



UNIVERSITÉ MOHAMED PREMIER  
FACULTÉ PLURIDISCIPLINAIRE DE NADOR

---

# TRAVAUX DIRIGÉS D'ÉLECTROMAGNÉTISME AVEC CORRECTIONS

FILIÈRES

SMPC, SMA (S3)  
SMI (S4)

2015-2016

---

NAJIM MANSOUR  
PR. RACHID EL BOUAYADI

---

Version révisée.

## Série N° 1 : Circuits électriques en régime non-stationnaire

### Exercice 1. Décharge d'un condensateur.

Un condensateur de capacité  $C = 40\mu\text{F}$  a une charge initiale  $Q = 50\mu\text{C}$ . On laisse ce condensateur se décharger à travers un conducteur ohmique de résistance  $R = 8\text{ k}\Omega$ .

1. Etablir l'équation donnant la loi de variation de la charge du condensateur en fonction du temps.
2. Déterminer l'intensité du courant et la charge du condensateur à l'instant  $t = 10\text{ ms}$ .
3. Déterminer la puissance électrique dissipée dans le conducteur ohmique à l'instant  $t = 10\text{ ms}$ .
4. Calculer la durée nécessaire pour que l'énergie stockée dans le condensateur atteigne 10% de sa valeur initiale.

Corrigé :

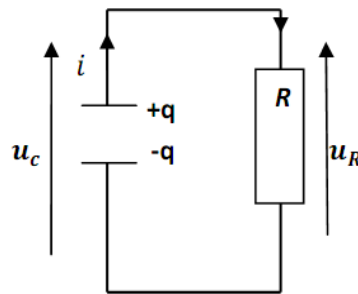


Figure 1

- 1) La tension aux bornes du condensateur est :  $u_C = \frac{q}{C}$

La tension aux bornes de la résistance est (Loi d'Ohm) :  $u_R = Ri = -R \frac{dq}{dt}$  ( $i = -\frac{dq}{dt}$ ,  $i$  sort de l'armature  $+q$ , voir votre polycopié du cours).

La loi des mailles s'écrit :  $u_R = u_C$

On trouve une équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients constants et sans 2<sup>ème</sup> membre:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0 \quad (1)$$

L'équation (1) est de solution générale :

$$q(t) = Ae^{\alpha t}$$

On remplace la solution générale de  $q(t)$  dans l'équation différentielle, on trouve :

$$A \cdot \alpha \cdot e^{\alpha t} + \frac{A}{RC} \cdot e^{\alpha t} = 0$$

$$A \left( \alpha + \frac{1}{RC} \right) e^{\alpha t} = 0$$

Puisque  $A$  est différent de zéro, on a  $\alpha + \frac{1}{RC} = 0$  ce qui donne  $\alpha = -\frac{1}{RC}$ .

Pour déterminer la constante  $A$  on utilise la condition initiale  $q(t=0) = Q$ .

La solution générale à l'instant  $t = 0$  est :  $q(t=0) = A \cdot e^0 = Q$  d'où  $A = Q$ .

Finalement, on trouve la solution générale :  $q(t) = Q \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$

L'équation (1) peut également se résoudre directement :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\int \frac{dq}{q} = \int -\frac{dt}{RC}$$

$$\int_{q(t=0)=Q}^{q(t)} \frac{dq}{q} = \int_{t=0}^t -\frac{dt}{RC}$$

$$\int_{q(t=0)=Q}^{q(t)} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_{t=0}^t dt$$

$$\ln(q(t)) - (\ln(Q)) = -\frac{1}{RC}(t - 0)$$

$$\ln\left(\frac{q(t)}{Q}\right) = -\frac{1}{RC}t$$

$$\frac{q(t)}{Q} = e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$q(t) = Q \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

2)

- La charge du condensateur à l'instant  $t = 10 \text{ ms}$  :

$$A.N.: q(t = 10 \text{ ms}) = 50 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-\frac{10 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 10^{-6}}} = 48,4 \mu\text{C}$$

- L'intensité du courant à l'instant  $t = 10 \text{ ms}$  :

$$i = -\frac{dq}{dt} = \frac{Q}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\rightarrow A.N.: i(t = 10 \text{ ms}) = \frac{50 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 10^{-6}} e^{-\frac{10 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 10^{-6}}} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ A.}$$

3) La puissance dissipée par effet Joule :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t)$$

$$\rightarrow A.N.: p(t = 10 \text{ ms}) = 8 \cdot 10^3 \cdot (1,5 \cdot 10^{-4})^2 = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ W}$$

4) L'énergie stockée dans le condensateur est :

$$E_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} e^{-2t/RC}$$

La durée nécessaire pour que l'énergie stockée dans le condensateur atteigne 10% :

$$E_C(t=0) = \frac{Q^2}{2C} \rightarrow 100\%$$

$$E_C(t) = \frac{Q^2}{2C} e^{-2t/RC} \rightarrow 10\% \text{ de } E_C(t=0)$$

$$\frac{Q^2}{2C} e^{-2t/RC} = 0,1 \cdot \frac{Q^2}{2C} \rightarrow e^{-2t/RC} = 0,1 \rightarrow -\frac{2 \cdot t}{R \cdot C} = \ln(0,1)$$

Ce qui donne :  $t = \frac{-RC}{2} \cdot \ln(0,1) = 368 \text{ ms}$

### Exercice 2. Oscillation d'un circuit L, C.

Un condensateur de capacité  $C = 10\mu\text{F}$  a une charge initiale  $Q = 60 \mu\text{C}$ . A l'instant  $t = 0$ , on branche ce condensateur à une bobine de résistance négligeable et d'inductance  $L = 8 \text{ mH}$ .

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la charge du condensateur.
2. Déduire la loi de variation de la charge du condensateur en fonction du temps.
3. Calculer la fréquence des oscillations obtenues.
4. Quelle est l'intensité maximale du courant dans la bobine.
5. A quel instant l'énergie stockée est-elle pour la première fois répartie de façon égale entre la bobine et le condensateur.

Corrigé :

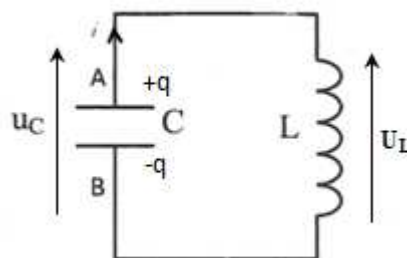


Figure 2

- 1) L'équation donnant la loi de variation de la charge du condensateur en fonction du temps :

On a :  $u_C = \frac{q}{C}$  et  $u_L = L \frac{di}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}$  (le sens de  $i$  est toujours de l'armature  $+q$  vers  $-q$ )

$$u_L = u_C \rightarrow -L \frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{q}{C}$$

Ce qui donne l'équation différentielle donnant la loi de variation de  $q(t)$ :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$$

2) La loi de variation de la charge du condensateur en fonction du temps

- L'équation (1) est une équation différentielle d'ordre 2, sa solution s'écrit sous la forme  $q(t) = e^{r.t}$ , où  $r$  est solution de l'équation caractéristique :  $r^2 + \frac{1}{LC} = 0$

Comme pour toute équation du second degré, trois cas se présentent selon le signe du discriminant  $\Delta$ .

$$\text{Ici, } \Delta = b^2 - 4.a.c = 0 - 4.\frac{1}{LC} = -\frac{4}{LC} < 0$$

L'équation ne possède pas de solutions réelles mais deux solutions complexes :  $r_1$  et  $r_2$  conjuguées l'une de l'autre.

$$r_1 = \frac{-b - j\sqrt{|\Delta|}}{2.a} = 0 - j\frac{1}{\sqrt{LC}} = \lambda - j\omega_0 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + j\sqrt{|\Delta|}}{2.a} = 0 + j\frac{1}{\sqrt{LC}} = \lambda + j\omega_0$$

Donc ici  $\lambda = 0$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $\omega^2 = \omega_0^2 + \lambda^2 \rightarrow \omega = \omega_0$ .

La solution est donnée par :

$$q(t) = e^{\lambda.t}(A.\cos(\omega.t) + B.\sin(\omega.t)) = A.\cos(\omega_0.t) + B.\sin(\omega_0.t), \quad \text{car } \lambda = 0.$$

$$\rightarrow \begin{cases} q(t) = A.\cos(\omega_0.t) + B.\sin(\omega_0.t) \\ i = -\frac{dq}{dt} = \omega_0.A.\sin(\omega_0.t) - \omega_0.B.\cos(\omega_0.t) \end{cases}$$

Pour déterminer les constantes  $A$  et  $B$ , on utilise les conditions initiales (C.I.) :

$$\text{C.I.} \rightarrow \begin{cases} q(t=0) = Q \\ i(t=0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q(t=0) = Q = A \\ i(t=0) = 0 = -\omega_0.B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = Q \\ B = 0 \end{cases}$$

Donc :  $q(t) = Q.\cos(\omega_0.t)$  et  $i(t) = \omega_0.Q.\sin(\omega_0.t)$

3) La fréquence des oscillations obtenues :  $f = \frac{\omega}{2\pi}$

Dans cet exercice, on a  $\omega = \omega_0$  car  $\lambda = 0$ , donc la fréquence des oscillations est :

$$f = f_0 = \frac{\omega_0}{2.\pi} = \frac{1}{2.\pi.\sqrt{LC}} = 563 \text{ Hz.}$$

4) Le courant  $i$  est maximum lorsque  $\sin(\omega_0.t) = 1 \rightarrow i = I_{\max} = \omega_0.Q = \frac{Q}{\sqrt{LC}} = 0,21 \text{ A.}$

5)

- L'énergie stockée dans le condensateur est :  $E_c = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}.\cos^2(\omega_0.t),$
- L'énergie stockée dans la bobine est :

$$E_L(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \omega_0^2 \cdot Q^2 \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t)$$

Il ya égalité entre les énergies :

$$E_C = E_L \rightarrow \frac{Q^2}{2C} \cos^2(\omega_0 \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \omega_0^2 \cdot Q^2 \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \frac{1}{L \cdot C} \cdot Q^2 \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t)$$

→  $\cos^2(\omega_0 \cdot t) = \sin^2(\omega_0 \cdot t)$ . Ceci est vérifié pour la première fois lorsque  $\omega_0 \cdot t = \frac{\pi}{4}$

$$\rightarrow t = \frac{\pi}{4} \sqrt{LC} = 0,22 \text{ ms}$$

### Série N°1 (suite)

## Rappel mathématique nécessaire pour l'exercice 3

### I. Circuit linéaire en régime Sinusoïdal

Nous allons étudier la réponse des circuits soumis à un signal  $i(t)$  ou  $u(t)$  de forme sinusoïdale.

#### I.1 Signal sinusoïdal

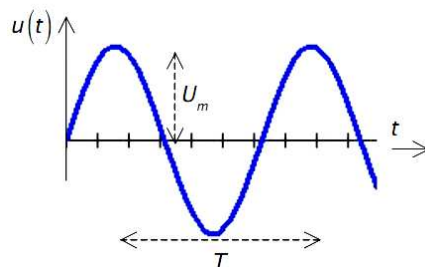
Nous allons travailler avec la tension  $u(t)$ , nous pourrions faire la même chose avec le courant  $i(t)$ . Une tension sinusoïdale, s'écrit sous la forme :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$U_m$  = amplitude (en **V**),  $\omega$  = pulsation (en **rad.s<sup>-1</sup>**)

$\varphi$  Phase à l'origine (sans unité). La période  $T$  (en **s**) de ce signal et la fréquence  $f$  (en **Hz**) sont reliées à la pulsation par :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$



**Figure 3**

Nous travaillons avec la fonction cosinus mais nous pouvons utiliser, de façon équivalente, la fonction sinus. La différence entre les deux fonctions correspond simplement à un déphasage de  $\frac{\pi}{2}$ .

➤ Périodicité :  $u(t + T) = u(t)$

$$u(t + T) = U_m \cos(\omega(t + T) + \varphi) \\ = U_m \cos(\omega t + \omega T + \varphi) = U_m \cos(\omega t + 2\pi + \varphi) = U_m \cos(\omega t + \varphi) = u(t)$$

Car la fonction cosinus est périodique de période  $2\pi$ .

## I-2 Différence de phase entre deux fonctions sinusoïdales de même période

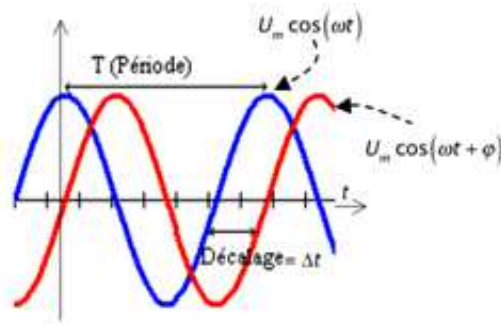


Figure 4

Soit  $u_1 = U_{1m} \cos(\omega \cdot t_1 + \varphi_1)$  et  $u_2 = U_{2m} \cos(\omega \cdot t_2 + \varphi_2)$  deux signaux synchrones.  $u_1$  et  $u_2$  sont maximales quand  $\omega \cdot t_1 + \varphi_1 = \omega \cdot t_2 + \varphi_2 = 0$  soit  $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{\omega} (\varphi_1 - \varphi_2)$ .

On retiendra le résultat pratique suivant :  $\Delta \varphi = \frac{2\pi}{T} \Delta t$

### Rappels de trigonométrie

$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$	$\sin(\omega t \pm \pi) = -\sin(\omega t)$	$\sin\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos(\omega t)$
$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$	$\cos(\omega t + \pi) = -\cos(\omega t)$	$\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin(\omega t)$

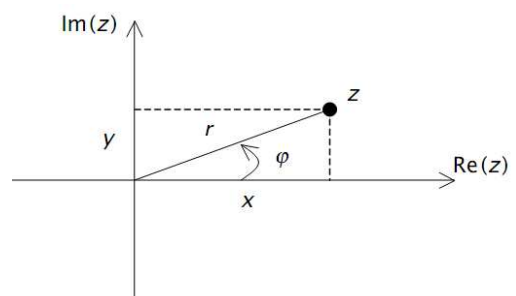
## I-3 Représentation complexe d'un signal sinusoïdal

### ✓ Rappels sur les nombres complexes

En sciences physiques, il est d'usage d'écrire  $j^2 = -1$  car la lettre  $i$  est déjà utilisée pour désigner l'intensité du courant électrique.

Soit  $z$  un nombre complexe, on peut l'écrire sous trois formes équivalentes :

- ✓ Forme rectangulaire :  $z = x + jy$
- ✓ Forme polaire :  $z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$
- ✓ Forme exponentielle :  $z = r e^{j\varphi}$



Le module : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$	la phase : $\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$	$x = r \cos \varphi$ ; $y = r \sin \varphi$
---------------------------------------	---	--

- Si  $z = z_1 z_2$  alors  $z = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$
- $z = \frac{z_1}{z_2}$  alors  $z = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$
- $\bar{z} = r e^{-j\varphi} = x - jy$
- $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$

✓ La somme de deux fonctions sinusoidales de même  $\omega$

On considère deux fonctions de même période et ayant par conséquent même  $\omega$  :

$$u_1 = U_{1m} \cos(\omega.t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad u_2 = U_{2m} \cos(\omega.t + \varphi_2)$$

La somme de deux fonctions sinusoidales de même période est une fonction sinusoidale de même  $\omega$ .

$$u = u_1 + u_2 = U_m \cdot \cos(\omega.t + \varphi)$$

Détermination de  $U_m$  et  $\varphi$ .

✓ Utilisation des nombre complexes

$$U_m \cdot \cos(\omega.t + \varphi) = U_{1m} \cos(\omega.t + \varphi_1) + U_{2m} \cos(\omega.t + \varphi_2)$$

On utilise les nombre complexe,

$$U_m \cdot e^{j(\omega.t + \varphi)} = U_{1m} \cdot e^{j(\omega.t + \varphi_1)} + U_{2m} \cdot e^{j(\omega.t + \varphi_2)}$$

$$U_m \cdot e^{j\omega.t} \cdot e^{j\varphi} = U_{1m} \cdot e^{j\omega.t} \cdot e^{j\varphi_1} + U_{2m} \cdot e^{j\omega.t} \cdot e^{j\varphi_2}$$

$$U_m \cdot e^{j\varphi} = U_{1m} \cdot e^{j\varphi_1} + U_{2m} \cdot e^{j\varphi_2} \quad (1)$$

Le module au carré de (1) est :

$$|U_m \cdot e^{j\varphi}|^2 = |U_{1m} \cdot e^{j\varphi_1} + U_{2m} \cdot e^{j\varphi_2}|^2$$

$$(U_m \cdot e^{j\varphi}) \cdot (U_m \cdot e^{-j\varphi}) = (U_{1m} \cdot e^{j\varphi_1} + U_{2m} \cdot e^{j\varphi_2}) \cdot (U_{1m} \cdot e^{-j\varphi_1} + U_{2m} \cdot e^{-j\varphi_2})$$

$$U_m^2 = U_{1m} \cdot e^{j\varphi_1} \cdot U_{1m} \cdot e^{-j\varphi_1} + U_{1m} \cdot e^{j\varphi_1} \cdot U_{2m} \cdot e^{-j\varphi_2} + U_{2m} \cdot e^{j\varphi_2} \cdot U_{1m} \cdot e^{-j\varphi_1} + U_{2m} \cdot e^{j\varphi_2} \cdot U_{2m} \cdot e^{-j\varphi_2}$$

$$U_m^2 = U_{1m}^2 + U_{1m} \cdot U_{2m} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} + U_{1m} \cdot U_{2m} \cdot e^{-j(\varphi_1 - \varphi_2)} + U_{2m}^2$$

$$U_m^2 = U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + U_{1m} \cdot U_{2m} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - j \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$U_m^2 = U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + 2 \cdot U_{1m} \cdot U_{2m} \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$



$$U_m = \sqrt{U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + 2 \cdot U_{1m} \cdot U_{2m} \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

✓ Détermination de  $\varphi$

A partir de (1) on a :

$$U_m \cdot e^{j\varphi} = U_{1m} \cdot e^{j\varphi_1} + U_{2m} \cdot e^{j\varphi_2}$$

$$U_m \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)) = U_{1m} \cdot (\cos(\varphi_1) + j \cdot \sin(\varphi_1)) + U_{2m} \cdot (\cos(\varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_2))$$

$$U_m \cdot \cos(\varphi) + j \cdot U_m \cdot \sin(\varphi) = U_{1m} \cdot \cos(\varphi_1) + j \cdot U_{1m} \cdot \sin(\varphi_1) + U_{2m} \cdot \cos(\varphi_2) + j \cdot U_{2m} \cdot \sin(\varphi_2)$$

$$\begin{cases} U_m \cdot \cos(\varphi) = U_{1m} \cdot \cos(\varphi_1) + U_{2m} \cdot \cos(\varphi_2) & (2) \\ U_m \cdot \sin(\varphi) = U_{1m} \cdot \sin(\varphi_1) + U_{2m} \cdot \sin(\varphi_2) & (3) \end{cases}$$

En divisant membre à membre (3) par (2) on obtient:

$$\tan(\varphi) = \frac{U_{1m} \cdot \sin(\varphi_1) + U_{2m} \cdot \sin(\varphi_2)}{U_{1m} \cdot \cos(\varphi_1) + U_{2m} \cdot \cos(\varphi_2)}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{U_{1m} \cdot \sin(\varphi_1) + U_{2m} \cdot \sin(\varphi_2)}{U_{1m} \cdot \cos(\varphi_1) + U_{2m} \cdot \cos(\varphi_2)} \right)$$

## II. METHODE DE FRESNEL

On fait correspondre un vecteur tournant à une fonction sinusoïdale.

Ainsi à une grandeur sinusoïdale telle qu'une  $u = U_m \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ , on peut associer un vecteur  $\overrightarrow{OM}$  de norme  $U_m$  tournant à la vitesse angulaire  $\omega$  autour de  $O$ . **C'est la méthode de Fresnel.**

Comme on sait que le vecteur tourne à la vitesse angulaire constante au cours du temps, par convention, le vecteur sera représenté à la date  $t = 0$ . Il fait alors avec  $ox$  un angle  $\varphi$ .

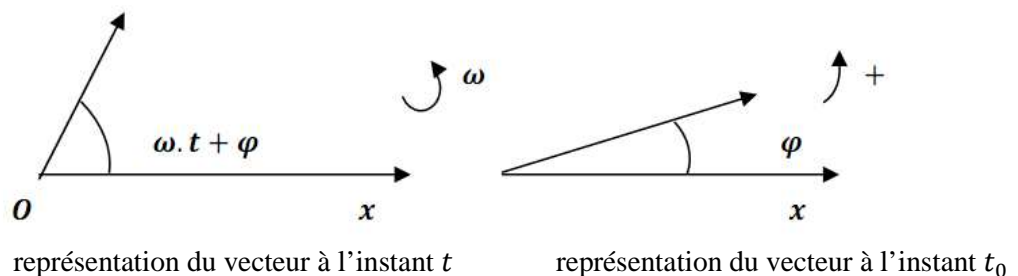


Figure 5

### Exemple

$u_1 = U_{1m} \cos(\omega.t), \quad \varphi_1 = 0$  Est représenté par  $\overrightarrow{OM_1}$

$u_2 = U_{2m} \cos\left(\omega.t + \frac{\pi}{2}\right), \quad \varphi_2 = +\frac{\pi}{2}$  Est représenté par  $\overrightarrow{OM_2}$

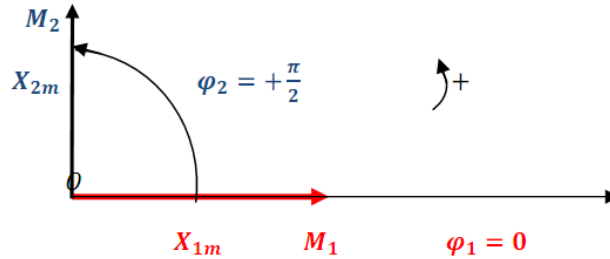


Figure 6

### Déphasage

On considère deux fonctions de même période et ayant par conséquent même  $\omega$  :

$$u_1 = U_{1m} \cos(\omega.t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad u_2 = U_{2m} \cos(\omega.t + \varphi_2)$$

Ces fonctions sont déphasées :  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  est le déphasage on représente les deux vecteurs de Fresnel :

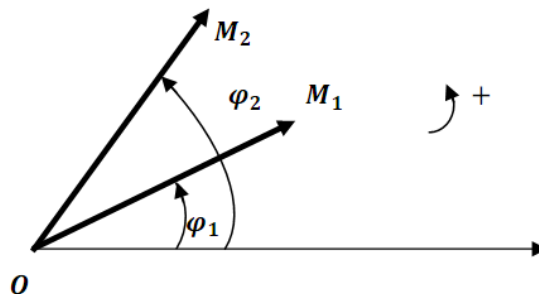


Figure 7

Au cours du temps, les deux vecteurs tournent à la même vitesse.

### Déphasage particuliers

✓ Soit :

$$u_1 = U_{1m} \cos(\omega.t), \quad \varphi_1 = 0 \quad \text{et} \quad u_2 = U_{2m} \cos\left(\omega.t + \frac{\pi}{2}\right), \quad \varphi_2 = +\frac{\pi}{2}$$

Construction de Fresnel :

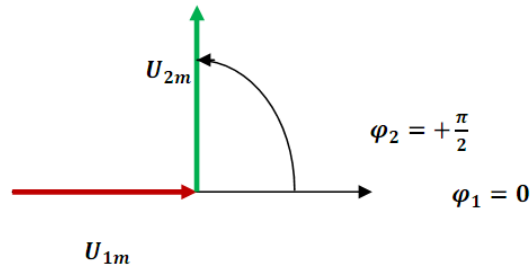


Figure 8

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = +\frac{\pi}{2}$ ,  $u_2$  est en quadrature avance sur  $u_1$ .

✓ Soit :

$$u_1 = U_{1m} \cos(\omega.t), \varphi_1 = 0 \quad \text{et} \quad u_2 = U_{2m} \cos(\omega.t), \varphi_2 = 0$$

Construction de Fresnel :



Figure 9

$$\varphi_1 = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_2 = 0$$

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 0$ , les fonctions  $u_1$  et  $u_2$  sont en phase

✓ Soit

$$u_1 = U_{1m} \cos(\omega.t), \varphi_1 = 0 \quad \text{et} \quad u_2 = U_{2m} \cos(\omega.t - \frac{\pi}{2}), \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$$

Construction de Fresnel :

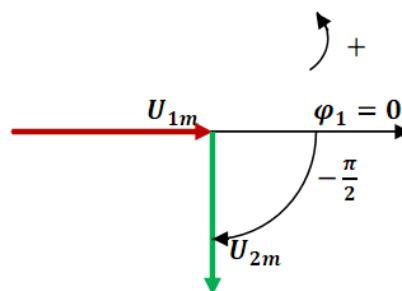


Figure 10

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ ,  $u_2$  est en quadrature retard sur  $u_1$

✓ Soit :

$$u_1 = U_{1m} \cos(\omega.t), \varphi_1 = 0 \quad \text{et} \quad u_2 = U_{2m} \cos(\omega.t - \pi), \varphi_2 = \pi$$

Construction de Fresnel :

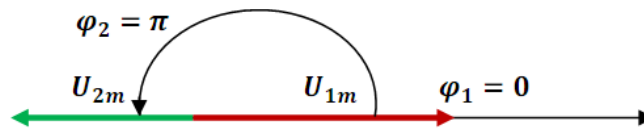


Figure 11

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ , les fonctions  $u_1$  et  $u_2$  sont en opposition phase.

**Exercice 3. Association série d'une bobine et d'un conducteur ohmique.**

On considère l'association série d'une bobine parfaite d'inductance  $L = 64 \text{ mH}$  et d'un conducteur ohmique de résistance  $R = 20 \text{ } \Omega$ . Cette association est parcourue par un courant sinusoïdale de pulsation  $\omega = 100 \text{ rad.s}^{-1}$  et d'intensité efficace  $I_{eff} = 2 \text{ A}$ .

1. Déterminer les valeurs efficaces et les déphasages par rapport à l'intensité des tensions aux bornes de chacun des deux dipôles.
2. Déterminer la valeur efficace et le déphasage par rapport à l'intensité de la tension aux bornes de l'association.

Corrigé :

1. On détermine les valeurs efficaces et les déphasages par rapport à l'intensité des tensions aux bornes de chacun des deux dipôles

✓ Pour la résistance :

La valeur efficace  $U_{R_{eff}}$  ?

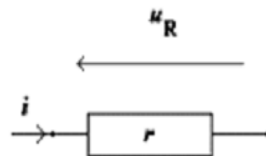


Figure 12

Prenons :  $i = I_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega \cdot t)$ , avec  $\varphi_i = 0$

On a alors :

$$u_R = Ri = R \cdot I_{eff} \sqrt{2} \cdot \cos(\omega \cdot t), \text{ donc } \varphi_R = 0$$

$$u_R = R \cdot I_{eff} \sqrt{2} \cdot \cos(\omega \cdot t) = U_{R_{eff}} \sqrt{2} \cdot \cos(\omega \cdot t) = U_{R_{max}} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Donc

$$U_{R,eff} = R \cdot I_{eff} = 40 \text{ V}$$

Le déphasage de  $u_R$  par rapport à  $i$  :  $\Delta\varphi = \varphi_R - \varphi_i$  ?

On a :

$$i = I_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad \varphi_i = 0 \text{ et } u_R = R \cdot I_{eff} \sqrt{2} \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad \varphi_R = 0$$

Alors Le déphasage de  $u_R$  par rapport à  $i$  est :  $\Delta\varphi = \varphi_R - \varphi_i = 0$ .

✓ Pour la bobine :

La valeur efficace  $U_{L,eff}$  ?

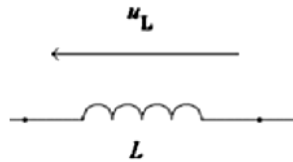


Figure 13

$$i = I_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad \varphi_i = 0$$

Donc :

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -L \cdot \omega \cdot I_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t) = L \cdot \omega \cdot I_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right), \text{ donc } \varphi_L = +\frac{\pi}{2}$$

et :

$$u_L = L \cdot \omega \cdot I_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = U_{L,eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$U_{L,eff} = L \cdot \omega \cdot I_{eff} \rightarrow A.N. : U_L(eff) = 64 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 2 = 12,8 \text{ V}$$

Le déphasage entre le courant  $i$  qui traverse la bobine et la tension  $u_L$  entre ces bornes est:

$$\Delta\varphi = \varphi_L - \varphi_i ?$$

$$\Delta\varphi = \varphi_L - \varphi_i = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

2. On détermine la valeur efficace et le déphasage par rapport à l'intensité de la tension aux bornes de l'association **RL** :

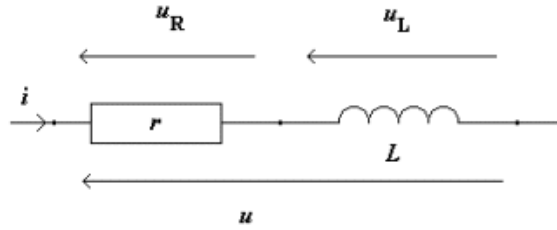


Figure 14

On a :

$\mathbf{u} = \mathbf{u}_R + \mathbf{u}_L$ . La tension  $\mathbf{u}$  doit forcément s'écrire sous forme  $\mathbf{u} = \mathbf{U}_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ , il faut donc déterminer les valeurs de  $\mathbf{U}_m$  et  $\varphi$ .

$$\mathbf{U}_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = R \cdot I_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega \cdot t) + L \cdot \omega \cdot I_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

✓ On détermine  $\mathbf{U}_m$

D'après les résultats des rappels mathématiques précédents, on a :

$$\mathbf{U}_m = \sqrt{2 \cdot (R \cdot I_{eff})^2 + 2 \cdot (L \cdot \omega \cdot I_{eff})^2 + 4 \cdot R \cdot L \cdot \omega \cdot I_{eff}^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\mathbf{U}_m = \sqrt{R^2 + (L \cdot \omega)^2} \cdot I_{eff} \cdot \sqrt{2}$$

Alors la valeur efficace  $\mathbf{U}_{eff}$  est :

$$\mathbf{U}_{eff} = \sqrt{R^2 + (L \cdot \omega)^2} \cdot I_{eff} = 42 \text{ V}$$

On détermine  $\varphi$

A partir des résultats précédents, on peut écrire :

$$\tan(\varphi) = \frac{L \cdot \omega}{R} = 0,32$$

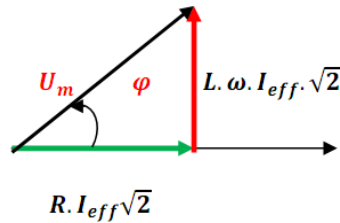
Donc le déphasage de  $\mathbf{u}$  par rapport à  $\mathbf{i}$  est  $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{L \cdot \omega}{R}\right) = 19,7^\circ$

On utilise la méthode de Fresnel pour trouver  $\mathbf{U}_{eff}$  et  $\varphi$

$$\mathbf{u}_R = R \cdot I_{eff} \sqrt{2} \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad \varphi_R = 0 \text{ et } \mathbf{u}_L = L \cdot \omega \cdot I_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right), \quad \varphi_L = +\frac{\pi}{2}$$

## Construction de Fresnel

Le courant  $i$  est pris comme référence, donc le vecteur représentatif dans le diagramme de Fresnel doit être confondu avec l'axe des abscisses, la résistance n'introduit aucun déphasage entre le courant la tension  $\varphi_R = 0$ , le vecteur représentatif de la tension  $u_R$  doit aussi être confondu avec l'axe des abscisses. Le vecteur représentatif de la tension  $u_L$  est en quadrature avance sur la l'intensité  $i$ .



**Figure 15**

Le vecteur  $\vec{u}$  est tracé en utilisant la loi des mailles vectorielle :  $\vec{u} = \vec{u}_R + \vec{u}_L$ .

- ✓ La valeur efficace  $U_{eff}$

Par application du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle :

$$U_m^2 = (R \cdot I_{eff} \sqrt{2})^2 + (L \cdot \omega \cdot I_{eff} \cdot \sqrt{2})^2$$

$$U_m = \sqrt{(R \cdot I_{eff} \sqrt{2})^2 + (L \cdot \omega \cdot I_{eff} \cdot \sqrt{2})^2}$$

$$U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \sqrt{(R \cdot I_{eff})^2 + (L \cdot \omega \cdot I_{eff})^2} = 42 \text{ V}$$

- ✓ Le déphasage  $\varphi$

$$\tan(\varphi) = \frac{L \cdot \omega \cdot I_{eff} \cdot \sqrt{2}}{R \cdot I_{eff} \sqrt{2}} = \frac{L \cdot \omega}{R} = 0,32$$

$$\varphi = 19,7^\circ$$

**Fin**

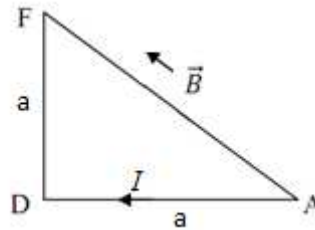
## Série N°2 : le champ et les forces magnétiques

### Exercice 1. Circuit triangulaire placé dans un champ magnétique extérieur

Un circuit à la forme d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit ont une longueur  $a$ . Il est parcouru par un courant d'intensité  $I$  et placé dans un champ magnétique extérieur uniforme  $\vec{B}$  parallèle à l'hypoténuse.

- 1) Caractériser entièrement l'ensemble des forces de Laplace agissant sur ce circuit.
- 2) Calculer le moment de l'ensemble des forces de Laplace.

Corrigé :



**Figure 16**

On veut déterminer la résultante générale des forces de Laplace et le moment résultant en un point convenable de ces forces de Laplace.

- **Résultante générale :**

Comme  $\vec{B}$  est uniforme, les forces de Laplace agissant sur chaque coté sont :

Pour le coté AD :

$$d\vec{f} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Intégration sur AD :

$$\vec{f}_{AD} = I \left( \int_A^D d\vec{l} \right) \wedge \vec{B} = I \overrightarrow{AD} \wedge \vec{B} \rightarrow \vec{f}_{AD} = I \overrightarrow{AD} \wedge \vec{B}$$

De même pour DF et AF :

$$\vec{f}_{DF} = I \overrightarrow{DF} \wedge \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{f}_{FA} = I \overrightarrow{FA} \wedge \vec{B} = \vec{0} \quad \text{car } \overrightarrow{FA} \text{ et } \vec{B} \text{ sont parallèles.}$$

$$\text{La résultante générale est : } \vec{f} = \vec{f}_{AD} + \vec{f}_{DF} + \vec{f}_{FA} = I(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}) \wedge \vec{B}$$

Or  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AF}$  parallèle à  $\vec{B}$ . Donc :

$$\vec{f} = \vec{0}$$

- **Moment résultant**

Comme  $\vec{f} = \vec{0}$ , le système des forces de Laplace est équivalent à un couple de moment  $\vec{I}$ .

(Le moment d'un couple peut être calculé en n'importe quel point, voir le cours de la mécanique)

Par commodité de calcul, exprimons le moment résultant en D.



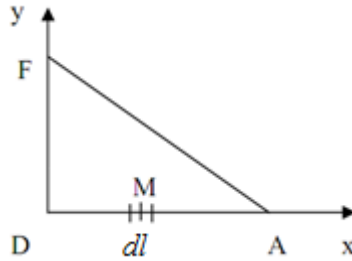


Figure 17

Soit  $\vec{I}_1$  le moment des forces de Laplace agissant sur AD. Soit  $d\vec{f}$  la force de Laplace agissant sur un élément de longueur  $dl$  centré en M :

$$d\vec{f} = Id\vec{l} \wedge \vec{B} \quad \text{et} \quad d\vec{I}_1 = \overrightarrow{DM} \wedge d\vec{f}. \quad (d\vec{l} \text{ est orienté par le sens du courant})$$

Comme  $\overrightarrow{DM} = x \vec{e}_x$ ,  $d\vec{l} = -dx \vec{e}_x$  (attention au sens du courant et au sens de  $\vec{e}_x$ ) il vient :

$$d\vec{I}_1 = \overrightarrow{DM} \wedge d\vec{f} = x \vec{e}_x \wedge (I(-dx \vec{e}_x) \wedge \vec{B}) = -I x dx \cdot \frac{B}{\sqrt{2}} \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z$$

$$d\vec{I}_1 = \frac{B}{\sqrt{2}} \cdot I x dx \vec{e}_y$$

D'où le moment total  $\vec{I}_1$  :

$$\vec{I}_1 = \int_0^a \frac{B}{\sqrt{2}} \cdot I x dx \vec{e}_y = \frac{IBa^2}{2\sqrt{2}} \vec{e}_y.$$

On procède de même pour le calcul du moment  $\vec{I}_2$  des forces de Laplace agissant sur DF. On trouve :

$$\vec{I}_2 = \frac{IBa^2}{2\sqrt{2}} \vec{e}_x$$

Le moment résultant est alors :

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2, \quad (\text{Le moment des forces de Laplace agissant sur FA est nul puisque celles-ci sont nulles.})$$

Soit :

$$\vec{I} = \frac{IBa^2}{2\sqrt{2}} (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

$\vec{e}_x + \vec{e}_y = \vec{e}_k$  est confondu avec la bissectrice de l'angle xDy :  $\vec{I}$  est donc porté par cette bissectrice.

Le moment résultant des forces de Laplace tend à faire tourner le circuit autour de la bissectrice de l'angle droit.

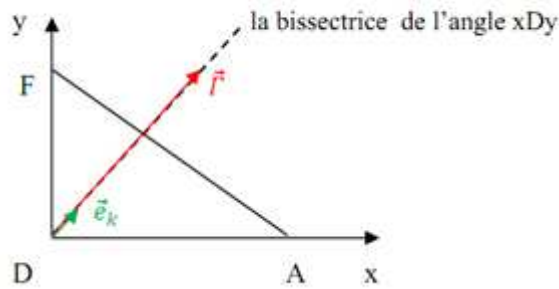


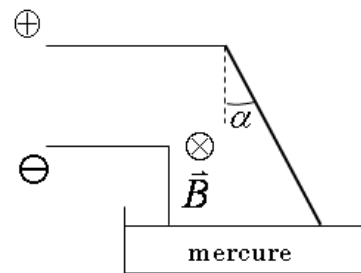
Figure 18

**Exercice 2. Pendule électrique**

On considère un conducteur filiforme cylindrique rigide de longueur  $L$ , de masse  $m$  mobile autour d'un axe horizontale perpendiculaire au fil en une de ses extrémités. L'autre extrémité affleure dans du mercure contenu dans une cuve.

Un courant d'intensité  $I$  traverse le fil comme indiqué par le schéma ci-après.

Calculer l'angle d'inclinaison  $\alpha$  du fil.



Corrigé :

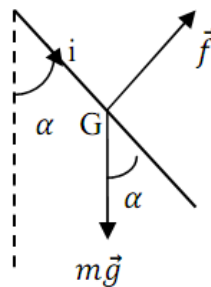


Figure 19

Le fil est soumis :

- à la force de Laplace  $\vec{f}$ ,
- à son poids  $m\vec{g}$ .

Pour tous les éléments de longueur  $dl$  du fil, les forces de Laplace élémentaire  $d\vec{f}$  sont perpendiculaires à celui-ci et de même sens. Le module de  $d\vec{f}$  est  $Bidl$ .

La résultante  $\vec{f}$  a donc pour module  $f = BIL$ .

Pour des raisons de symétrie, cette force est appliquée au milieu G du fil. Son moment par rapport à l'axe de rotation est :

$$\Gamma_1 = f \frac{L}{2} = \frac{BIL^2}{2}.$$

Par ailleurs, le moment du poids par rapport à l'axe de rotation est :

$$\Gamma_1 = mg \frac{L}{2} \sin \alpha.$$

A l'équilibre, on a donc :

$$\frac{BIL^2}{2} = mg \frac{L}{2} \sin \alpha$$

Soit  $\sin \alpha = \frac{BIL}{mg}$ .

Donc :  $\alpha = \text{Arcsin} \frac{BIL}{mg}$

**Exercice 3. Champ Magnétique créé par un fil rectiligne infini**

Calculer le champ magnétique créé par un segment parcouru par un courant d'intensité  $I$  en un point  $M$  situé à la distance  $a$  du segment. On appellera  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les angles entre la perpendiculaire au fil issue de  $M$  et les droites joignant  $M$  aux extrémités du segment.

Examiner le cas du fil rectiligne infini.

Retrouver la question précédente (champ créé par un fil rectiligne infini) en appliquant le théorème d'Ampère.

Corrigé :

- 1) On oriente les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  par le sens du courant  $I$ . Dans le cas de la figure 20 ci-dessous,  $\theta_1$  est négatif et  $\theta_2$  est positif.

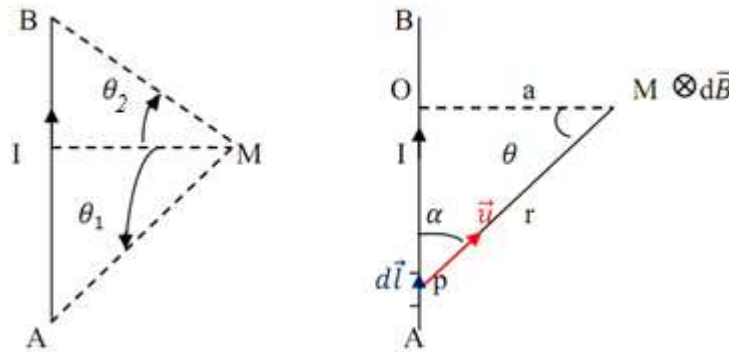


Figure 20

Un élément  $d\vec{l}$  de  $AB$  crée en un point  $M$  (Fig.20) un champ élémentaire  $d\vec{B}$  perpendiculaire au plan formé par  $d\vec{l}$  et  $\vec{PM}$  et orienté dans le cas de la figure 20 vers l'intérieur. Alors, d'après la loi de Biot et Savart, on a :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Le module de  $dB$  est alors :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dl \cdot \sin\alpha}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dl \cdot \cos\theta}{r^2}$$

On écrivant :

$$OM = a ; PM = r = \frac{a}{\cos\theta} ; OP = l = a \cdot \tan\theta \Rightarrow dl = \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta$$

En reportant dans  $dB$ , il vient :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta \cdot \cos\theta \cdot \frac{\cos^2\theta}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos\theta d\theta.$$

En intégrant sur tout le segment  $AB$ , on obtient :  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta d\theta$  donc

$$B_{segment} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1).$$

2) Pour un fil de longueur infini  $\theta_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$  et  $\theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  ;  $B$  tend vers une valeur limite

$$B_{fil\ inf.} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dB = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}.$$

D'où le champ d'induction magnétique crée par un fil infini :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

## Théorème d'Ampère

**Avantage :** Il permet de calculer des champs magnétiques presque sans calcul par rapport à la méthode classique (loi de Biot et Savart).

### Enoncé du théorème

*La circulation du champ le long d'un contour fermé est égale au produit de la perméabilité du vide et de la somme algébrique des courants qu'il enlace.*

$$\oint_{\Gamma(\text{contour orienté})} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{(\text{algébrique enlacé})}$$

NB : la notation de l'intégrale avec le cercle correspond à un contour fermé.

- $\oint_{\Gamma(\text{contour orienté})}$  : Le contour imaginaire choisi doit être fermé (il délimite une surface).
- $\vec{B}$  : est le champ créé par tous les courants (enlacés ou non).
- $d\vec{l}$  : définit le sens de parcours du contour (orientation arbitraire).

Le sens de parcours choisi définit un vecteur  $\vec{n}$  normal à la surface délimitée par le contour (main droite).

- Si le contour est une ligne de champ alors  $\vec{B}$  et  $d\vec{l}$  sont colinéaires.
- $I_{(algébrique\ enlacé)}$  représente la somme algébrique des courants enlacés par le contour. Si les courants enlacés sont orientés dans le même sens que  $\vec{n}$ , on les compte positivement (et négativement dans le sens contraire).

### Détermination de $\sum I_{(algébrique\ enlacé)}$

#### Exemples :

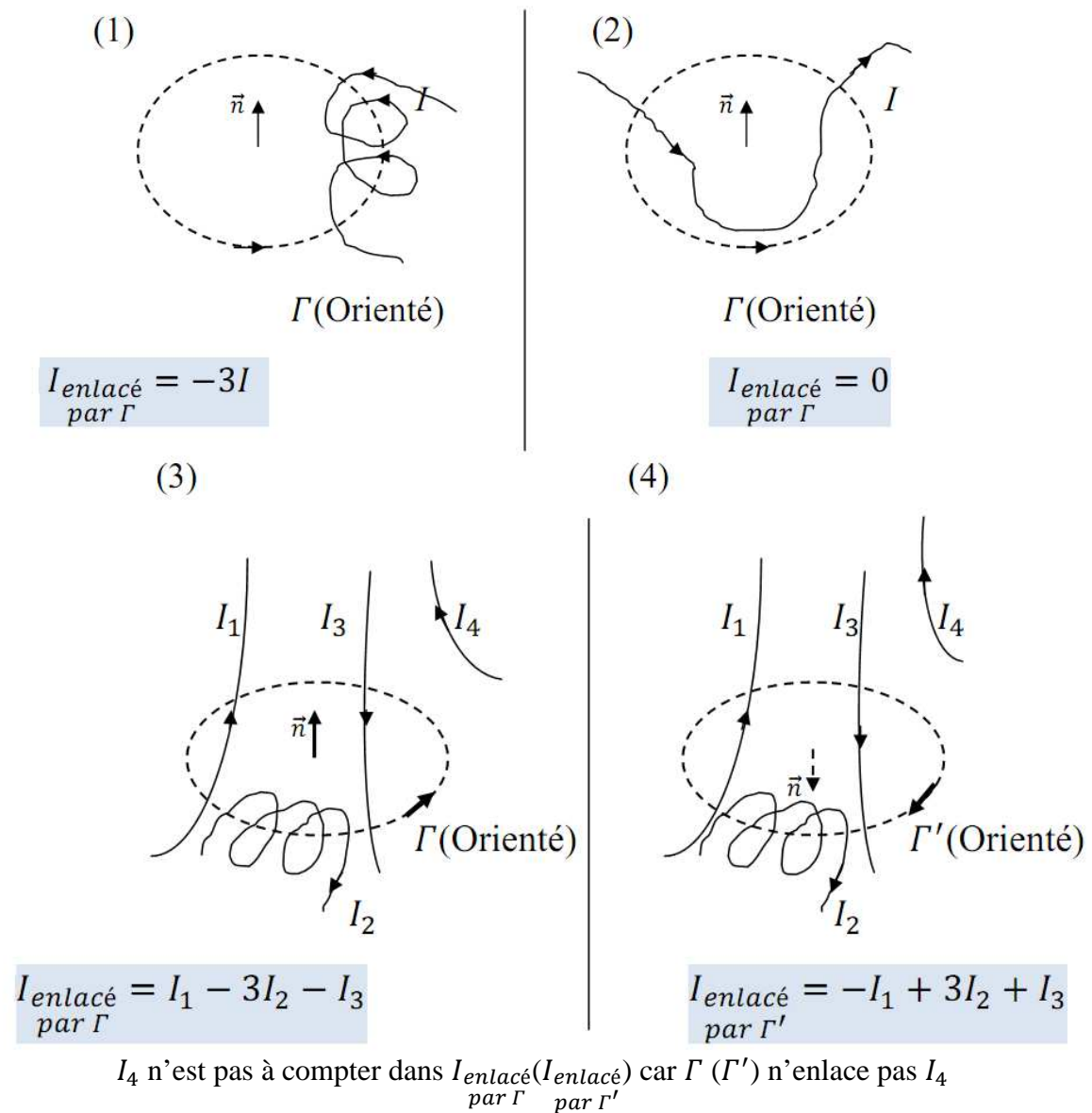


Figure 21

## Calcul de $\vec{B}$ à partir de théorème d'Ampère

- On cherche les invariances et symétrie de la distribution de courant
- On fixe un contour fermé d'Ampère.
- Théorème d'Ampère

$$\oint_{\Gamma(\text{contour orienté})} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{(\text{algébrique enlacé})}$$

### I) Etude des symétries d'une distribution de courant

#### A. Introduction

**Intérêt** : l'étude des symétries a pour but de simplifier les calculs et est indispensable à l'utilisation du théorème d'Ampère. Lorsque la distribution du courant électrique présente une symétrie ou invariance, le champ magnétique B est également symétrique ou invariant. Ainsi, en étudiant les plans de symétrie et les invariances, on va pouvoir déterminer :

**1) Quelles sont les composantes vectorielles du champ magnétique B ?**

**2) De quelles variables dépend le champ magnétique ?**

On prendra le fil infini en coordonnées cylindriques. Le champ qu'il exerce en tout point de l'espace est alors :

$$\vec{B}(\rho, \theta, z) = B_\rho \vec{e}_\rho + B_\theta \vec{e}_\theta + B_z \vec{e}_z.$$

*Nous allons montrer que certaines composantes sont nulles et que le champ ne dépend pas de certaines variables.*

#### B. Etude des invariances

Une invariance de la distribution de courant laisse indifférente la distribution de courant par une transformation bien choisie. Cette invariance se répercute sur le champ.

##### 1) Invariance par translation par rapport à un axe.

**Définition** : Le courant reste le même lorsqu'on déplace la distribution de courant parallèlement à un axe.

**Effet** : Le champ ne dépend pas de la variable selon cet axe.

Lorsqu'on déplace par translation le fil infini parallèle à l'axe, le courant reste toujours le même (puisque le fil est infini) = Invariance.

- **Le champ B ne dépend pas de z.**

$$\vec{B}(\rho, \theta) = B_\rho \vec{e}_\rho + B_\theta \vec{e}_\theta.$$

##### 2) Invariance par rotation autour d'un axe :

**Définition** : Le courant reste le même lorsqu'on le fait tourner autour d'un axe.

**Effet :** Le champ ne dépend pas de la variable de rotation autour de cet axe.

Lorsqu'on fait tourner notre fil infini autour de son propre axe, il est invariant.

- **Le champ ne dépend pas de l'angle de rotation  $\theta$**
- **Finalement, le champ ne dépend que de la distance au fil  $\rho$  :**

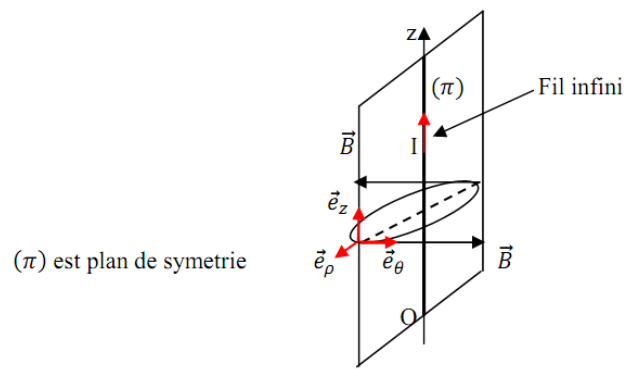
$$\vec{B}(\rho) = B_\rho \vec{e}_\rho$$

### C. Etudes des symétries

#### 1) Invariance par rapport à un plan de symétrie :

**Définition :** Le courant reste le même par symétrie par rapport à un plan choisi.

**Effet :** Le champ en tout point M de ce plan est perpendiculaire à celui-ci.



**Figure 22**

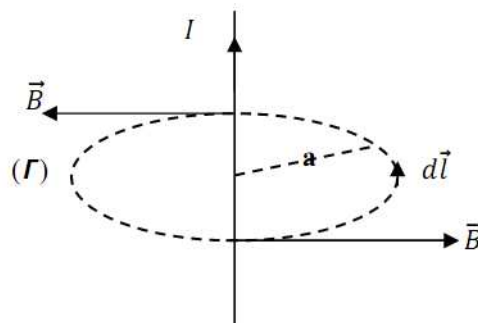
Tout plan passant par l'axe (Oz) est plan de symétrie de la distribution de courant. Comme il y en a une infinité, tout point de l'espace est inclus dans un de ces plans.

- Le champ en tout point M est perpendiculaire au plan passant par l'axe du fil et par M.
- Le champ n'a pas de composante selon  $\vec{e}_z$ .
- Le champ n'a pas de composante selon  $\vec{e}_\rho$ .

$$\vec{B}(\rho) = B_\rho \vec{e}_\theta$$

**Conclusion :** On vient de démontrer l'orientation du champ et la variable dont il dépend sans aucun calcul !

#### D. Contour d'Ampère : le cercle ( $\Gamma$ ) de rayon a et d'axe oz.



**Figure 23**

Théorème d'Ampère :

$$\oint_{\Gamma(\text{contour orienté})} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{(\text{algébrique enlacé})} = \mu_0 I$$

Le contour est une ligne de champ alors  $\vec{B}$  et  $d\vec{l}$  sont colinéaires.

Donc :

$$\oint_{\Gamma(\text{contour orienté})} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma(\text{contour orienté})} B dl = B \int_0^{2\pi} a d\theta = B \cdot a \cdot 2\pi$$

Le champ créé par un fil infini parcouru par un courant d'intensité  $I$  est alors :

$$2\pi \cdot B \cdot a = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot a}$$

C'est bien le résultat trouvé avec la loi de Biot et Savart.

**Exercice 4. Champ Magnétique créé par une spire circulaire en un point de son axe**

Soit une spire filiforme de rayon  $R$  parcourue par un courant d'intensité  $I$ .

- 1) Déterminer le champ magnétique créé en un point de l'axe de la spire situé à une distance  $z$  du centre de celle-ci.
- 2) Tracer la courbe  $B(z)$ .

Corrigé :

- 1) Soit un courant circulaire de centre  $O$ , de rayon  $R$  (voire Fig.24). Nous calculons le champ  $\vec{B}$  en un point  $M$  situé sur l'axe  $Oz$  du cercle. Par raison de symétrie,  $\vec{B}$  est porté par cet axe. L'élément de courant  $d\vec{l}$  d'origine  $P$ , crée en un point  $M$  un champ  $d\vec{B}$  perpendiculaire à  $PM$  et à  $d\vec{l}$ . Posons  $PM = r$ .

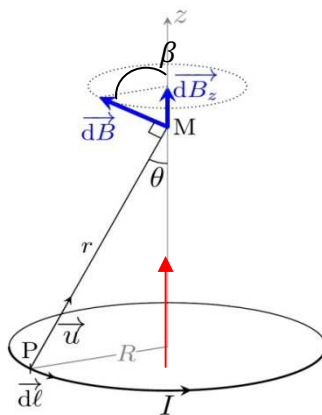


Figure 24



La loi de Biot et Savart donne :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{r^3}$$

De plus  $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}$

Alors

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PO}}{r^3} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{OM}}{r^3}$$

Intégration :

$$\oint d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \oint \frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PO}}{r^3} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \oint \frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{OM}}{r^3}$$

$$\oint d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\oint (d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PO})}{r^3} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\oint (d\vec{l} \wedge \overrightarrow{OM})}{r^3}$$

On a :

- $\oint (d\vec{l} \wedge \overrightarrow{OM}) = (\oint d\vec{l}) \wedge \overrightarrow{OM} = 0$
- $(d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PO}) = R \cdot dl \cdot \vec{n}$

$$\Leftrightarrow \oint (d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PO}) = \oint (R \cdot dl \cdot \vec{n}) = R \cdot (\oint dl) \cdot \vec{n} = 2 \cdot \pi \cdot R^2 \vec{n}$$

$$\text{On en déduit : } \vec{B} = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{(\oint d\vec{l}) \wedge \overrightarrow{PO}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R^2}{r^3} \vec{n}$$

Alors

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2 \cdot r^3} \vec{n}$$

Ou encore en notant que :  $R = r \sin \alpha$  :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2 \cdot R} \sin^3 \theta \cdot \vec{n} \theta = (d\vec{B}, \widehat{M}, d\vec{B}_z)$$

### Autre méthode :

On remarque que  $d\vec{l}$  est perpendiculaire à  $\overrightarrow{PM}$

La loi de Biot et Savart donne :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \cdot PM}{4\pi PM^3} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi PM^2} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}$$

La contribution de  $d\vec{B}$  au champ total est :  $dB_z = dB \cos \beta = dB \sin \theta$

Car :  $\cos \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ ,

$$B_{spire} = \int dB_z = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} \int dl = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} \cdot 2\pi \cdot R = \frac{\mu_0 I}{2r^2} \sin \theta \cdot R$$

Comme  $r = \frac{R}{\sin \theta}$ :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 \cdot R} \sin^3 \theta$$

Soit en fonction de la distance  $z$  :

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2 \cdot (z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

D'où

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2 \cdot (z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$

2) En deux points M et M' de l'axe, symétrique par rapport à O, le champ  $\vec{B}$  est identique. On étudie donc  $\vec{B}(z)$  pour  $z \geq 0$  et on complétera par symétrie pour  $z \leq 0$ .

$$\bullet \quad \frac{dB}{dz} = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{2z}{(z^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{3\mu_0 I R^2 z}{2 \cdot (z^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}}$$

➤ Pour  $z \geq 0$ ,  $\frac{dB}{dz} \leq 0$ , donc  $B(z)$  est une fonction décroissante de  $z$ .

➤ Pour  $z = 0$ ,  $\frac{dB}{dz} = 0$  : la courbe  $B(z)$  admet donc une tangente horizontale en ce point.

$$\bullet \quad \frac{d^2B}{dz^2} = -\frac{3\mu_0 I R^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{15\mu_0 I R^2 z^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{7}{2}}} = \frac{3\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{\frac{7}{2}}} (4z^2 - R^2)$$

➤  $\frac{d^2B}{dz^2}$  s'annule pour  $z = \frac{R}{2}$  ( $z > 0$ ), avec : pour  $z < \frac{R}{2}$ ,  $\frac{d^2B}{dz^2} < 0$  et pour  $z > \frac{R}{2}$ ,  $\frac{d^2B}{dz^2} > 0$ ;

La courbe  $B(z)$  admet donc un point d'inflexion pour  $z = \frac{R}{2}$  avec  $B\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{4\mu_0 I}{5\sqrt{5}R}$ .

➤ Pour  $z = 0$ ,  $B = B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$ .

➤ On en déduit la courbe  $B(z)$

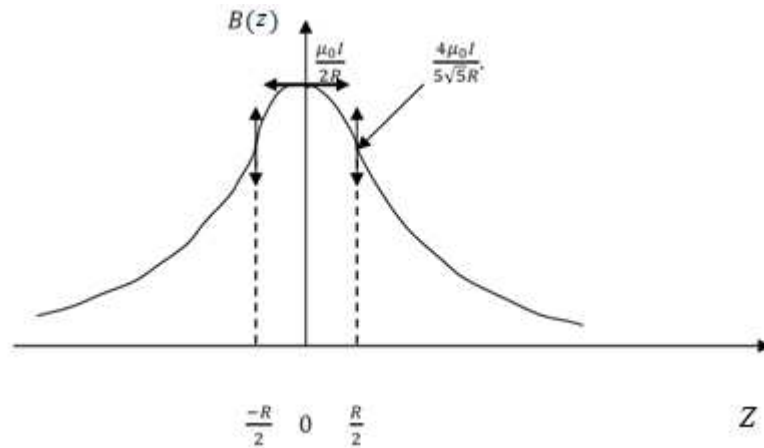


Figure 25

### Exercice 5. Bobine de Helmholtz

Deux bobines de  $N$  spires, de rayon  $R$ , parcourues par un courant d'intensité  $I$ , ont leurs centres distants de  $R$ . Le sens du courant est tel que les champs créés par les deux bobines s'ajoutent dans l'espace situé entre les deux bobines :

- 1) Calculer  $B$  au milieu  $O$  de l'axe joignant les deux centres.
- 2) Calculer  $B$  pour un point  $M$  de l'axe voisin de  $O$  repéré par  $OM = x$ .
- 3) Quelle est la variation relative de  $B$  entre  $O$  et  $M$  pour  $\frac{x}{R} = 0,1$ .

Corrigé :

- 1) On sait (voir exercice 4) que pour une spire,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2.R} \sin^3 \alpha$$

Comme  $O$  est à égale distance des centres des deux bobines et que les champs s'ajoutent entre les deux bobines, on a :

$$B_O = 2 \frac{\mu_0 NI}{2.R} \sin^3 \alpha \text{ avec } \sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

D'où

$$B_O = \frac{8\mu_0 NI}{5\sqrt{5}R}$$

- 2) En  $M$ , on aura :

$$B_1 = \frac{\mu_0 NI}{2.R} \sin^3 \alpha_1 \text{ avec } \sin \alpha_1 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2} + x\right)^2}}$$

$$\text{Et } B_2 = \frac{\mu_0 NI}{2.R} \sin^3 \alpha_2 \text{ avec } \sin \alpha_2 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2} - x\right)^2}}$$

$$\text{Soit : } B = \frac{\mu_0 NI}{2.R} R^3 \left[ \left( \frac{5R^2}{4} + Rx + x^2 \right)^{-\frac{3}{2}} + \left( \frac{5R^2}{4} - Rx + x^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \right]$$

Ou aussi :

$$B = \frac{4\mu_0 NI}{5\sqrt{5}R} \left[ \left( 1 + \frac{4x}{5R} + \frac{4x^2}{5R^2} \right)^{-\frac{3}{2}} + \left( 1 - \frac{4x}{5R} + \frac{4x^2}{5R^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right]$$

On développe alors  $B$  au 4<sup>ème</sup> ordre en  $\frac{x}{R}$  :

On utilise la formule du développement limité de  $(1+x)^n$  à l'ordre 4 au voisinage de 0

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^4 + \dots$$

Et on obtient pour le premier terme :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{4x}{5R} + \frac{4x^2}{5R^2}\right)^{-\frac{3}{2}} &= 1 + \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4x}{5R} + \frac{4x^2}{5R^2}\right) + \left(\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)}{2!}\right)\left(\frac{4x}{5R} + \frac{4x^2}{5R^2}\right)^2 \\ &+ \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\left(-\frac{3}{2}-2\right)}{3!}\left(\frac{4x}{5R} + \frac{4x^2}{5R^2}\right)^3 \\ &+ \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\left(-\frac{3}{2}-2\right)\left(-\frac{3}{2}-3\right)}{4!}\left(\frac{4x}{5R} + \frac{4x^2}{5R^2}\right)^4 \\ &= -\frac{6x}{5R} + \frac{32x^3}{25R^3} - \frac{144x^4}{125R^4} + 1 \end{aligned}$$

De même pour le deuxième terme :

$$\left(1 - \frac{4x}{RR} + \frac{4x^2}{5R^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{6x}{5R} - \frac{32x^3}{25R^3} - \frac{144x^4}{125R^4} + 1$$

Et on en déduit l'expression de  $B$  :

$$B = \frac{8\mu_0 NI}{5\sqrt{5}R} \left(1 - \frac{144x^4}{125R^4}\right),$$

Soit aussi

$$B = B_0 \left(1 - \frac{144x^4}{125R^4}\right).$$

Application numérique :

$$\frac{\Delta B}{B_0} = \frac{B_0 - B}{B_0} = \frac{144x^4}{125R^4} \text{ soit } \frac{\Delta B}{B_0} = 1,15 \cdot 10^{-4}$$

### Exercice 6. Champ Magnétique d'un solénoïde

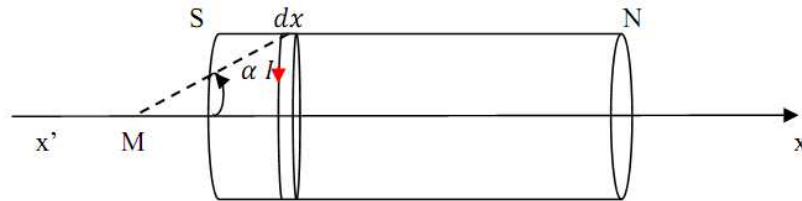
On considère un solénoïde de longueur  $L$  comportant au total  $N$  spires jointives ayant le même rayon  $R$ , régulièrement réparties.

Déterminer le champ magnétique créé en un point quelconque de l'axe du solénoïde en fonction des angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sous lesquels on voit les faces terminales du solénoïde depuis le point considéré.

Examiner le cas du solénoïde « infiniment long », c'est-à-dire tel que  $R \ll L$ .

Corrigé :

1) Symbolisons le solénoïde comme ci-dessous. Soit le point M où l'on calcule le champ.



**Figure 26**

Remarquons que toutes les spires produisent un champ de même sens porté par l'axe  $x'x$  que nous orientons dans le sens du champ. Il s'agit de calculer  $B$  au point  $M$  appartenant à l'axe  $x'x$  ( $M$  est pris comme origine des abscisses).

Soit une tranche du solénoïde, d'abscisse  $x$  et d'épaisseur  $dx$  ; elle est vue de  $M$  sous l'angle  $\alpha$  ; peu varier de  $0$  à  $\pi$  selon la position de  $M$  sur l'axe. Cette tranche est assimilable à une bobine plate contenant  $dN = \frac{N}{L} dx = n dx$  spires. Sa contribution au champ est :

$$dB = \frac{\mu_0 n I}{2R} \cdot \sin^3 \alpha dx$$

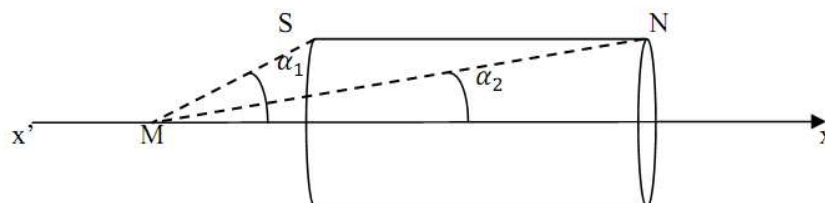
Prenons  $\alpha$  comme variable d'intégration.  $x = \frac{R}{\tan \alpha}$ ,  $dx = -R \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha}$  :

$$dB = -\frac{1}{2} \mu_0 n I \sin \alpha d\alpha,$$

Pour la position  $M$  choisi,  $\alpha$  peut varier de  $\alpha_1$  à  $\alpha_2$  (les angles sous lesquels on voit les deux extrémités du solénoïde, voir figure 27).

Par intégration :

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1).$$



**Figure 27**

2) Cas du solénoïde infiniment long

Dans le cas d'un solénoïde de longueur très grande par rapport au rayon, on a  $\alpha_1 \rightarrow \pi$  et  $\alpha_2 \rightarrow 0$

$$B = \mu_0 n I$$

**Conclusion** : le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde.

### Série N°3 : Dipôle et induction magnétique

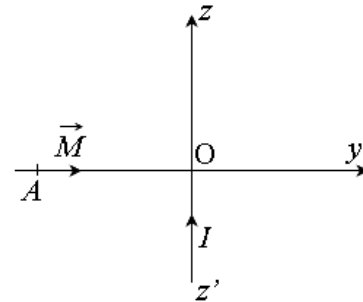
#### Exercice 1. Action d'un dipôle sur un fil infini

On considère le système schématisé ci-contre.

Un fil rectiligne infini, confondu avec l'axe  $z'Oz$ , est parcouru par un courant d'intensité  $I$ .

Un dipôle de moment magnétique  $\vec{M}$  est placé au point  $A$  de l'axe  $y'Oy$  à la distance  $OA = a$  de  $O$ .

- Déterminer l'action exercée par le dipôle sur le fil infini.



Corrigé :

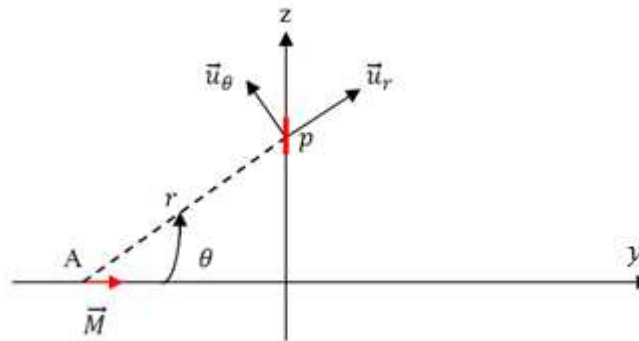


Figure 30

En un point  $p$  du fil, le dipôle crée, le champ (voir votre cours):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M \cos \theta}{2\pi r^3} \vec{u}_r + \frac{\mu_0 M \sin \theta}{4\pi r^3} \vec{u}_\theta.$$

On exprime  $\vec{B}$  dans le système  $oxyz$

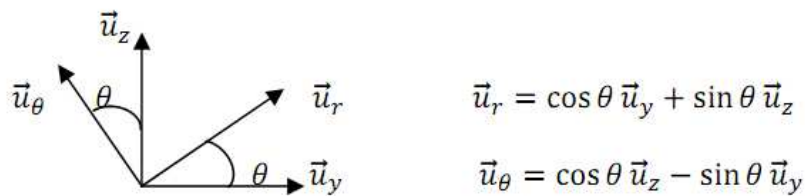


Figure 31

On obtient :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \vec{u}_y + \frac{3\mu_0 M \sin \theta \cos \theta}{4\pi r^3} \vec{u}_z$$

On en déduit la force de Laplace  $d\vec{f} = Id\vec{z} \wedge \vec{B}$  s'exerçant sur l'élément de courant  $Id\vec{z}$  :

$$d\vec{f} = -\frac{\mu_0 MI}{4\pi r^3} (2\cos^2\theta - \sin^2\theta) dz \vec{u}_x.$$

Pour obtenir la force résultante, il faut intégrer  $d\vec{f}$  suivant  $\theta$ .

Exprimons donc  $d\vec{f}$  en fonction de  $\theta$  :

$$z = a \tan \theta \text{ donc } dz = \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta ; r = \frac{a}{\cos\theta}.$$

D'où :

$$d\vec{f} = -\frac{\mu_0 MI}{4\pi a^2} (2\cos^3\theta - \sin^2\theta \cos\theta) d\theta \vec{u}_x$$

$$d\vec{f} = -\frac{\mu_0 MI}{4\pi a^2} (2\cos\theta (1 - \sin^2\theta) - \sin^2\theta \cos\theta) d\theta \vec{u}_x$$

$$d\vec{f} = -\frac{\mu_0 MI}{4\pi a^2} (2\cos\theta - 3\sin^2\theta \cos\theta) d\theta \vec{u}_x$$

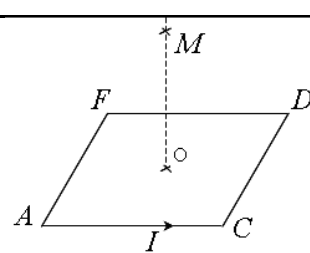
Après intégration sur l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , on obtient :

$$\vec{f} = -\frac{\mu_0 MI}{4\pi a^2} \vec{u}_x.$$

(on utilise :  $d(\sin^3\theta) = 3\sin^2\theta \cos\theta d\theta$ )

### Exercice 2. Champ magnétique créé à grande distance par un circuit carré

Un circuit carré de côté  $2b$  est parcouru par un courant d'intensité  $I$ . Calculer le champ magnétique créé en un point  $M$  de l'axe passant par le centre du circuit. Que devient ce champ lorsque la distance  $x = OM \gg b$ .



Corrigé :

Les plans contenant l'axe, perpendiculaire soit à  $AC$  et  $BD$ , soit à  $CD$  et  $AB$  sont des plans d'antisymétrie.  $\vec{B}$  est donc contenu dans ces plans. Il est donc porté par leur intersection, c'est-à-dire par l'axe  $OM$ .

Les quatre côtés étant identiques et identiquement disposés par rapport à l'axe, leurs contributions au champ résultant suivant l'axe seront égales.



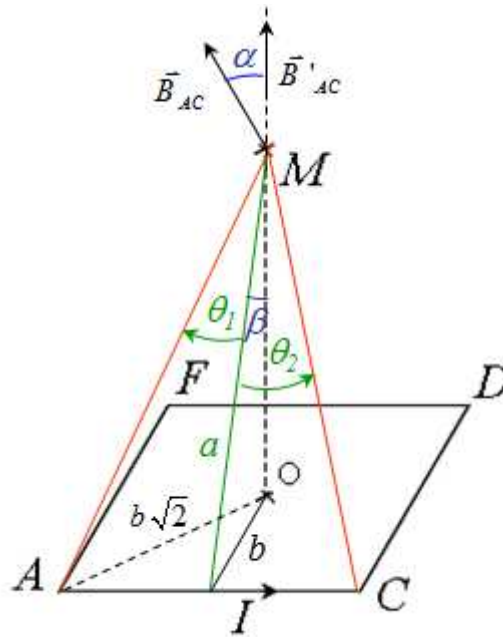


Figure 32

Utilisons la formule donnant le module du champ créé par un segment (exercice 3 de la série 2),

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1).$$

Ici :

$$a = \sqrt{x^2 + b^2} \text{ et } \sin \theta_2 = -\sin \theta_1 = \frac{b}{\sqrt{x^2 + 2b^2}}, \text{ prenons l'axe } Ox \text{ suivant } OM.$$

Soit  $\vec{B}_{AC} = \vec{B}_1$  le champ créé par AC par exemple.  $\vec{B}_1$  fait l'angle  $\alpha$  avec l'axe  $Ox$ . Sa projection sur l'axe sera  $B'_{AC} = B_1 \cos \alpha = B_1 \sin \beta = B_1 \frac{b}{\sqrt{x^2 + b^2}}$

On en déduit :

$$B'_{AC} = B_1 \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi \sqrt{x^2 + b^2}} \cdot \frac{2b}{\sqrt{x^2 + 2b^2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{x^2 + b^2}}$$

On multiplie par 4 pour avoir le champ total :

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0 I b^2}{\pi(x^2 + b^2)\sqrt{x^2 + 2b^2}} \vec{u}_x$$

Dans le cas particulier où  $x \gg b$  ;  $x^2 + b^2 \approx x^2$  et  $x^2 + 2b^2 \approx x^2$  ;

Donc :

$$\vec{B} \approx \frac{2\mu_0 I b^2}{\pi x^3} \vec{u}_x$$

Or, l'aire du carré est  $S = 4b^2$  ; donc :

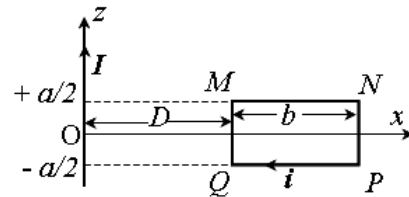
$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0 I S}{2\pi x^3} \vec{u}_x$$

Comme  $\vec{M} = IS\vec{u}_x$  est le moment magnétique du circuit :  $\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{M}}{2\pi x^3} \vec{u}_x$

### Exercice 3.

Un fil rectiligne infini, parcouru par un courant  $I$ , est disposé dans le vide dans le même plan qu'un rectangle de fil parcouru par un courant  $i$  (voir figure ci-contre).

On suppose que  $D \gg b$ .



1. Déterminer par un calcul direct la force de Laplace exercée par le fil sur la spire rectangulaire.
2. Considérant la spire rectangulaire comme un dipôle passif, retrouver le même résultat en calculant l'énergie potentielle d'interaction des deux circuits.
3. Retrouver l'expression de la force exercée par le fil sur le cadre par application du théorème de Maxwell.
4. Déterminer le flux du champ magnétique créé par le fil infini, à travers le rectangle.
5. En déduire, par application de la relation  $\delta W = i \cdot \delta \Phi$ , une nouvelle détermination de la force de Laplace exercée sur la cadre.

Corrigé :

- 1) Le champ magnétique créé par un fil infini est :  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{u}_y$  (voir l'exercice 3 série N°2)

La force élémentaire de Laplace agissant sur la portion  $QM$  est :

$$d\vec{f}_{QM} = id\vec{l} \wedge \vec{B} = idz \vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \vec{u}_y$$

$$d\vec{f}_{QM} = -\frac{\mu_0 i I}{2\pi D} dz \vec{u}_x$$

En intégrant, on obtient :

$$\vec{f}_{QM} = -\frac{\mu_0 i I}{2\pi D} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz = -\frac{\mu_0 i I a}{2\pi D} \vec{u}_x$$

La force élémentaire de Laplace agissant sur la portion  $NP$  est :

$$d\vec{f}_{NP} = id\vec{l} \wedge \vec{B} = -i dz \vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \vec{u}_y$$

$$d\vec{f}_{NP} = \frac{\mu_0 i I}{2\pi(D+b)} dz \vec{u}_x$$

Par intégration, on obtient :

$$\vec{f}_{NP} = \frac{\mu_0 i I}{2\pi(D+b)} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz = \frac{\mu_0 i I a}{2\pi(D+b)} \vec{u}_x$$

D'où la résultante  $\vec{F}$

$$\vec{F} = \vec{f}_{QM} + \vec{f}_{NP} = -\frac{\mu_0 i I a}{2\pi D} \vec{u}_x + \frac{\mu_0 i I a}{2\pi(D+b)} \vec{u}_x$$

$$\vec{F} = \vec{f}_{QM} + \vec{f}_{NP} \approx -\frac{\mu_0 i I a b}{2\pi D^2} \vec{u}_x, \quad \text{car } (D \gg b)$$

2) Dipôle passif

$$\vec{M} = i\vec{S} = iab \vec{u}_y$$

$$E_p = -\vec{M}\vec{B} = -\frac{\mu_0 i I ab}{2\pi D}$$

$$\delta w = \vec{F} dD \vec{u}_x = -dE_p = -\frac{\mu_0 i I ab}{2\pi D^2} dD$$

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 i I ab}{2\pi D^2} \vec{u}_x$$

3) Le flux n'existe que le long des sections  $QM$  et  $NP$  :

$$\delta\Phi_{C,QM} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \vec{B}(\vec{v} \delta t \wedge dz \vec{u}_z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \vec{u}_y (v \delta t \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z) \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz$$

$$\delta\Phi_{C,QM} = \frac{\mu_0 I v a \delta t}{2\pi D}$$

$$\delta w = i \delta\Phi_C = \vec{F} \vec{v} \delta t = F_x v \delta t$$

$$F_x v \delta t = \frac{\mu_0 i I v a \delta t}{2\pi} \left( \frac{1}{D} + \frac{1}{D+b} \right)$$

$$F_x = -\frac{\mu_0 i I ab}{2\pi D^2}$$

4)

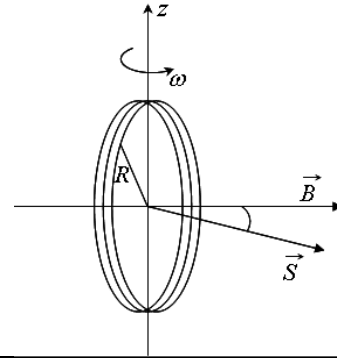
$$\Phi = \iint \vec{B} d\vec{S} = \iint_D^{D+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{u}_y dx dz \vec{u}_y = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{D+b}{D}$$

$$dw = F dD = i d\Phi = i \frac{d\Phi}{dD} = \frac{\mu_0 i I a}{2\pi} \left[ \ln \left( 1 + \frac{b}{D} \right) \right]' \approx -\frac{\mu_0 i I ab}{2\pi D^2}$$

#### Exercice 4

Une bobine, formée de  $N$  spires, tourne autour d'un de ses diamètres à une vitesse angulaire  $\omega$  constante parallèlement à l'axe Oz.

- Déterminer l'expression de la f.é.m. induite dans la bobine en tenant compte du coefficient d'auto-inductance  $L$  de la bobine.
- Calculer sa valeur si  $\omega = 5$  tours/s,  $N = 50$ ,  $R = 5$  cm,  $B = 0,1$  T,  $L = 1$  mH et  $R_B = 1 \Omega$ .



Corrigé :

$$\Phi = N \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = NBS \cos \theta = NB\pi R^2 \cos \omega t$$

$$\Phi' = Li$$

$$E = -\frac{d\Phi_{tot}}{dt} = NB\pi R^2 \omega \sin \omega t - L \frac{di}{dt}$$

$$i = \frac{E}{R_b} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{R_B} \frac{dE}{dt}$$

$$E = NB\pi R^2 \omega \sin \omega t - \frac{1}{R_B} \frac{dE}{dt}$$

$$E + \frac{L}{R_B} \frac{dE}{dt} = NB\pi R^2 \omega \sin \omega t$$

La solution générale de l'équation sans second membre :

$$E_g = E_0 \exp(-t/\tau); \quad \tau = \frac{L}{R_B}$$

La solution particulière est de la forme :  $E_p = K \sin(\omega t + \varphi)$

En remplaçant dans l'équation différentielle et en séparant partie réelle et partie imaginaire :

$$K \sin(\omega t + \varphi) + \frac{L}{R_B} K \omega \cos(\omega t + \varphi) = NB\pi R^2 \omega \sin \omega t$$

$$K \sin(\omega t + \varphi) + \frac{L}{R_B} K \omega \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = NB\pi R^2 \omega \sin \omega t$$

En notation complexe, ça donne :

$$K e^{j(\omega t + \varphi)} + \frac{L}{R_B} K \omega e^{j(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})} = NB\pi R^2 \omega e^{j(\omega t)}$$

$$K e^{j\varphi} + j \frac{L}{R_B} K \omega e^{j\varphi} = NB\pi R^2 \omega$$

$$K(\cos \varphi + j \sin \varphi) + j \frac{L}{R_B} K \omega (\cos \varphi + j \sin \varphi) = NB\pi R^2 \omega$$

$$K \left( \omega \frac{L}{R_B} \cos \varphi + \sin \varphi \right) = 0 \quad (1)$$

$$-\omega \frac{L}{R_B} K \sin \varphi + K \cos \varphi = NB\pi R^2 \omega \quad (2)$$

On en déduit :

$$\tan \varphi = -\frac{\omega L}{R_B}$$

En élevant les deux expressions (1) et (2) au carré et en les additionnant, on obtient :

$$K = \frac{NB\pi R^2 \omega}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$$

La solution de l'équation différentielle est finalement :

$$E = E_0 \exp(-t/\tau) + \frac{NB\pi R^2 \omega}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$