# TD d'Algèbre 2

## Série 2: Généralités sur les espaces vectoriels

**Exercice 1.**

**1)** Est-ce que le sous-ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = 2x\}$ de $\mathbb{R}^2$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ ?

**2)** Est-ce que le sous-ensemble $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 - z^2 = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ?

**3)** Est-ce que le sous-ensemble $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] |\ P(1) = 0\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ ?

**Exercice 2.**
Soit $F$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \mathrm{Vect}\Big\{u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,0,2)\Big\}.$$

Soit $G$ la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \text{ et } x - y + 3z = 0\}.$$

**1)** Vérifier que $G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

**2)** Donner une base de $F$ et une base de $G$. En déduire leurs dimensions.

**3)** Déterminer $F \cap G$. Que peut-on déduire ?

**4)** Donner la dimension de $F + G$. Que peut-on déduire ?

**Exercice 3.**
Soient $P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$, $P_1 = -X(X-2)$ et $P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

**1)** Montrer que la famille $B = \{P_0, P_1, P_2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

**2)** Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer $P$ dans la base $B$.

**Exercice 4.**
Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ à 3 lignes et 3 colonnes.
Soit $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. C'est-à-dire les matrices qui vérifient $A^T = A$.

**1)** Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

**2)** Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

**Exercice 5.**
Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\3\end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\-2\end{pmatrix}.$$

**1)** La famille $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ est-elle libre ?

**2)** Quel est le rang de la famille $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ ?