Série 1

Exercice 1 :

Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on note M_N le sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ formé des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} x_n = 0$.

1. Montrer que l'application $(x_n)_n \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{N} x_k$ est linéaire continue de $\ell^2(\mathbb{N},\ \mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$.
   Que peut-on en déduire sur M_N? Conclure que $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = M_N \oplus M_N^{\perp}$.
2. Soit $E = \{(y_n)_n :\ \text{pour } 0 \leq i < j \leq N,\ \text{on ait } y_i = y_j \text{ et } y_n = 0 \text{ pour } n > N\}$.
   a) Montrer que l'orthogonal $M_N^{\perp}$ de M_N contient E.
   b) Montrer que $M_N^{\perp} = E$ (remarquer que, pour $0 \leq i < j \leq N$, la suite (x_n) telle que $x_i = 1$, $x_j = -1$ et $x_n = 0$ si $n \neq i$ et $n \neq j$ appartient M_N).

Exercice 2 :

Déterminer une expression de la projection sur la boule unité fermée de H.

Exercice 3 :

Soit $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. On note $C = \{x = (x_n) \in H;\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geq 0\}$.

1. Démontrer que C est convexe fermé.
2. Déterminer la projection sur ce convexe C.
3. Reprendre la question précédente avec $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

Exercice 4 :

Soit H un espace de Hilbert, et F un sous-espace fermé de H, non réduit à $\{0\}$. On note p la projection orthogonale de H sur F. Démontrer que :

1. $p \circ p = p$.
2. $\forall (x, y) \in H^2,\ \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$.
3. $\|p\| = 1$.

Exercice 5 :

Soit H un espace de Hilbert, et F un sous-espace fermé de H, non réduit $\{0\}$. On note p la projection orthogonale de H sur F. Si x est un élément de H, on appelle distance de x F la quantité

$$d(x, F) = \inf\{\|x - y\|;\ y \in F\}.$$

1. Montrer que $d(x, F) = \|x - p(x)\|$.

2. Montrer que $d(x, F) = \max\{| < x, z > |;\ z \in F^{\perp} \text{ et } \|z\| = 1\}$.

3. On suppose dans cette question que F est un sous-espace de dimension finie, et on note $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de F.

   a) Quel résultat du cours assure l'existence d'une telle base orthonormale?

   b) Déterminer en fonction de e_1,...,e_n, l'expression de $p(x)$.

   c) En déduire la valeur de :

$$\inf\left\{\int_0^1 |t^2 - at - b|^2 dt;\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\right\}.$$

4. On suppose désormais que F est un sous-espace de dimension infinie. Justifier que F possède une base hilbertienne, puis exprimer $p(x)$ en fonction de cette base.

5. On suppose désormais que $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Pour n un entier fixé, on pose

$$M = \left\{x \in H;\ \sum_{k=0}^{n} x_k = 0\right\}.$$

   Vérifier que M est un sous-espace fermé de H. Chercher un sous-espace N tel que $M \oplus N = H$. Donner la distance de l'élément $(1, 0, 0, ...)$ à M.

<u>Exercice 6 :</u>

Dire si les suites suivantes sont convergentes dans ℓ^2, et si c'est le cas, calculer leur limite.

1. $x(n) = (\frac{1}{n}, 0, 0, 0, \ldots)$,

2. $x(n) = (1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, 0, 0, \ldots)$,

3. $x(n) = (1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, \ldots, 1/\sqrt{n}, 0, 0, \ldots)$,

4. $x(n)_m = 1$ si $n = m$, 0 sinon,

5. $x(n)_m = \frac{1}{m} + \frac{1}{nm^3}$,

6. $x(n)_m = \frac{1}{m} + \frac{1}{nm^{1/3}}$.

<u>Exercice 7 :</u>

Prouver que la boule unit ferme de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ n'est pas compacte.

<u>Exercice 8 :</u>

On se propose de démontrer que l'espace $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est complet pour la norme usuelle issue du produit scalaire,

$$\|x\| = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^2\right)^{1/2}.$$

Soit $(v(n))_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Etant donné $\epsilon > 0$, il existe donc $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que, si $n, l \geq N(\epsilon)$, alors : $\|v(n) - v(l)\| \leq \epsilon$.

1. Montrer que l'on a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tous $n, l \geq N(\epsilon)$, $|v(n)_k - v(l)_k| \leq \epsilon$.

2. Montrer que $\lim_{n\to\infty} v(n)_k = v_k$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\sum_{k\geq K} v(N(\epsilon))_k^2\right)^{1/2} \leq \epsilon$.

4. Montrer que pour tout $L \geq K$, on a $\left(\sum_{L\geq k\geq K} v_k^2\right)^{1/2} \leq 2\epsilon$.

5. En déduire que l'on a $v \in \ell^2(\mathbb{N})$, que $\lim_{n\to\infty} \|v(n) - v\| = 0$ et donc que l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ est complet pour la norme $\|\cdot\|$.

Exercice 9 :

Soit H un espace de Hilbert, et T une application linéaire continue sur H. Montrer les relations suivantes :

1. $\ker(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$.

2. $\mathrm{Im}(T^*) \subset \ker(T)^\perp$.

Exercice 10 :

1. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes et T l'application linéaire de $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ dans lui-même définie par $T(x) = (\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. Vérifier que T est continue, et calculer son adjoint.

2. Soit S l'application de $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ dans lui-même définie par $S(x) = (0, x_0, x_1, \ldots)$. Vérifier que S est continue et calculer son adjoint.

Exercice 11 :

Soit $H = L^2([0,1])$. Pour $f \in H$, on pose $Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que T est un opérateur continu sur H.

2. Calculer l'adjoint de T.

Exercice 12 :

Soit E l'espace préhilbertien des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n = 0$$

muni du produit scalaire $< u, v >= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \overline{v_n}$.

1. Montrer que l'application $\phi : E \to \mathbb{C}$ définie par $\phi(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n}$ est une forme linéaire continue sur E.

2. Existe-t-il un élément a de E tel que, pour tout u de E, on ait $\phi(u) = \langle u, a\rangle$?

3. Que peut-on en déduire sur E?