Exercice 1
Montrer que

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n(n^2-1) \equiv 0$ [3].
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n(n^4-1) \equiv 0$ [5].
3. $\forall n \in \mathbb{Z}, n^7 \equiv n$ [42].
4. $\forall a \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $a^{13} - a \equiv 0$ [546].

Exercice 2
1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^4 \equiv 81$ [73].
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les deux équations : $x^{17} \equiv 3$ [19] et $x^{14} \equiv 1$ [19].
3. Déterminer tous les couples $(a,b) \in (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^2$ tels que $a^2 + b^2 = \overline{0}$.
4. Désignons par $\overline{a}$ la classe modulo $n \geqslant 2$ d'un élément $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\overline{a}$ est régulier si, et seulement si, il est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
5. Déterminer les entiers relatifs n tels que $2n^2 + 13n + 20 \equiv 0 \pmod 9$.
6. Soit p un entier premier, déterminer les diviseurs de $\overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

Exercice 3
On rappelle que l'indicatrice d'Euler est le cardinal de l'ensemble suivant :

$$\varphi(n) = \mathrm{card}(\{a \mid 1 \leqslant a \leqslant n \text{ et } \mathrm{pgcd}(a,n) = 1\}).$$

1. Rappelez le lien entre $\varphi(n)$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Montrer que si n est impair, alors $\varphi(2n) = \varphi(n)$.
3. Montrer que si n est pair, alors $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$.
4. Montrer que $\varphi(3n) = 3\varphi(n)$ si et seulement si $n \equiv 0 \pmod 3$.
5. Montrer que $\varphi(n) = \frac{n}{2}$ si et seulement si $n = 2^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4
Soit n un entier naturel, et soit $d \in \mathbb{N}$ un diviseur de n. Posons $S_d = \{a \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant a \leqslant n \text{ et } a \wedge n = d\}$ et $T_d = \{k\frac{n}{d} \mid 1 \leqslant k \leqslant d \text{ et } k \wedge d = 1\}$.

1. Montrer que les ensembles $(S_d)_{d|n}$ forment une partition de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$.
2. Montrer que $S_{\frac{n}{d}} = T_d$. Déduire que $\displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Exercice 5
1. Déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre 4.
2. Soit k un corps. Montrer que tout morphisme d'anneaux f de k dans un anneau B est injectif.
3. Soit A un anneau intègre fini contenant au moins 2 éléments. Montrer que A est un corps.

Exercice 6
1. Montrer que si x est un entier impair, alors $x^2 \equiv 1 \pmod 8$.
2. Déduire que $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ n'est pas cyclique.