Chapitre 1:
Séries Numériques

Hamid Boua
Faculté pluridisciplinaire-Nador-
Module: Analyse 2
SMP-SMC

1er mai 2021

Sommaire

Sommaire

Le but est de donner un sens précis à une somme infinie de termes. Soit u_n, $n \geq 0$, une suite réelle. On pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, la somme des premiers termes jusqu'a l'ordre n.

Définition

On appelle série attachée à la suite u_n et on la note par $\sum u_n$, la suite S_n définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

u_n est appelé le terme général de la série.

La série associée à u_n est notée par $\sum u_n$ ou bien par $u_0 + u_1 + ... + u_n + ...$

Le but est de donner un sens précis à une somme infinie de termes. Soit u_n, $n \geq 0$, une suite réelle. On pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, la somme des premiers termes jusqu'a l'ordre n.

Définition

On appelle série attachée à la suite u_n et on la note par $\sum u_n$, la suite S_n définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

u_n est appelé le terme général de la série.

La série associée à u_n est notée par $\sum u_n$ ou bien par $u_0 + u_1 + ... + u_n + ...$

Définition

a) La série $\sum u_n$ est dite convergente si la suite S_n a une limite finie quand $n \mapsto +\infty$. Dans ce cas $S = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} S_n$ est appelée la somme de la série, on la note par $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$. On dit aussi que la série $\sum u_n$ converge et sa somme est S.

b) La série $\sum u_n$ est dite divergente si la suite S_n n'a pas de limite finie (c'est-à dire S_n n'a pas de limite, ou bien admet une limite infinie)

Définition

a) La série $\sum u_n$ est dite convergente si la suite S_n a une limite finie quand $n \mapsto +\infty$. Dans ce cas $S = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} S_n$ est appelée la somme de la série, on la note par $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$. On dit aussi que la série $\sum u_n$ converge et sa somme est S.

b) La série $\sum u_n$ est dite divergente si la suite S_n n'a pas de limite finie (c'est-à dire S_n n'a pas de limite, ou bien admet une limite infinie)

Exemples

1) Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{3^n}$, $n > 0$. On a :

$S_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}$.

$S_n = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{1}{3^n})$, donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} S_n = \dfrac{1}{2}$.

Donc la série $\sum \frac{1}{3^n}$ est convergente de somme $\dfrac{1}{2}$.

2) Série harmonique. C'est la série dont le terme général est de la forme $u_n = \dfrac{1}{n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Cette série n'est pas convergente.

Exemples

1) Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{3^n}$, $n > 0$. On a :

$S_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}$.

$S_n = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{1}{3^n})$, donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} S_n = \dfrac{1}{2}$.

Donc la série $\sum \frac{1}{3^n}$ est convergente de somme $\dfrac{1}{2}$.

2) Série harmonique. C'est la série dont le terme général est de la forme $u_n = \dfrac{1}{n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Cette série n'est pas convergente.

Définition : Nature et Caractère

Déterminer la nature ou le caractère d'une série c'est déterminer si elle est convergente ou divergente

Définition : Série déinie à partir d'un certain rang

Soit $(u_n)_{n\geq p}$ une suite définie à partir de p. On pose $S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k$. On dit que la série $\sum_{n\geq p} u_n$ converge si et seulement si la suite S_n admet une limite finie.

Définition : Nature et Caractère

Déterminer la nature ou le caractère d'une série c'est déterminer si elle est convergente ou divergente

Définition : Série déinie à partir d'un certain rang

Soit $(u_n)_{n \geq p}$ une suite définie à partir de p. On pose $S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k$. On dit que la série $\sum_{n \geq p} u_n$ converge si et seulement si la suite S_n admet une limite finie.

Définition

Soit $\sum u_n$ une série qui converge, et soit S sa somme. On pose $R_n = S - S_n$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et on la note par $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_k$. R_n est appelée le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$. On a $\lim_{n \mapsto +\infty} R_n = 0$

Proposition

a) Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n \mapsto +\infty} u_n = 0$.

b) La réciproque est fausse : La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge malgré que $\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Définition

Soit $\sum u_n$ une série qui converge, et soit S sa somme. On pose $R_n = S - S_n$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et on la note par $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_k$. R_n est appelée le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$. On a $\lim_{n \mapsto +\infty} R_n = 0$

Proposition

a) Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n \mapsto +\infty} u_n = 0$.

b) La réciproque est fausse : La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge malgré que $\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Proposition

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent et leurs sommes S et S', alors on :

a) La série $\sum(u_n + v_n)$ converge et sa somme est $S + S'$.

b) La série $\sum(\lambda u_n)$ converge et sa somme est λS, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque

$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, les séries $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature. En effet : si $\sum u_n$ converge alors la série $\sum \lambda u_n$ converge. Réciproquement, si la série $\sum \lambda u_n$ converge alors la série $\sum \lambda^{-1} \lambda u_n$ converge, c-à-d la série $\sum u_n$ converge.

Proposition

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent et leurs sommes S et S', alors on :

a) La série $\sum (u_n + v_n)$ converge et sa somme est $S + S'$.

b) La série $\sum (\lambda u_n)$ converge et sa somme est λS, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque

$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, les séries $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature. En effet : si $\sum u_n$ converge alors la série $\sum \lambda u_n$ converge. Réciproquement, si la série $\sum \lambda u_n$ converge alors la série $\sum \lambda^{-1} \lambda u_n$ converge, c-à-d la série $\sum u_n$ converge.

Cas particuliers

a) Soit $\sum u_n$ une série telle que $u_n = a_n - a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\text{la série } \sum u_n \text{ converge} \iff \text{la suite } a_n \text{ converge.}$$

Dans ce cas, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = a_0 - \lim_{n\to\infty} a_n$.

Exemple : $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ on a $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. On pose $a_n = \dfrac{1}{n}$ on a $u_n = a_n - a_{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ donc la série $\sum u_n$ converge et on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = a_1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = a_1 = 1$$

b) Série géométrique.

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}$. On appelle série géométrique de premier terme a et de raison q, la série $q^n a$, c-à-d, la série : $a + qa + q^2 a + ... + q^n a + ...$

La série $\sum q^n a$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n a = \frac{a}{1-q} \text{ donc } \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \text{ si } |q| < 1.$$

Sommaire

Définition

Une série u_n est dite à termes positifs si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 0$.

Proposition

Pour qu'une série $\sum u_n$ à termes positifs converge, il faut et il suffit que sa somme partielle S_n soit majorée.

Définition

Une série u_n est dite à termes positifs si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 0$.

Proposition

Pour qu'une série $\sum u_n$ à termes positifs converge, il faut et il suffit que sa somme partielle S_n soit majorée.

Théorème : (Critère de comparaison des séries)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, tel que $0 \leq u_n \leq v_n \; \forall n \in \mathbb{N}$, alors on a :

1. Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge,
2. Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Exemples

1) $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$, donc la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge car la série $\sum \dfrac{1}{n(n-1)}$ est converge.

2) $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, donc la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

Définition

On dit que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont équivalente et on note $u_n \sim_\infty v_n$ quand $n \mapsto +\infty$ si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$

Proposition

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs avec $u_n \sim v_n$ quand $n \mapsto +\infty$, alors on a :

$$\sum u_n \text{ est convergente} \iff \sum v_n \text{ est convergente.}$$

Définition

On dit que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont équivalente et on note $u_n \sim_\infty v_n$ quand $n \mapsto +\infty$ si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$

Proposition

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs avec $u_n \sim v_n$ quand $n \mapsto +\infty$, alors on a :

$$\sum u_n \text{ est convergente} \Longleftrightarrow \sum v_n \text{ est convergente.}$$

Proposition : (Critère de Cauchy)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ alors :

1. Si $l < 1$: la série $\sum u_n$ converge.
2. Si $l > 1$: la série $\sum u_n$ diverge.
3. Si $l = 1$: ce critère ne donne rien.

Exemple

Pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = (a + \frac{1}{n})^n$. Trouver la nature de la série $\sum u_n$.

• On a $\sqrt[n]{u_n} = a + \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$.

$\star$ Si $a > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
$\star$ Si $a < 1$ alors $\sum u_n$ converge.

$\star$ Si $a = 1$ alors $u_n = (a + \frac{1}{n})^n = e^{n \log(1+\frac{1}{n})}$, $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = e \neq 0$ donc $\sum u_n$ diverge.

Proposition : (Critère de d'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$

1. Si $l < 1$: la série $\sum u_n$ converge ;
2. Si $l > 1$: la série $\sum u_n$ diverge.

$\triangle$ Si $l = 1$, ce critère ne donne rien.

Exemple

a) $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$ on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^n}{n^n} = (\dfrac{n+1}{n})^n = e^{n\log(1+\frac{1}{n})}$.
$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e > 1$ d'où $\sum u_n$ diverge.

b) $u_n = \dfrac{b^n}{n!}$ avec $b > 0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{b}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$ donc $\sum u_n$ converge.

Proposition : (Série de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

Exemple

a) $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$ on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^n}{n^n} = (\dfrac{n+1}{n})^n = e^{n\log(1+\frac{1}{n})}$.

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e > 1$ d'où $\sum u_n$ diverge.

b) $u_n = \dfrac{b^n}{n!}$ avec $b > 0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{b}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$ donc $\sum u_n$ converge.

Proposition : (Série de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

Sommaire

Définition

La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Proposition

Si la série est absolument convergente alors elle est convergente.

Remarque :

i) La réciproque de la proposition précédente est fausse.

ii) Ce résulat, permet parfois de ramener le problème à l'étude de série à termes positifs.

Définition

La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Proposition

Si la série est absolument convergente alors elle est convergente.

Remarque :

i) La réciproque de la proposition précédente est fausse.

ii) Ce résulat, permet parfois de ramener le problème à l'étude de série à termes positifs.

a) Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^4}$ on a $|u_n| = \dfrac{1}{n^4}$, la série $\sum \dfrac{1}{n^4}$ converge, donc la série $\sum u_n$ absolument convergente donc converge.

b) Soit $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ on a $|v_n| = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. La série $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge, donc la série $\sum v_n$ n'est pas absolument convergente.

Exemples

a) Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^4}$ on a $|u_n| = \dfrac{1}{n^4}$, la série $\sum \dfrac{1}{n^4}$ converge, donc la série $\sum u_n$ absolument convergente donc converge.

b) Soit $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ on a $|v_n| = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. La série $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge, donc la série $\sum v_n$ n'est pas absolument convergente.

Définition

La série $\sum u_n$ est dite altermée si on a :

$$u_n = (-1)^n v_n, \forall n \in \mathbb{N} \text{ avec } v_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

ou bien si on a :

$$u_n = (-1)^{n+1} v_n \text{ avec } v_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Théorème (de Leibnitz)

Soit $\sum (-1)^n u_n$ une série alternée avec $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Si la suite u_n est décroissante et si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = 0$, alors la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente et on a $|R_n| \leq u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ où $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$

Exemple :

Etudier la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

C'est une série alternée, on a $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est décroissante et $\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc par le Théorème de Leibnitz, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

Définition

Une série qui converge sans être absolument convergente est dite semi-convergente.

Ex : $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$