/2 à a/2, on trouve :

$$A=A_0\frac{\sin(\frac{\pi a\theta}{\lambda})}{\frac{\pi a\theta}{\lambda}}.\text{ D'où } I=I_0\left(\frac{\sin(\frac{\pi a\theta}{\lambda})}{\frac{\pi a\theta}{\lambda}}\right)^2.$$

b) L'observation se fait maintenant dans le plan focal d'une lentille convergente d'axe Oz et distance focale *f'* (diffraction de Fraunhofer). Donner dans le plan focal l'allure de la tache centrale.



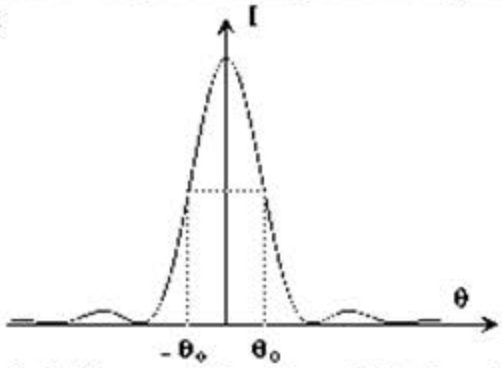
Avec la lentille, on a la relation tan(θ) = x'/f' ~ θ car θ est petit.

Donc $I=I_0\left(\frac{\sin(\frac{\pi a x'}{f'\lambda})}{\frac{\pi a x'}{f'\lambda}}\right)^2$. La largeur de la tache centrale a alors comme expression : $\Delta x'=\frac{2f'\lambda}{a}$.

c) La lumière incidente fait maintenant un angle i, supposé petit, par rapport à Oz. Décrire l'allure de la figure de diffraction, en précisant la position de la tache centrale.
En reprenant les calculs du a) et b) en tenant compte de l'angle i, c'est-à-dire =δx(sin(i)-sin(θ)), on trouve l'expression suivante :

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\left[\frac{\pi a}{\lambda}\left(i - \frac{x'}{f'}\right)\right]}{\frac{\pi a}{\lambda}\left(i - \frac{x'}{f'}\right)} \right)^2$$ avec la lentille. La tache de diffraction est alors décalée par rapport à la précédente. Le maximum se trouve en $x' = f' * i$.

d) Si θ représente la position angulaire, comme θ est petit alors $\sin\theta = \theta$ et donc



$$I = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a \theta_0}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a \theta_0}{\lambda}} \right)^2$$

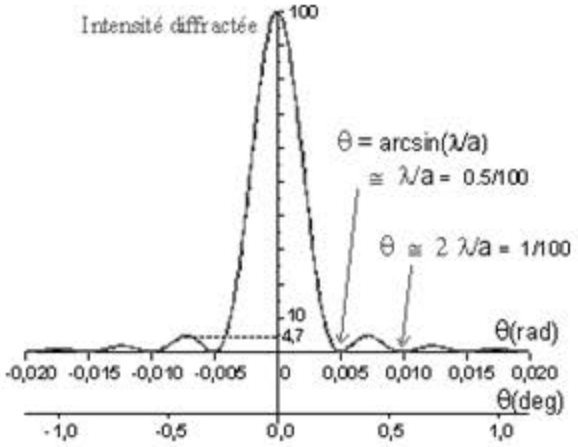
Pour θ_0, $I = \frac{I_0}{2}$

d'après la figure $\Rightarrow$ la valeur de la fonction a mi-hauteur :

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi a \theta_0}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a \theta_0}{\lambda}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{ ceci implique } \frac{\pi a \theta_0}{\lambda} = \pm 1,4 \text{rd}$$

Donc

$$a = 1,4 \frac{\lambda}{\pi \theta_0} = \frac{1,4\ 0,5\ 10^{-6}}{3,14\ \frac{5\ 10^{-3}}{2}} = \frac{1,40\ 10^{-3}}{5\ 3,14} = \frac{1,4}{15,7} 10^{-3} = 0,089\ 10^{-3} \text{m} \approx 0,1 \text{mm}$$



<u>Exercice 2 :</u>

1. Établir la relation entre L et D qui a permis de calculer θ pour chacun des fils.

$$\tan\theta = \theta(\text{rad}) = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)}{D} \Rightarrow \boxed{\theta(\text{rad}) = \frac{L}{2D}}$$

2. Donner la relation liant θ, λ et a. Préciser les unités de ces trois grandeurs.

$\boxed{\theta(\text{rad}) = \frac{\lambda}{a}}$ θ en rad, λ et a avec la même unité de longueur.

3. En annexe, on a construit la représentation graphique de la fonction $\theta = f\left(\frac{1}{a}\right)$.

Montrer que la courbe obtenue est en accord avec l'expression de θ donnée à la question précédente.

La courbe est une droite passant par l'origine : l'écart angulaire θ et $\frac{1}{a}$ sont proportionnels.

On a donc : $\theta = k\,\frac{1}{a}$, ce qui est conforme avec la relation précédente en posant $\lambda = k$.

4.Calculer, à partir de cette courbe, la longueur d'onde λ de la lumière monochromatique utilisée.

La longueur d'onde de la lumière monochromatique utilisée est égale au coefficient directeur de la droite. On choisit les points A et B de coordonnées respectives :

A($4{,}0 \times 10^{4}\ m^{-1}$; $2{,}25 \times 10^{-2}$ rad)

B($5{,}0 \times 10^{4}\ m^{-1}$; $2{,}80 \times 10^{-2}$ rad)

On a donc : $\lambda = \frac{(2{,}80 - 2{,}25) \times 10^{-2}}{(5{,}0 - 4{,}0) \times 10^{4}}$ = **$5{,}5 \times 10^{-7}$ m** ou **$5{,}5 \times 10^{1}$ nm**

5.On réalise la même étude expérimentale en utilisant une lumière blanche. On observe que les bords de la tache centrale sont irisés. Expliquer ce phénomène en utilisant la réponse donnée à la question 2.

La lumière blanche est constituée de radiations monochromatiques de longueurs d'onde différentes. La relation de la question 2 montre que si a = Cte, alors θ dépend de λ: chacune des radiations aura donc un écart angulaire particulier et la lumière blanche sera décomposée, d'où l'irisation (séparation des couleurs) sur les bords de la tache centrale.