Exercice 1

1. Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$. Déduire qu'un groupe ne peut jamais être la réunion de deux de ses sous-groupes propres.

2. Déduire que $a\mathbb{Z} \cup b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ si et seulement si a divise b ou b divise a, où a et b sont dans $\mathbb{N}^*$. Que dire de $5\mathbb{Z} \cup 8\mathbb{Z}$?

Exercice 2

Soient G un groupe et H une partie non vide de G, finie et stable pour la loi de G. Montrer que H est un sous-groupe de G. Donner un contre-exemple à la propriété précédente dans le cas d'une partie H infinie.

Exercice 3

Soit G un groupe d'élément neutre e tel pour tout $x \in G$, $x^2 = e$. Montrer que G est abélien, et que si G est fini, son ordre n est une puissance de 2.

Exercice 4

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G.

1. Montrer que si H est un sous-groupe de G d'indice 2, alors H est distingué de G.

2. Montrer que si H est un sous-groupe de $Z(G)$, alors il distingué dans G.

3. Supposons que G est un groupe fini et que H est un sous-groupe distingué d'ordre 2 de G. Montrer que $H \subset Z(G)$.

4. Supposons que G est fini d'ordre n, alors montrer que pour tout $a \in G$, $a^n = e$.

Exercice 5

Désignons par S_3 le groupe des permutations de l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$, la loi de groupe étant la composition $(\sigma, \tau) \longmapsto \sigma\tau$. Soit la transposition (12), il est simple de voir que $H = \{id_E, (12)\}$ est un sous-groupe de S_3. Montrer que H n'est pas un sous-groupe normal de S_3.

Exercice 6

Soit un groupe $(G, \cdot)$ d'élément neutre e, on note par a^{-1} le symétrique d'un élément $a \in G$.

1. Soient H un sous-groupe de G et g un élément de G. Montrer que l'ensemble $H_g = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$ est un sous-groupe de G.

2. Soit l'application $f : \ G \longrightarrow G; a \longmapsto a^{-1}$. Montrer que f est un automorphisme si et seulement si $(G, \cdot)$ est abélien.

Exercice 7

Soient G et G' deux groupes finis d'ordres m et n respectivement. On suppose que $m \wedge n = 1$, démontrer que le seul morphisme de groupes f de G vers G' est le morphisme trivial.

Exercice 8

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G. Rappelons que $HK = \{hk \mid h \in h \text{ et } k \in K\}$.

1. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

2. Montrer que si H est un sous-groupe normal de G alors HK est un sous-groupe de G.

3. Montrer que si H est un sous-groupe normal de G alors $H \cap K$ est normal de K.

4. Montrer que si H, K sont normaux, alors le sous-groupe engendré par $H \cup K$ est normal de G.

Exercice 9

Soient G un groupe et $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de G. On désigne par H le sous-groupe de G engendré par les H_i. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{i \in I} N_G(H_i) \subseteq N_G(H)$, et que l'inclusion réciproque n'est pas forcément vraie.

Exercice 10

Soient G_1 et G_2 deux groupes, f un homomorphisme surjectif de G_1 sur G_2. Soit A une partie de G_1. Désignons par $Dist(A)$ le sous-groupe distingué de G_1 engendré par A. Prouver que $f(Dist(A))$ est le sous-groupe distingué de G_2 engendré par $f(A)$.

Exercice 11
Soient $(G, .)$ un groupe fini d'ordre $n \geqslant 2$ et H un sous-groupe distingué de G. Montrer que l'ordre de g dans G est un multiple de l'ordre de $\overline{g}$ dans G/H.

Exercice 12
Soit G un groupe.

1. Démontrer que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe normal de $\mathrm{Aut}(G)$.

2. Soit $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Int}(G)$ défini par $\varphi(g) = \varphi_g$ tel que $\varphi_g : G \longrightarrow G$, $x \longmapsto gxg^{-1}$. Démontrer que φ est un morphisme de groupes. Quel est son noyau ?

3. En déduire que $G/Z(G)$ est isomorphe à $\mathrm{Int}(G)$.

Exercice 13
Soient G un groupe et $D = \{(x, x) |\ x \in G\}$. Montrer que D est un sous-groupe distingué de $G \times G$ si et seulement si G est abélien.

Exercice 14
Soit A une partie non vide d'un groupe G. On appelle normalisateur de A dans G l'ensemble $N(A) = \{g \in G |\ gA = Ag\}$ et on appelle centralisateur de A dans G l'ensemble $Z(A) = \{g \in G \mid \forall a \in A, ga = ag\}$.

1. Montrer que $N(A)$ est un sous-groupe de G.

2. Montrer que $Z(A)$ est un sous-groupe distingué de $N(A)$.

Exercice 15
1. Soit $f : \ G \longrightarrow G'$ un homomorphisme de groupes surjectif, montrer qu'il existe une bijection entre les sous-groupes distingués de G contenant $\ker f$ et les sous-groupes distingués de G'.

2. Étudier le cas où G est un groupe, $H \lhd G$, $G' = G/H$ et $f = \pi$ la surjection canonique.

Exercice 16
Soient H, K deux sous-groupes d'un groupe fini G. Montrer que
$\mathrm{card}(HK) = \dfrac{|H||K|}{|H \cap K|}$, rappelons que $HK = \{hk \mid h \in H \text{ et } k \in K\}$.