Univérsité Mohamed Premier
Faculté Pluridisciplinaire
FPN-Nador

PROBABILITES

Professeur : B. GANBOURI

Filière : Economie et Gestion

Année universitaire : 2019-2020

Département de l'Economie et Gestion - Faculté Pluridisciplinaire de Nador - B.P 300,Selouane 62700 Nador -
fpn@ump.ac.ma

Table des matières

Chapitre 1

Dénombrement

1.1 Cardinal d'un ensemble

Le but de dénombrement est d'apprendre à compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini de grande taille.

Définition 1.1.1. *Soit Ω un ensemble fini. Le cardinal de Ω, noté $card(\Omega)$ ou $|\Omega|$, est le nombre d'éléments contenus dans l'ensemble Ω .*

Ainsi, si A et B sont deux sous ensembles de Ω alors,

1. $card(A) \leq card(\Omega)$.
2. $card(A) = card(\Omega) \Rightarrow A = \Omega$.
3. $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.
   En particulier, si $A \cap B = \varnothing$, alors : $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$.
4. $card(A \times B) = card(A) \times card(B)$, où $A \times B = \{(x, y)/x \in A, y \in B\}$ dit produit cartésien de A et B.

1.1.1 Principe de multiplication

Il permet de compter le nombre de résultats d'expériences qui peuvent se décomposer en une succession de sous-expériences.

On suppose qu'une expérience est une succession de m étapes.
Si la $i$ème étape a n_i résultats possibles pour $i = 1; \ldots; n$, alors le nombre total de résultats possibles de l'expérience globale est :

$$\boxed{n = \prod_{i=1}^{m} n_i = n_1 \times n_2 \times .... \times n_m}.$$

Exemple 1.1.1. *Vous voulez former un code de 3 chiffres pour votre carte bancaire. Combien de possibilités avez-vous de choisir un code ?*

L'expérience de combiner un code de 3 chiffres peut se décomposer en 3 étapes dont chacune on a 10 possibilités de choisir un chiffre.
On a $m = 3$, $n_1 = 10$, $n_2 = 10$ et $n_3 = 10$. Donc le nombre total de code possible est $n = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$.

1.2 Arrangements

Définition 1.2.1. *Étant donné un ensemble E de cardinal n. On appelle arrangement d'ordre p toute **liste de** p **éléments ordonnés** choisis parmi ces n éléments.*

Il y a de sortes d'arrangements :

Arrangements avec répétitions : Lorsqu'il s'agit d'un choix de p éléments ordonnés parmi n éléments en répétant éventuellement le même élément plus qu'une fois, le nombre d'arrangements possibles se calcule à l'aide de la formule suivante :

$$\boxed{\overline{A}_n^p = n^p}$$

Arrangements sans répétitions : Lorsqu'il s'agit d'un choix de p éléments ordonnés parmi n éléments sans répéter le même élément, le nombre d'arrangements possibles se calcule à l'aide de la formule suivante :

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\dots(n-p+1)}$$

où la notation $k!$ pour tout entier positif k, correspond au produit de tous les entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à k et dit la factorielle de k.

Exemple 1.2.1. *On ordonne au hasard deux lettres parmi les lettres du mot $DEUG$.*
*Si l'expérience aléatoire est réalisée **avec répétition**, il y a 4 possiblités pour le choix de la première lettre et 4 possiblités pour le choix de la deuxième lettre.*

Les arrangements possibles sont donc les suivants :

$$DD, DE, DU, DG, ED, EE, EU, EG, UD, UE, UU, UG, GD, GE, GU, GG.$$

Il y a donc un total de 16 résultats possibles.
On peut simplifier le dénombrement des résultats possibles en multipliant le nombre de possiblités pour chaque choix : $4 \times 4 = 16$ arrangements possibles.
Avec la formule précédente où $n = 4$ et $p = 2$, on effectue le calcul : $n^p = 4^2 = 16$ arrangements possibles.
*Si l'expérience aléatoire est réalisée **sans répétition**, il y a 4 possiblités pour le choix de la première lettre et 3 possiblités pour le choix de la deuxième lettre.*
Les arrangements possibles sont donc les suivants :

$$DE, DU, DG, ED, EU, EG, UD, UE, UG, GD, GE, GU.$$

Il y a donc un total de 12 résultats possibles.

On peut simplifier le dénombrement des résultats possibles en multipliant le nombre de possiblités pour chaque choix : $4 \times 3 = 12$ arrangements possibles.

Avec la formule précédente où $n = 4$ et $p = 2$, on effectue le calcul : $A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2} = 12$ arrangements possibles.

1.3 Permutations

Définition 1.3.1 (Permutations sans répétition)**.** *La permutation d'un ensemble d'éléments est un arrangement sans répétition de tous les éléments de cet ensemble.*

Le nombre de permutations d'un ensemble de n éléments est $n!$.

- Si $n = 0$ on prend $0! = 1$.
- Si n est plus grand on l'approxime par la formule de Stirling

$$\boxed{n! \simeq \sqrt{2.\pi.n}.\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

Exemple 1.3.1. *On extrait au hasard quatre jetons d'un sac contient un jeton rouge (R), un jeton bleu (B), un jeton jaune (J) et un jeton vert (V). Les résultats possibles sont :*

$$(R, B, J, V), (R, B, V, J), (R, J, B, V), (R, J, V, B), (R, V, B, J), (R, V, J, B),$$
$$(B, R, J, V), (B, R, V, J), (B, J, R, V), (B, J, V, R), (B, V, R, J), (B, V, J, R),$$
$$(J, R, B, V), (J, R, V, B), (J, B, R, V), (J, B, V, R), (J, V, R, B), (J, V, B, R),$$
$$(V, R, B, J), (V, R, J, B), (V, B, R, J), (V, B, J, R), (V, J, R, B), (V, J, B, R).$$

Il y a donc 24 *permutations possibles pour cet ensemble.*

Pour simplifier le calcul des permutations possibles, il suffit de multiplier le nombre d'éléments possibles pour chaque événement. Dans ce cas-ci, le calcul sera $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ *arrangements possibles.*

Avec la formule précédente où $n = 4$*, on effectue le calcul :* $n! = 4! = 24$ *arrangements possibles.*

Définition 1.3.2 (Permutations avec répétition)**.** *Étant donné un ensemble*

$$E = \{(\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{n_1}); (\underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{n_2}); \ldots; (\underbrace{a_r, a_r, \ldots, a_r}_{n_r})\},$$

de cardinal $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$ *où l'élémnt* a_i *se répète* n_i *fois pour* $i = 1, 2, ..., r$*. On appelle* $(n_1; n_2; \ldots; n_r)$*-permutation avec répétition de* E *une liste ordonnée de* n *éléments de* E*.*

Le nombre de permutation **avec répétition** est

$$\boxed{\mathcal{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!.\ldots.n_r!}}$$

Exemple 1.3.2. *Combien de mots différents peut-on écrire en permutant les lettres de mots "**econome**".*
Le nombre de mots qu'on peut former est le nombre des $(2, 1, 2, 1, 1)$*-permutation **avec répétition** de l'ensemble de lettres de mot "**econome**". Donc*

$$\mathcal{P}_{1,1,2,1,1,1} = \frac{7!}{2!1!2!1!1} = 1260.$$

1.4 Combinaisons

Définition 1.4.1 (Combinaisons sans répétition)**.** *On appelle combinaison sans répétition d'ordre* p *d'un ensemble* E *toute partie à* p *éléments (sans répéter le même élément plus qu'une fois) de* E*.*

Parmi ces n éléments, le nombre de combinaison de p éléments **sans répétition** est

$$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Si $p > n$ on a $C_n^p = 0$.

On utilise aussi la notation $\binom{n}{p} = C_n^p$.

Exemple 1.4.1. *Combien de choix de 2 étudiants au hasard pour représenter un groupe de ses collègues formé de 7 étudiants.*
Le nombre de choix est le nombre des combinaisons de 2 éléments pris parmi 7 sans répétition. C'est

$$C_7^2 = \frac{7!}{2! \times 5!} = 21.$$

Propriété 1.4.1.
- $C_n^p = C_n^{n-p}$.
- $C_n^0 = C_n^n = 1$.
- *Si* $n \geq 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.
- *Si* $n \geq 2$, $C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- *Si* $0 \leq p \leq n-1$, $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$.
- ***Binôme de Newton :*** $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p = \sum_{p=0}^n C_n^p a^p b^{n-p}$.
- ***Combinaisons avec répétition :*** *Le nombre de combinaison de p éléments* ***avec répétition*** *est*
$$C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}.$$

D'après la formule $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$, on peut tracer un triangle dit triangle de Pascal qui sert à développer le binôme de Newton.

$n = 0$:					1				
$n = 1$:				1		1			
$n = 2$:			1		2		1		
$n = 3$:		1		3		3		1	
$n = 4$:	**1**		**4**		**6**		**4**		**1**

Par exemple, pour $n = 4$, on a

$$(a+b)^4 = \mathbf{1}a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + \mathbf{1}b^4.$$

Chapitre 2

Calcul des probabilités

Le but des probabilités est d'essayer de rationaliser le hasard :
Quelles sont les chances d'obtenir un résultat suite à une expérience aléatoire ? Quelles chances ai-je d'obtenir "pile" en lançant une pièce de monnaie ? Quelles chances ai-je d'obtenir "6" en lançant un dé ? Quelles chances ai-je de valider la grille gagnante du loto ?...

2.1 Vocabulaire des événements

Définition 2.1.1.

- *On appelle expérience aléatoire toute expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat, résultat qui depend en effet du hasard.*
- *Chaque résultat possible et prévisible d'une expérience aléatoire est appelé éventualité liée à l'expérience aléatoire.*
- *L'ensemble formé par les éventualités est appelé univers, il est très souvent noté Ω.*
- *Un événement d'une expérience aléatoire est une partie quelconque de l'univers Ω.*
- *Un événement ne comprenant qu'une seule éventualité est un événement élémentaire.*
- *L'événement composé de toutes les éventualités est appelé événement certain.*
- *Pour tout événement A il existe un événement noté $\overline{A}$ et appelé événement contraire de A qui est composé des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.*

Exemple 2.1.1. *Lancer d'un dé à six faces :*

➔ *"obtenir 2" est une éventualité de cette expérience aléatoire.*

➔ *Univers :* $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

➔ $A =$ *"obtenir un 5" est un événement élémentaire que l'on peut noter* $A = \{5\}$,

➔ $B =$ *"obtenir un numéro pair" est un événement que l'on peut noter* $B = \{2; 4; 6\}$.

➔ *"obtenir 7" est un événement impossible,*

➔ *"obtenir un nombre positif" est un événement certain.*

➔ $\overline{B} =$ *"obtenir un nombre impair" est l'événement contraire de* B, Dans toute la suite du cours, on suppose que Ω l'univers associé à une expérience aléatoire est fini, et A et B deux événements associés à cet univers.

Définition 2.1.2.
- *Intersection d'événements : événement constitué des éventualités appartenant à A et à B noté $A \cap B$ (se lit "A inter B" ou "A et B"),*
- *Réunion d'événements : événement constitué des éventualités appartenant à A ou à B noté $A \cup B$ (se lit "A union B" ou "A ou B").*

Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que les événements sont disjoints ou incompatibles.

Exemple 2.1.2. *On considère l'ensemble des chiffres $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.*
On note A l'événement "obtenir un chiffre pair" et B l'événement "obtenir un chiffre strictement inférieur à six".

➔ *$A \cap B =$ "obtenir un chiffre pair et inférieure strictement à six" : $A \cap B = \{2; 4\}$,*

➔ *$A \cup B =$ "obtenir un chiffre pair ou inférieur strictement à six" : $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.*

2.2 Calcul des probabilités

2.2.1 Introduction

Pour décrire mathématiquement une expérience aléatoire, on choisit un modèle de cette expérience, pour cela on détermine l'univers et on associe à chaque événement élémentaire un nombre appelé **probabilité**.

Le calcul des probabilités se propose de déterminer la fréquence théorique de la réalisation ou la non réalisation d'un événement lié à une expérience aléatoire. Ce qui nous amène à considérer la définition suivante.

Définition 2.2.1. *La probabilité d'un événement A est noté $p(A)$ et correspond au rapport :*

$$\boxed{p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}}$$

Remarque 2.2.1. *On peut utiliser cette définition classique de probabilité seulement pour les expériences où les événements élémentaires qui sont **équiprobables**, c'est-à-dire les probabilités des événements élémentaires sont égales.*
Pour chaque événement élémentaire ω, on a $p(\omega) = \frac{1}{card(\Omega)}$.

Définition 2.2.2 (Définition axiomatique des probabilités)**.** *Soient $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que :*

- ☞ $\Omega \in \mathcal{A}$.
- ☞ $\forall A \subset \Omega,\ A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$.
- ☞ $\forall A, B \in \mathcal{A},\ A \cup B \in \mathcal{A}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est dit ***espace probabilisable****.*

Sur cet espace on définit une fonction p de $\mathcal{A}$ vers $[0,1]$ vérifiant :

- ➤ $p(\Omega) = 1$,
- ➤ $\forall A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \varnothing \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ est dit ***espace probabilisé****.*

En tous cas, on a la proposition suivante.

Propriété 2.2.1.

- ♦ $p(\varnothing) = 0$.
- ♦ $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.
- ♦ $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
- ♦ $A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$.
- ♦ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Exemple 2.2.1. *On considère l'ensemble Ω des entiers de 1 à 20. On choisit l'un de ces nombres au hasard.*
A est l'événement : "le nombre est multiple de 3 " :

- ➔ $A = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$,

B est l'événement : "le nombre est multiple de 2" :

- ➔ $B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$,

Calcul des probabilités :

- ➔ $p(A) = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10} = 0,3.$
- ➔ $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \dfrac{3}{10} = \dfrac{7}{10} = 0,7.$
- ➔ $p(B) = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2} = 0,5.$
- ➔ $p(A \cap B) = \dfrac{3}{20} = 0,15.$
- ➔ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{6}{20} + \dfrac{10}{20} - \dfrac{3}{20} = \dfrac{13}{20} = 0,65.$

2.2.2 Probabilité conditionnelle

La notion de probabilité conditionnelle permet de tenir compte dans une prévision d'une information complémentaire. Par exemple, si je tire au hasard une carte d'un jeu, j'estime naturellement à une chance sur quatre la probabilité d'obtenir un cœur, mais si j'aperçois un reflet rouge sur la table, je corrige mon estimation à une chance sur deux. Cette seconde estimation correspond à la probabilité d'obtenir un cœur **sachant** que la carte est rouge. Elle est **conditionnée** par la couleur de la carte, donc, **conditionnelle**.

Définition 2.2.3. *Soit A un événement tel que $p(A) > 0$. On appelle* ***probabilité conditionnelle*** *d'un événement B par rapport à l'événement A, ou encore, la probabilité de B sachant A, le nombre*

$$\boxed{p_A(B) = p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}}$$

Remarque 2.2.2. *Dans ces conditions, $p(A)$ s'appelle probabilité à* priori *de A et $p(B|A)$ s'appelle probabilité à* posteriori *de l'événement B.*
L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, p_A)$ est un espace probabilisé.

Exemple 2.2.2. *On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé à 6 faces, équilibré. On suppose que toutes les faces sont équiprobables, et on définit les événements :*

- *A : "la face obtenue porte un numéro pair";*
- *B : "la face obtenue porte un numéro multiple de 3".*

Déterminons la probabilité d'obtenir un numéro multiple de 3, sachant qu'on a un numéro pair.

Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle $p(B|A)$.

➔ *On a $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$ et alors $A \cap B = \{6\}$.*

➔ *Comme on est en situation d'équiprobabilité, on obtient par le calcul, $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$ donc, d'après la formule :*

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

2.2.3 Formule des probabilités totales

Si $A_1, A_2, \ldots$ et A_n sont des parties non vides de Ω telles que

$$\begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega \\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j \end{cases}$$

on dit que $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est **un système complet d'événements**.

Propriété 2.2.2. *Pour tout événement B, on a la formule :*

$$\boxed{p(B) = \sum_{k=1}^{n} p(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} p(B|A_k)p(A_k)}$$

Cas particulier $n = 2$ **:** Si on prend $A = A_1,\ A_2 = \overline{A}$, alors

$$\boxed{p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = p(B|A)p(A) + p(B|\overline{A})p(\overline{A})}$$

Exemple 2.2.3. *On suppose que l'on a dans un magasin des machines provenant de 2 usines différentes A et B : 70% viennent de A et 30% viennent de B. Parmi celles qui viennent de A, 20% présentent un défaut ; parmi celles qui viennent de B, 10% présentent un défaut.*

➔ *Déterminons le pourcentage de machines dans le magasin qui présentent un défaut.*
On note D l'événement "la machine est défectueuse" et A (resp. B) "la machine vient de l'usine A (resp. B).
On a $p(A) = 0,7, p(B) = 0,3, p(D|A) = 0,2 et P(D|B) = 0,1$. *D'après la formule des probabilités totales, on a*

$$\begin{aligned} p(D) = &= p(D|A)p(A) + p(D|B)p(B) \\ &= 0.2 \times 0,7 + 0,1 \times 0,3 = 0,14 + 0,07 = 0,17. \end{aligned}$$

➔ *Une machine donnée présente un défaut. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'usine B ?*
On cherche $p(B|D)$. *On a*

$$p\,(B|D) = \frac{p\,(D \cap B)}{p(D)} = \frac{p(D|B)p(B)}{p(D)} = \frac{3}{17} \approx 0,176.$$

2.2.4 Formule de Bayes

À la suite d'une expérience, un événement B peut apparaître. Cependant cet événement peut apparaître comme conséquence de n événements $A_1, A_2, \ldots$ et A_n qui forment un système complet d'événements (c'est-à-dire, B peut apparaître simultanément avec un et seulement un des événements $A_i, i \ldots n$. Supposons que l'on connaisse les probabilités des événements $A_1, A_2, \ldots$ et A_n (qui s'appellent également probabilités à **priori** des événements $A_1, A_2, \ldots$ et A_n) et que l'on connaisse aussi la probabilité d'apparition de l'événement B comme conséquence de l'événement A_i, c'est-à-dire $p(B|A_i), i = \ \ldots, n$.

En supposant qu'à la suite de l'expérience l'événement B se soit produit, **la formule de Bayes** permet de trouver séparément pour chaque $i = 1, \ldots, n$, la probabilité que l'événement A_i soit apparue à cause de l'événement B, c'est-à-dire la probabilité $p(A_i|B), i = 1, \ldots, n$ (ces probabilités s'appellent aussi les probabilités à **posteriori** des événements $A_1, A_2, \ldots$ et A_n.

En comparant les probabilités $p(A_i|B)$ et $p(A_i)$ on peut connaître l'effet de l'événement B sur la probabilité de l'événement A_i lorsqu'on sait que l'événement B s'est produit.

Propriété 2.2.3. *Pour tout événement B, on a la formule :*

$$\boxed{p(A_i|B) = \frac{p(A_i)p(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} p(B|A_k)p(A_k)},\ i = 1, \ldots, n}$$

La formule de Bayes est connue aussi sous le nom de **la formule des hypothèses ou des causes**.

Exemple 2.2.4. *On considère deux urnes* U_1 *et* U_2 *dont la première est composée de 2 boules blanches et d' une boule noire et la deuxième est composée d'une boule noire et de 5 boules noires.*
On pige une boule de l'urne U_1 *et on l'introduit dans l'urne* U_2. *On extrait ensuite une boule de l'urne* U_2.

➔ *Sachant que la boule tirée de l'urne U_2 est blanche, trouver la probabilité que la boule transférée était noire.*

On applique la formule de Bayes. Soit B l'événement "la boule pigée de l'urne U_2 est blanche" et A_l (respectivement A_2) l'événement "la boule transférée de l'urne U_1 à l'urne U_2 est blanche (respectivement noire)", alors

$$p(A_1) = \frac{2}{3},\ p(A_2) = \frac{1}{3},$$
$$p(B|A_1) = \frac{2}{7},\ p(B|A_2) = \frac{1}{7}.$$

d'où

$$p(A_2|B) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{7}}{\frac{2}{3} \times \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{7}} = \frac{1}{5}.$$

2.2.5 Indépendances des événements

Définition 2.2.4. *On dit que deux événements A et B sont indépendants, si*

$$\boxed{p(A \cap B) = p(A) \times p(B)}$$

Remarque 2.2.3. *Si deux événements A et B sont indépendants, alors la réalisation de l'un n'a pas d'influence sur la réalisation de l'autre, ç-à-d $p(B|A) = p(B)$ et $p(A|B) = p(A)$.*

Exemple 2.2.5. *On jette trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée, ce qui donne*

$$\Omega = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP\}.$$

On considère les événements $A =$ "le premier jet donne face", $B =$ "le second jet donne face" et $C =$ "deux jets consécutifs donnent face".

➔ *Indépendance de A et B :*

➔ $p(A) = p\left(\{FFF, FFP, FPF, FPP\}\right) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$,

➔ $p(B) = p\left(\{FFF, FFP, PFF, PFP\}\right) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$,

➔ $p(A \cap B) = p\left(\{FFF, FFP\}\right) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Puisque $p(A) \times p(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = p(A \cap B)$, les événements A et B sont donc indépendants.

➔ *Indépendance de A et C :*

➔ $p(C) = p\left(\{FFF, FFP, PFF\}\right) = \frac{3}{8}$,

➔ $p(A \cap C) = p\left(\{FFF, FFP\}\right) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Puisque $p(A) \times p(C) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16} \neq p(A \cap C)$, les événements A et C ne sont donc pas indépendants.

Chapitre 3

Variables aléatoires réelles discrètes

3.1 Généralités

Une variable aléatoire est une fonction définie sur l'ensemble des éventualités, c'est-à-dire l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. On s'intéressera aux valeurs prises x_i par une variable aléatoire X, événement noté $(X = x_i)$, et plus particulièrement à la probabilité d'obtenir ces valeurs $P(X = x_i)$. C'est à peu près la même chose qu'une variable statistique sauf que dans le cas d'une variable statistique on évalue un comportement réalisé (moyenne, etc) alors que dans le cas de variables aléatoires on suppose un comportement futur ou théorique (Dans ce cas, on parle d'espérance plutôt que de moyenne par exemple). Les variables aléatoires sont utilisées pour modéliser le résultat d'un mécanisme non-déterministe.

Dans tout se qui suit, soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé (voir la définition au chapitre 2). En général, on prend $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ensemble des parties de Ω.

Définition 3.1.1. *Nous appelons* ***variable aléatoire réelle*** *(v.a.r.) toute application X à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :*
Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I) = \{\omega, \quad X(\omega) \in I\}$ est un événement de $\mathcal{A}$.

Cette définition nous assure que $X^{-1}(I)$ est un événement dont on peut calculer la probabilité.

Notations :

- Nous notons $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$.
- $X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) = x\}$ se note $\{X = x\} = (X = x)$.
- $X^{-1}(]-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) \leq a\}$ se note $\{X \leq a\} = (X \leq a)$.
- $X^{-1}(]a, b]) = \{\omega \in \Omega, \quad a < X(\omega) \leq b\}$ se note $\{a < X \leq b\} = (a < X \leq b)$.

S'il existe une suite des réelles $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ distinctes telle que $X(\Omega) = \{x_i, \quad i \in \mathbb{N}\}$ alors la v.a.r X est dite **discrète** (Elle prend un nombre fini ou infini dénombrable de valeurs)

Exemple 3.1.1. *On lance une pièce de monnaie bien équilibrée trois fois successives. Ce qui donne* $\Omega = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP\}$.

Soit X la v.a.r discrète définie sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = \textit{nombre de pile}.$$

On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. *Et si ω est l'événement "PFP", alors* $X(\omega) = 2$.

Exemple 3.1.2. *Soit A un événement de Ω. On définie la v.a.r X telle que :* $X(\omega) = \begin{cases} 1; & \omega \in A \\ 0; & \omega \notin A \end{cases}$
La v.a.r X est dite v.a.r ***indicatrice*** *de l'événement A, et on la note $\mathbb{1}_A$.*

Exemple 3.1.3. *Un jeu de hasard consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces. Le lanceur gagne la somme double de la valeur de la face obtenue si celle-ci est paire, sinon, il perd le double de la valeur indiquée par le dé.*
On appelle X le gain, positif ou négatif, du joueur après un lancer.

➔ *Ici, l'ensemble des issues possibles est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$,*

➔ *on a défini une v.a.r discrète X telle que :*
$X(1) = -2$, $X(2) = 4$, $X(3) = -6$, $X(4) = 8$, $X(5) = -10$ *et* $X(6) = 12$.

Exemple 3.1.4. *On lance un dé bien équilibré plusieurs fois et soit X la v.a.r discrète égale au nombre de fois avant d'obtenir le numéro 6. On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$.*

3.2 Loi de probabilité d'une v.a.r discrète

Définition 3.2.1. *Soit X une v.a.r discrète telle que $X(\Omega)$ est fini de cardinal n. Nous appelons* ***loi de probabilité ou distribution*** *de X la probabilité $P = P_X$ qui à chaque élément x_i pris par X, $i = 1, \dots, n$, on associe la probabilité p_i de l'événement " $X = x_i$ " :*

$$\boxed{p_i = P_X(\{X = x_i\})}$$

Remarque 3.2.1. *Les probabilités p_i, $i = 1, \dots, n$ sont tous positives et vérifient : $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.*

Définir la loi de probabilité d'une expérience aléatoire reviendra à :

- déterminer toutes les valeurs possibles x_i, $i = 1, \dots, n$ prises par X ;
- calculer les probabilités p_i, $i = 1, \dots, n$ des événements correspondants ;
- regrouper les résultats dans un tableau du type :

Valeurs x_i prises par X	x_1	$\dots$	x_n
Probabilité correspondante $p_i = P_X(\{X = x_i\})$	p_1	$\dots$	p_n

- Si une v.a.r X suit une loi $\mathcal{L}$, on note $X \rightsquigarrow \mathcal{L}$.

Exemple 3.2.1. *Reprenons l'exemple 3.1.1. On a $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$ et $x_4 = 3$.*

➔ $p_1 = P_X(\{X = 0\}) = p(\{FFF\}) = \dfrac{1}{8}$,

➔ $p_2 = P_X(\{X = 1\}) = p(\{PFF, FFP, FPF\}) = \dfrac{3}{8}$,

➔ $p_3 = P_X(\{X = 2\}) = p(\{PPF, PFP, FPP\}) = \dfrac{3}{8}$,

➔ $p_4 = P_X(\{X = 3\}) = p(\{PPP\}) = \dfrac{1}{8}$.

Regroupons les résultats dans le tableau :

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Exemple 3.2.2. *On reprend l'énoncé de l'exemple 3.1.3. La loi de X est donnée par :*

x_i	-10	-6	-2	4	8	12
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3.3 Fonction de répartition d'une v.a.r discrète

La fonction de répartition d'une v.a.r caractérise la loi de probabilité de cette v.a.r.

Définition 3.3.1. *Soit X une v.a.r. On appelle fonction de répartition de X la fonction $F = F_X$ de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ définie par :*

$$\boxed{F_X(x) = P_X(X \le x) = P_X(]-\infty, x]), \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

La fonction de répartition F nous permet de calculer pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, la probabilité $P(X \in I)$. Cependant, elle possède les propriétés suivantes.

Propriété 3.3.1. *On suppose que les valeurs de l'univers Ω sont telles que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.*

1. *F est croissante sur $\mathbb{R}$,*
2. *F est continue à droite en tout point,*
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$,
4. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$,
5. $P(a < X \le b) = P(]a,b]) = F(b) - F(a)$,
6. $P(X > a) = 1 - P(X \le a) = 1 - F(a)$,
7. $P(X = a) = \lim_{x \to a^+} F(x) - \lim_{x \to a^-} F(x) = F(a) - \lim_{x \to a^-} F(x)$.
   Par conséquent, pour tout a où F est continue on a $P(X = a) = 0$.

Remarque 3.3.1. *On suppose toujours que les valeurs de l'univers Ω sont telles que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \ldots$. Alors, on peut exprimer F en remarquant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{X \le x\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}, x_i \le x} \{X = x_i\}$, et de cette égalité on déduit*

$$\boxed{F(x) = P(X \le x) = P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}, x_i \le x} \{X = x_i\}\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}, x_i \le x} P(X = x_i)}$$

Exemple 3.3.1. *On reprend l'énoncé de l'exemple 3.1.1. La fonction de répartition F associée est donnée par :*

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \in]-\infty, 0[\\ \frac{1}{8}; & x \in [0,1[\\ \frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}; & x \in [1,2[\\ \frac{3}{8}+\frac{4}{8}=\frac{7}{8}; & x \in [2,3[\\ 1; & x \in [3,+\infty[\end{cases}$$

3.4 Indépendance de deux v.a.r

Définition 3.4.1. *Soient X et Y deux v.a.r discrètes dans un même univers Ω.*
*On dit que X et Y sont **indépendantes** si pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ les deux événements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants.*
Autrement dit :

$$\boxed{P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(X = x)P(Y = y)}$$

Exemple 3.4.1. *On lance deux dés équilibrés à six faces (un rouge, et un bleu). On appelle X le numéro de la face du dé bleu, et Y le numéro de la face du dé rouge. On appelle S la somme des faces obtenues.*

- ➔ *Les variables X et Y sont indépendantes.*
- ➔ *Les variables X et S ne sont pas indépendantes.*
- ➔ *Les variables Y et S ne sont pas indépendantes.*

3.5 Espérance, Variance et écart-type d'une v.a.r discrète

Définition 3.5.1. *On appelle **espérance** d'une v.a.r discrète X le réel noté $E(X)$ qui vaut :*

$$\boxed{E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i}$$

Ce nombre important en probabilités représente la valeur moyenne de la v.a.r discrète X.

Exemple 3.5.1. *On reprend l'énoncé de l'exemple 3.1.3. La loi de X est donnée par :*

x_i	-10	-6	-2	4	8	12
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On a

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i = (-10) \times \frac{1}{6} + (-6) \times \frac{1}{6} + (-2) \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 8 \times \frac{1}{6} + 12 \times \frac{1}{6} = 1$$

Concrètement, cela signifie "qu'en moyenne", le joueur gagne 1 point.

Définition 3.5.2. *Soit X une v.a.r discrète d'espérance $E(X)$.*

- ➤ *On appelle **variance** de la v.a.r X le réel noté $V(X)$ qui vaut :*

$$\boxed{V(X) = p_1[x_1 - E(X)]^2 + p_2[x_2 - E(X)]^2 + \cdots + p_n[x_n - E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i[x_i - E(X)]^2}$$

- ➤ *On appelle **écart-type** de X le réel noté $\sigma(X)$ ou σ_X défini par :*

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

Exemple 3.5.2. *Calcul de la variance et l'écart-type pour le jeu de dé de l'exemple 3.1.3 :*

➔ $V(X) = \dfrac{1}{6}[-10-1]^2 + \dfrac{1}{6}[-6-1]^2 + \dfrac{1}{6}[-2-1]^2 + \dfrac{1}{6}[4-1]^2 + \dfrac{1}{6}[8-1]^2 + \dfrac{1}{6}[12-1]^2 = \frac{358}{6} = \frac{179}{3}$.

➔ $\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{\frac{179}{3}} \simeq 7,72$.

Remarque 3.5.1.
- *L'**espérance** $E(X)$ est la moyenne des valeurs pondérées par les probabilités p_i.*
- *La **variance** permet de caractériser l'étalement des valeurs de la v.a.r X autour de sa moyenne $E(X)$.*
- *On peut démontrer que la **variance** de la v.a.r X vaut aussi :*

$$\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - E(X)^2}$$

À partir de v.a.r existantes, on peut en créer de nouvelles. Avec des notations usuelles on obtient :

- Pour tout a et b de $\mathbb{R}$: $aX + b : \omega \mapsto aX(\omega) + b$,
- $X + Y : \omega \mapsto X(\omega) + Y(\omega)$.
- $X.Y : \omega \mapsto X(\omega) \times Y(\omega)$.

Propriété 3.5.1. *Soit X et Y deux v.a.r.*

1. *Pour toute fonction ϕ on a $E(\phi(X)) = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)p_i$.*
2. *$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.*
3. *$E(aX) = aE(X)$, $\quad V(aX) = a^2V(X)$, $\quad \forall a \in \mathbb{R}$.*
4. *Si $X = c$ est constante, alors $E(c) = c$, $\quad V(c) = 0$.*
5. *Si X et Y sont indépendantes, alors $E(X.Y) = E(X)\times E(Y)$, et $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$.*

3.6 Lois discrètes fondamentales

3.6.1 Loi de Bernoulli

Définition 3.6.1. *Une* ***expérience de Bernoulli*** *est une expérience qui n'a que deux issues possibles, l'une appelée « succès » qui a pour probabilité p, l'autre appelée « échec » qui a pour probabilité $q = 1 - p$.*
Définir une ***loi de Bernoulli de paramètre*** *p qu'on note $\mathcal{B}(p)$, c'est associer une loi de probabilité discrète à cette expérience aléatoire en faisant correspondre la valeur 1 à l'apparition d'un succès et 0 à celle d'un échec.*

x_i	1	0
$p(X = x_i)$	p	$1 - p$

Exemple 3.6.1. *Si on lance un dé et qu'on nomme « succès » l'apparition de la face 6, on obtient la loi de Bernoulli suivante :*

x_i	1	0
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Propriété 3.6.1. *Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernouilli $\mathcal{B}(p)$, alors :*

- *L'espérance de X vaut $E(X) = p$.*
- *La variance de X vaut $V(X) = pq$.*

Exemple 3.6.2. *Dans l'exemple précédent, on obtient $E(X) = \dfrac{1}{6}$ et $V(X) = \dfrac{5}{36}$.*

3.6.2 Loi binomiale

Définition 3.6.2. *La* ***loi binomiale de paramètres*** *n* ***et*** *p, notée $\mathcal{B}(n; p)$ est la loi de probabilité du nombre de succès dans la répétition de n expériences de Bernouilli de paramètre p identiques et indépendantes.*
Elle est définie par :

$$\boxed{P(X = k) = C_n^k \times p^k \times q^{n-k} \quad , \quad \forall \ \ 0 \leq k \leq n}$$

Exemple 3.6.3. *On lance 2 fois un dé bien équilibré. On s'intéresse à l'apparition de la face 6. Chaque lancer est une expérience de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{6}$. On obtient donc une loi binomiale $\mathcal{B}\left(2; \dfrac{1}{6}\right)$.*

nombre de succès	0	1	2
probabilité	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Propriété 3.6.2. *Soit X une v.a.r suivant une loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors :*

- ♦ *L'espérance de X vaut $E(X) = np$.*
- ♦ *La variance de X vaut $V(X) = npq$.*

Exemple 3.6.4. *Dans l'exemple précédent, on obtient $E(X) = \frac{1}{3}$ et $V(X) = \frac{5}{18}$.*

3.6.3 Loi de Poisson

La loi de Poisson apparaît comme loi limite universelle dans de nombreuses situations et joue un rôle fondamental dans les phénomènes de temps d'attente et de répartition aléatoire de points dans l'espace.

La loi de Poisson modélise des situations où l'on s'intéresse au nombre d'occurrences d'un événement dans un laps de temps déterminé ou dans une région donnée. Par exemple :

- Nombre d'appels téléphoniques qui arrivent à un standard en x minutes,
- nombre de clients qui attendent à la caisse d'un magasin,
- nombre de défauts de peinture par m^2 sur la carrosserie d'un véhicule, ...

Définition 3.6.3. *La variable aléatoire X suit une* ***loi de Poisson de paramètre*** *λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ lorsque sa loi de probabilité vérifie :*

$$\boxed{P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}}$$

Exemple 3.6.5. *On considère la variable aléatoire X mesurant le nombre de clients se présentant au guichet 1 d'un bureau de poste par intervalle de temps de durée 10 minutes entre 14h30 et 16h30. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.*

➔ *Pour $\lambda = 5$, la table de la loi de Poisson nous donne :*

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$P(X = k)$	0,007	0,034	0,084	0,140	0,176	0,176	0,146	0,104	0,065	0,036	0,018	0,008

➔ *La probabilité qu'entre 14h30 et 14h40, 10 personnes exactement se présentent à ce guichet vaut :* $P(X = 10) = 0,018$.

➔ *La probabilité qu'entre 15h20 et 15h30, au maximum 3 personnes se présentent à ce guichet vaut :* $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,265$.

➔ *La probabilité qu'entre 16h00 et 16h10, 8 personnes au moins se présentent à ce guichet vaut :* $P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = 7)] = 1 - 0,867 = 0,133$.

Propriété 3.6.3. *Soit X une v.a.r suivant une loi de Poisson de paramètre λ, alors l'espérance et la variance sont égales et valent $E(X) = V(X) = \lambda$.*

Exemple 3.6.6. *Dans l'exemple précédent, on obtient $E(X) = V(X) = 5$.*

Remarque 3.6.1.

- *La loi de Poisson décrit bien la loi binomiale pour n tendant vers l'infini et p tendant vers zéro, avec le produit np tendant vers une constante λ qui est le paramètre de la loi de Poisoon. Elle modélise donc les expériences de Bernoulli avec une très faible probabilité de succès, mais avec un grand nombre d'essais, du même ordre de grandeur que l'inverse de la probabilité de succès.*
- *En pratique, cette approximation est faite dès que $n > 20, \quad p < 0.1$ et $np \leq 5$.*

Exemple 3.6.7. *La probabilité de gagner au tiercé est de $1/1000$. Quelle est la probabilité de gagner k fois en jouant 2000 fois ?*

Nous modélisons cette situation par une expérience binomiale de paramètre $n = 2000$ et $p = 1/1000$. Puisque $n > 20, \quad p < 0.1$ et $\lambda = np = 2 \leq 5$, alors

$$P(X = k) \simeq e^{-2}\frac{2^k}{k!}.$$

Dans le tableaux suivant, on peut comparer quelques valeurs des deux lois :

k	0	1	2	3	4	5
$\mathcal{B}(2000; 1/1000),\ P(X = k)$	0.13520	$0,27067$	$0,27081$	$0,18053$	$0,09022$	$0,03605$
$\mathcal{P}(2),\ P(X = k)$	$0,13534$	$0,27067$	$0,27067$	$0,18045$	$0,09022$	$0,03609$

L'avantage de la loi de Poisson est qu'elle est bien plus rapide à calculer, puisqu'elle ne fait pas intervenir de coefficients binômiaux.

Tableau récapitulatif des lois discrètes

Dans ce tableau, $p \in [0,1]$ et $q = 1 - p$.

Nom	Ensemble des valeurs	Loi	Espérance	Variance
Loi uniforme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$	$[\![1;n]\!]$	$\mathrm{P}(X=k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Loi de Bernoulli $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	$\{0,1\}$	$\mathrm{P}(X=0) = 1-p = q$ $\mathrm{P}(X=1) = p$	p	pq
Loi binomiale $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$	$[\![0;n]\!]$	$\mathrm{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	npq
Loi hypergéométrique $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,M,n)$	inclus dans $[\![0;n]\!]$	$\mathrm{P}(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$n\frac{M}{N}$	$n\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-n}{N-1}$
Loi hypergéométrique $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$	inclus dans $[\![0;n]\!]$	$\mathrm{P}(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$npq\frac{N-n}{N-1}$
Loi de Poisson $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\mathrm{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
Loi géométrique $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$\mathrm{P}(X=k) = p \cdot q^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$

Chapitre 4

Variables aléatoires réelles continues

4.1 Densité de probabilité et variables aléatoires réelles continues

Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle. En particulier, dans le cas où la variable aléatoire peut prendre toute valeur réelle (son ensemble de définition contient un intervalle de $\mathbb{R}$), on parle de variable aléatoire réelle.

Dans ce cas, il ne s'agira plus de calculer une probabilité d'apparition d'une valeur donnée mais d'un intervalle.Citons quelques exemples :

- temps d'attente pour avoir le bus
- longueur de cheveux
- Duré de vie d'un objet
- moyenne des tailles de 20 étudiants pris au hasard, ...

On introduit une définition d'une variable aléatoire continue par densité de probabilité.

Définition 4.1.1. *On appelle* ***densité de probabilité*** *sur $\mathbb{R}$ toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :*

1. *f est* ***positive et continue*** *sur $\mathbb{R}$ sauf en nombre finis de points,*
2. *$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.*

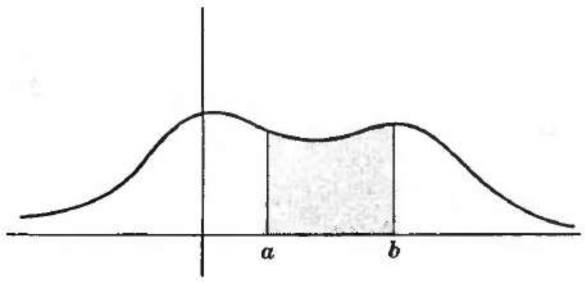
Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. Une variable aléatoire X ***suit la loi de densité*** *f si, pour tout intervalle I, la probabilité de l'événement $(X \in I)$ est donnée par :*

$$\boxed{p(X \in I) = \int_I f(x)dx}$$

Si $I = [a; b]$, on a

$$\boxed{p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx}$$

On dit aussi que X est une variable aléatoire (v.a.r) ***continue*** *de densité f.*



$P(a \leqslant X \leqslant b) =$ aire en grisé

Propriété 4.1.1. *Pour tous réels a et b :*

- $p(X = a) = 0$,
- $p(a \leq X \leq b) = p(a \leq X < b) = p(a < X \leq b) = p(a < X < b)$,
- $p(X > a) = 1 - p(X \leq a)$ *et* $p(a < X < b) = p(X < b) - p(X \leq a)$.

Exemple 4.1.1. *Montrons que la fonction f_1 définie par*

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

est une fonction de densité de probabilité.

➔ *La fonction f_1 est positive et continue sauf en 0 et 1.*

➔ *Puisque f_1 est nulle en dehors de l'intervalle $[0, 1]$ alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx = \int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 1dx = 1$.*

Donc, f_1 est bien une densité de probabilité.
Montrer que la fonction f_2 définie par

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq -1 \\ x+1 & si \quad -1 < x \leq 0 \\ -x+1 & si \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

est une fonction de densité de probabilité.

4.2 Fonction de répartition d'une v.a.r continue

Définition 4.2.1. *Soit X une v.a.r continue de densité f. On définit la fonction de répartition F de X la fonction de $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\boxed{F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt}$$

Comme dans le cas discret, la fonction F vérifie les assertions suivantes.

Propriété 4.2.1. *1. F est croissante sur $\mathbb{R}$,*

2. $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,

3. $p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$,

4. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - \int_{-\infty}^a f(t)dt = 1 - F(a)$.

Exemple 4.2.1. *La fonction de répartition F liée à la densité de probabilité f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \notin [0,1] \\ 2x; & x \in [0,1] \end{cases}$$

est telle que :

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \in]-\infty, 0] \\ x^2; & x \in [0,1] \\ 1; & x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

4.3 Espérance et variance d'une v.a.r continue

Définition 4.3.1. *Soit X une v.a.r continue et f sa densité.*

- *On appelle **espérance** de X le réel, noté $E(X)$, défini par la relation*

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\ dx}$$

- *On appelle **variance** de X le réel, noté $V(X)$, qui, s'il existe, est défini par la relation*

$$\boxed{V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\ x - E(X)\ ]^2 f(x)\ dx}$$

- *On appelle **écart-type** de X le réel, noté σ_X ou $\sigma(X)$ défini par la relation*

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{V(X)}}$$

Remarque 4.3.1. *On peut montrer qu'on a* $\boxed{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$ *avec* $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\ dx$.

Exemple 4.3.1. *On peut s'amuser à calculer l'espérance, la variance et l'écart-type pour la fonction f_2 définie dans l'exemple 4.1.1 :*

➔ *L'espérance :*

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_2(x)\ dx \\ &= \int_{-\infty}^{-1}\ x \times 0\ dx + \int_{-1}^{0}\ x(x+1)\ dx + \int_0^1\ x(-x+1)\ dx + \int_1^{+\infty} x \times 0\ dx \\ &= \int_{-1}^{0} (x^2 + x)\ dx + \int_0^1 (-x^2 + x)\ dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - 0 = 0. \end{aligned}$$

➔ *La variance :*

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\ x - E(X)\ ]^2 f_2(x)\ dx \\ &= \int_{-1}^{0}\ x^2(x+1)\ dx + \int_0^1\ x^2(-x+1)\ dx \\ &= \int_{-1}^{0}(x^3+x^2)dx + \int_0^1(-x^3+x^2)dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= 0 - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

➔ *L'écart-type :* $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Propriété 4.3.1. *Soit X une v.a.r continue de densité de probabilité f et admettant une espérance et une variance, alors pour tous $a; b \in \mathbb{R}$:*

- ♦ $E(aX+b) = aE(X)+b$.
- ♦ $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$ *et* $E(X-Y) = E(X)-E(Y)$.
- ♦ $E(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)\ dx$ *si cet intégral existe.*
- ♦ $V(b) = 0$ *et* $V(aX+b) = a^2V(X)$.
- ♦ $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$.

Si de plus X et Y sont indépendantes,

- ♦ $E(XY) = E(X)\times E(Y)$.
- ♦ $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$ *et* $V(X-Y) = V(X)+V(Y)$.

Définition 4.3.2. *Si une v.a.r continue X d'espérance $E(X)$ et un écart-type σ_X, alors la v.a.r $X^* = \frac{X-E(X)}{\sigma_X}$ est dite v.a.r continue* ***centrée réduite.***

D'après la propriété 4.3.1, on a $E(X^*) = 0$ et $\sigma(X^*) = 1$.

4.4 Lois continues fondamentales

4.4.1 Loi uniforme

Il s'agit ici de la loi la plus simple pour les v.a.r à densité. Elle correspond au fait de choisir au hasard un réel dans un segment $[a,b]$.

Définition 4.4.1. *Soient a et b deux réels tels que $a<b$. On dit qu'une v.a.r X suit la* ***loi uniforme*** *sur $[a,b]$, et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([a,b])$, si elle admet pour densité la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}; & x \in [a,b] \\ 0; & x \notin [a,b] \end{cases}$$

Propriété 4.4.1. *Si $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([a,b])$, alors*

- ♦ *La fonction de répartition F de X est donnée par*

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}; & a < x < b \\ 1; & x \geq b \end{cases}$$

- ♦ *L'espérance de X est* $\boxed{E(X) = \frac{a+b}{2}}$.

- ♦ *La variance de X est* $\boxed{V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$

Exemple 4.4.1. *Omar et Ali se donnent rendez-vous entre $12h$ et $14h$. Proche du lieu fixé, Ali arrivera assurément à $12h30$. Quant à Omar, son arrivée dépend des conditions de circulation routière : il arrivera entre $12h$ et $13h$*

➔ *La v.a.r continue X donnant l'heure d'arrivée de Omar suit la* ***loi uniforme sur*** $[12, 13]$**.**

➔ *Calculons la probabilité que Omar arrive avant Ali, dont l'arrivée est programmée à $12h30$. Omar arrive avant Ali si et seulement si Omar arrive avant $12h30$, c'est-à-dire entre $12h$ et $12h30$. La probabilité recherchée est donc :*

$$p(X \leq 12,5) = p(12 \leq X \leq 12,5) = \frac{12,5-12}{13-12} = 0,5.$$

➔ *Calculons la probabilité que Ali attende Omar plus de 10 minutes. Ali attend Omar plus de 10 minutes si et seulement si Omar arrive après $12h40$, c'est-à-dire entre $12h40$ et $13h$. Comme $12h40$ représente $(12 + \frac{40}{60})h = \frac{38}{3}h$, la probabilité recherchée est :*

$$p(X \geq \frac{38}{3}) = p(\frac{38}{3} \leq X \leq 13) = \frac{13 - \frac{38}{3}}{13-12} = \frac{1}{3}.$$

4.4.2 Loi exponentielle

La loi exponentielle s'applique bien aux matériels électroniques, c'est-à-dire aux matériels fonctionnant pratiquement sans usure, aux matériels subissant des défaillances brutales ou à des systèmes complexes dont les composants ont des lois de fiabilité différentes. Elle permet de décrire la période de fonctionnement durant laquelle le taux de défaillance est constant ou presque constant.

Définition 4.4.2. *Soit λ un réel strictement positif. On dit qu'une v.a.r X suit la* ***loi exponentielle de paramètre*** *λ et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$, si elle admet pour densité la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}; & x \geq 0 \end{cases}$$

Propriété 4.4.2. *Si $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors*

- ♦ *La fonction de répartition F de X est donnée par*

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}; & x \geq 0 \end{cases}$$

- ♦ *L'espérance de X est* $\boxed{E(X) = \dfrac{1}{\lambda}}$.
- ♦ *La variance de X est* $\boxed{V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}}$

Exemple 4.4.2. *On suppose que le temps, en heures, nécessaire pour réparer une machine est une v.a.r T suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,5$.*

➔ *La probabilité pour que le temps de réparation dépasse 2 heures est :*

$$p(T > 2) = 1 - p(T < 2) = 1 - F(2) = e^{-1} = 0,368$$

➔ *Sachant que la réparation a déjà dépassé 9 heures, quelle est la probabilité qu'elle prenne au moins 10 heures ?*

On obtient :

$$p(T > 10|T > 9) = \frac{p((T > 10) \cap (T > 9))}{p(T > 9)} = \frac{p(T > 10)}{p(T > 9)} = \frac{1 - F(10)}{1 - F(9)} = \frac{e^{-5}}{e^{-4,5}} = e^{-0,5} = 0,606.$$

*La loi exponentielle étant une **loi sans mémoire** (si $t_1 \leq t_2$ alors $p(T > t_2|T > t_1) = p(T > t_2 - t_1)$).*

4.4.3 Loi de Laplace-Gauss ou loi normale

- La loi normale est une des lois de probabilité la plus utilisée. Elle dépend de deux paramètres, la moyenne μ, paramètre de position, et l'écart-type σ, paramètre mesurant la dispersion de la variable aléatoire autour de sa moyenne.
- Elle s'applique à de nombreux phénomènes, en physique, en économie (erreurs de mesure). De plus, elle est ***la forme limite*** de nombreuses distributions discrètes.
- Elle représente la loi de distribution d'une v.a.r X dépendant d'un grand nombre de facteurs agissant sous forme additive, chacun ayant une variance faible par rapport à la variance résultante.
- Elle peut représenter la fin de vie des dispositifs subissant un phénomène de vieillissement, usure, corrosion,...

Définition 4.4.3. *Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On dit qu'une v.a.r X suit la **loi de Laplace-Gauss ou loi normale de paramètre** (μ, σ) et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, si elle admet pour densité la fonction f définie par :*

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

Propriété 4.4.3. *Si X est une v.a.r suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ alors*

- ♦
$$\boxed{E(X)=\mu \quad et \quad \sigma(X)=\sigma}$$
Ainsi les paramètres d'une loi normale sont en fait son espérance mathématique et son écart-type.

- ♦ *Pour tous a et b réels tels que $a \leq b$:*
$$\boxed{p(a \leq X \leq b)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx}$$

Remarque 4.4.1. *Dans les figures 4.1, on peut observer :*

- *que la courbe admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x=m=\mu$, (on dit que cette courbe est une **courbe en cloche** ou **courbe de Gauss**)*
- *que le maximum de la courbe est atteint en m, espérance de la variable X (ce maximum valant $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$),*
- *et que plus σ est grand, plus la courbe « s'étale » autour de la moyenne, en accord avec la signification de l'écart-type.*

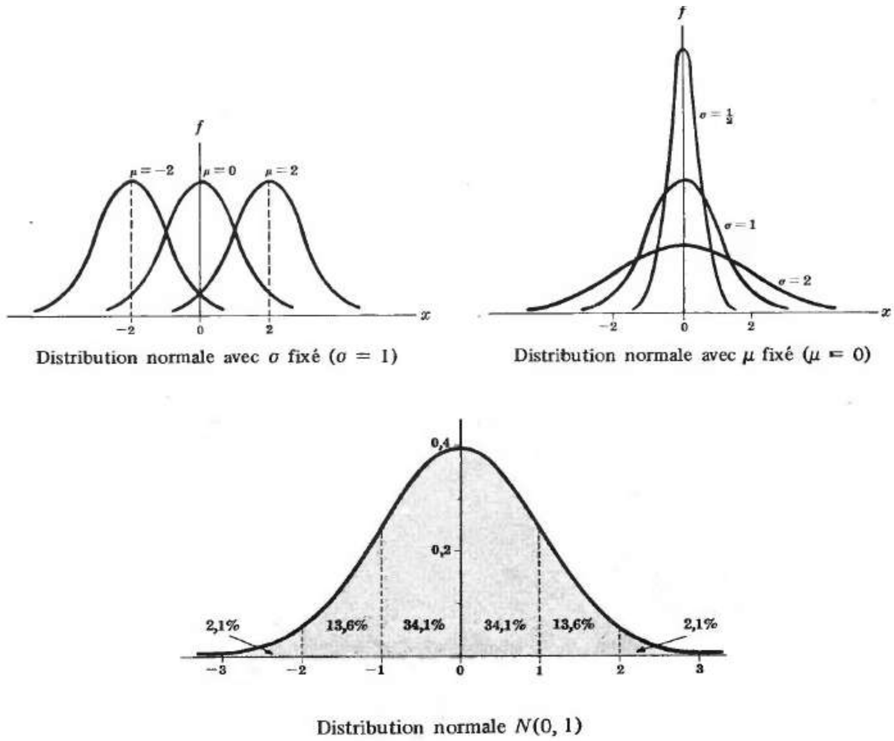


FIGURE 4.1 – Distribution normale

<u>Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$</u> :

La v.a.r T qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ est une **v.a.r centrée réduite**. Sa densité de probabilité est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}}$$

La fonction de répartition d'une v.a.r suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$ est telle que (voir figure 4.2-(1))

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = p(T \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt}$$

On la note parfois par Π ou Φ et sa variable par z.

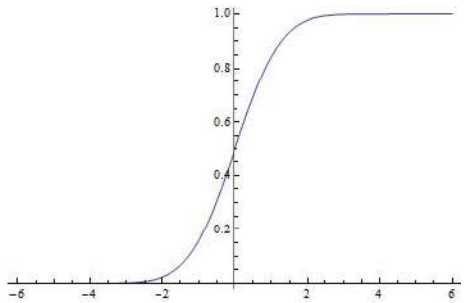


FIGURE 4.2 – La fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0;1)$

Remarque 4.4.2. *On a vu que si une v.a.r X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$, alors la v.a.r $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. En particulier, on a $E(T) = 0$ et $\sigma(T) = 1$.*

Ce résultat est très importante, puisqu'alors il nous suffit d'étudier la loi normale centrée réduite puis de procéder à un changement de variable pour obtenir n'importe quelle loi normale !

Propriété 4.4.4. *Soit T la v.a.r suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ centrée réduite.*

- ♦ $\boxed{p(T \geq x) = 1 - F(x)}$*. (voir figure 4.3-(2))*
- ♦ *Si x est positif :* $\boxed{F(-x) = 1 - F(x)}$*. (voir figure 4.3-(3))*
- ♦ *Pour tous $a; b \in \mathbb{R}$, avec $a \leq b$:* $\boxed{p(a \leq T \leq b) = F(b) - F(a)}$*. (voir figure 4.3-(4))*
- ♦ *Pour tout $x \geq 0$,* $\boxed{p(-x \leq T \leq x) = 2F(x) - 1}$*. (voir figure 4.3-(5))*

Utilisation de la table de la loi normale

Exemple 4.4.3. *Le formulaire ne donne que les valeurs de la loi normale centrée réduite et pour des valeurs positives.*
En voici un extrait pour comprendre la méthode de lecture :

t	$0,05$	$0,06$	$0,07$
$1,1$	$0,8749$	$0,8770$	$0,8790$
$1,2$	$0,8944$	$0,8962$	$0,8980$
$1,3$	$0,9115$	***0,9131***	$0,9147$

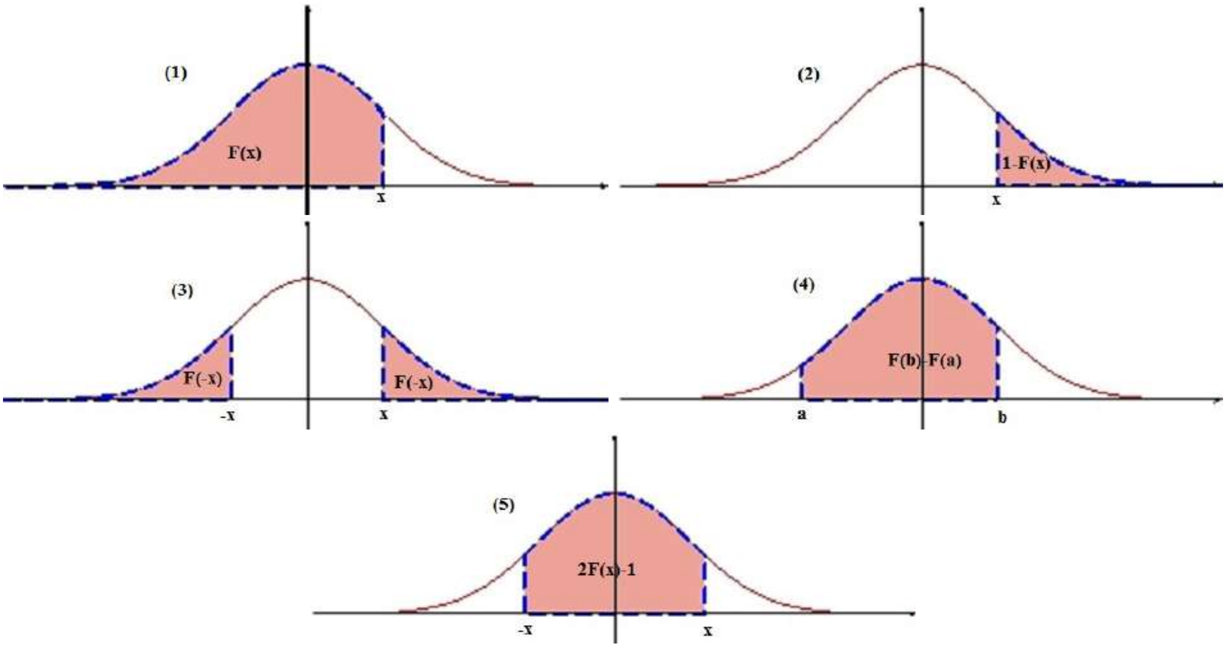


FIGURE 4.3 – Propriétés de la loi $\mathcal{N}(0;1)$

➔ ***Calcul de*** $p(T \leq 1,36)$ ***:***
Le nombre situé à l'intersection de la colonne $0,06$ *et de la ligne* $1,3$ *est la valeur de la fonction de répartition de* T *pour* $t = 1,3 + 0,06 = 1,36$.
Ainsi, $F(1,36) = p(T \leq 1,36) = 0,9131$.

➔ ***Calcul de*** $p(T \geq 1,25)$ ***:***
$p(T \geq 1,25) = 1 - F(1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056$.

➔ ***Calcul de*** $p(T \leq -1,17)$ ***:***
$p(T \leq -1,17) = F(-1,17) = 1 - F(1,17) = 1 - 0,8790 = 0,121$.

➔ ***Calcul de*** $p(1,15 \leq T \leq 1,37)$ ***:***
$p(1,15 \leq T \leq 1,37) = F(1,37) - F(1,15) = 0,9147 - 0,8749 = 0,0398$.

Exemple 4.4.4. *Soit une v.a.r* X *qui suit la loi normale de paramètres* $\mu = 12$ *et* $\sigma = 3$.
On pose $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-12}{3}$.
Calcul de $p(X < 16)$ *:*

➔ $X < 16 \Longleftrightarrow T < \dfrac{16-12}{3} \Longleftrightarrow T < \dfrac{4}{3}$.

➔ *Donc,* $p(X < 16) = p(T < 1,33) = F(1,33)$.

➔ *On lit sur la table* $F(1,33) = 0,9082$ *donc :* $p(X < 16) = 0,9082$.

Calcul de $p(9 < X < 15)$ *:*

➔ $$\begin{aligned} p(9 < X < 15) &= p(-1 < T < 1) \\ &= 2F(1) - 1. \end{aligned}$$

➔ *Or,* $F(1) = 0,8413$ *donc :* $p(9 < X < 15) = 2 \times 0,8413 - 1 = 0,6828$.

Remarque 4.4.3. *Si X suit la loi normale de paramètres m et σ, alors*

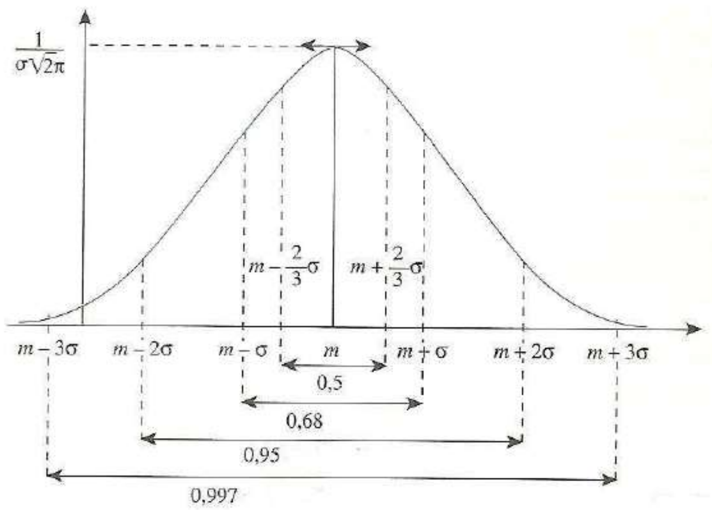
- $P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) \approx 0,68$.
- $P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) \approx 0,95$.

Démonstration :

$T = \dfrac{X - m}{\sigma} \iff X = m + \sigma T$.

$$\begin{aligned}\text{Donc, pour } t > 0,\ P(-t \leq T \leq t) &= P(-\sigma t \leq \sigma T \leq \sigma t)\\ &= P(m - \sigma t \leq m + \sigma T \leq m + \sigma t)\\ &= P(m - \sigma t \leq X \leq m + \sigma t).\end{aligned}$$

Ainsi, en particulier :
$P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) = P(-1 \leq T \leq 1) = 2\Pi(1) - 1 = 2 \times 0,8413 - 1 \approx 0,68$.
$P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) = P(-2 \leq T \leq 2) = 2\Pi(2) - 1 = 2 \times 0,9772 - 1 \approx 0,95$.



<u>**Opérations de v.a.r suivant une loi normale**</u>

Propriété 4.4.5. *Soit X une v.a.r suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$. Alors, pour tous $a; b \in \mathbb{R}$:*

♦ *La v.a.r $aX + b$ suit la loi normale $\mathcal{N}(a\mu + b\,;|a|\sigma)$,*

Si de plus Y suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu';\sigma')$ et indépendante de X, alors

♦ *La v.a.r $X + Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu + \mu'; \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2})$,*

♦ *La v.a.r $X - Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu - \mu'; \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2})$.*

Exemple 4.4.5. *Si X suit la loi $\mathcal{N}(1; \sqrt{3})$ et Y suit la loi $\mathcal{N}(-1; 1)$, alors :*

➔ *La v.a.r $-2X + 5$ suit la loi normale $\mathcal{N}(3; 2\sqrt{3})$,*

➔ *La v.a.r $X + Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0; 2)$,*

➔ *La v.a.r $X - Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(2; 2)$.*

4.4.4 Théorème central limite

La distribution normale a été introduite par le mathématicien français De Moivre en 1733, il l'utilisa comme approximation de la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ pour n grand. Ce résultat fut ensuite généralisé par Laplace et par d'autres mathématiciens pour devenir le théorème central limite ou théorème de la limite centrale qui donne les conditions dans lesquelles une v.a.r tend vers une variable normale.
La version la plus simple du théorème central limite est la suivante :

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de n v.a.r indépendantes, de même loi de probabilité, d'espérance mathématique μ et de variance σ^2. On considère la v.a.r Y_n définie par :

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

La loi de la v.a.r Y_n converge vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$ quand n tend vers l'infini.

Correction de continuité

Lorsque l'on approxime la loi d'une v.a.r. discrète X par une loi normale, de fonction de répartition F, cela revient à considérer X comme une v.a.r continue qui prend toutes les valeurs réelles, et l'intervalle $[k-0,5; k+0,5[$ est l'ensemble de ces valeurs qui **s'arrondissent** à k.

On remplacera donc $p([X=0])$ par $F(0.5)$ et $p([X=k])$ par $F(k+0.5) - F(k-0.5)$.

(Si X est à valeur dans $0,\ldots,n$, on procède de même, sauf pour $p([X=n])$ que l'on remplace par $1 - F(n-0.5)$.

Première application : approximation de la loi binomiale

Soit X la v.a.r = nombre de succès lors de la réalisation de n épreuves indépendantes, la probabilité de succès pour chaque épreuve étant égale à p. La loi de la v.a.r :

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

tend vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$ quand n tend vers l'infini.

En pratique, cette approximation est valable dès que les quantités np et $np(1-p)$ sont supérieures à 5.

Exemple 4.4.6. *Un contrôle au calibre, effectué depuis plusieurs mois sur le diamètre des pièces usinées par une machine outil, indique que le pourcentage de pièces "défectueuses" est égal à* 8%.

Un échantillon de 100 *pièces de la production est prélevé et le diamètre de ces pièces est vérifié. Soit* X *la v.a.r =* " *nombre de pièces défectueuses" dans un échantillon de* 100 *pièces.*

La variable X *suit la loi binomiale* $\mathcal{B}(100; 0,08)$.

Comme, $np = 100\times 0,08 = 8 > 5$ *et* $n(1-p) = 8\times 0,92 = 7,36 > 5$, *on peut utiliser l'approximation par la loi normale* $\mathcal{N}(8; 2,713)$.

Les paramètres sont en effet : la moyenne $\mu = np = 8$ *et la variance est égale à* $np(1-p) = 7,36 = (2,713)^2$.

En utilisant cette approximation, on peut calculer, par exemple, la probabilité d'avoir au moins 10 *pièces classées défectueuses dans un échantillon de* 100 *pièces, soit* $p(X \geq 10)$ *qui devient avec la correction de continuité* $p(X \geq 9,5)$ *:*

$$p(X \geq 9,5) = p\left(\frac{X-8}{2,713} \geq \frac{9,5-8}{2.713} = 0,55\right) = 1 - p\left(\frac{X-8}{2,713} \geq 0,55\right) = 0.29.$$

Deuxième application : approximation de la loi de Poisson

Soit X une v.a.r suivant la loi de Poisson $P(\lambda)$, la v.a.r Y définie par :

$$Y = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

converge vers la loi $\mathcal{N}(0;1)$ quand λ tend vers l'infini.

L'approximation est satisfaisante si le paramètre λ est supérieur à 15.

Exemple 4.4.7. *Un magasin reçoit* 25 *réclamations en moyenne par jour. Supposant poissonnienne la loi de survenance de ces réclamations, on a* $p(X = k) = \frac{25^k}{k!}e^{-25}$.

Puisque on a $\lambda = 25 > 15$, *on peut approximer cette loi de Poisson* $\mathcal{P}(25)$ *par la loi normale* $\mathcal{N}(25;5)$.
Si on veut calculer la probabilité pour que le premier lundi du mois prochain soient enregistrées 25 *réclamation, alors*

$$p(X = 25) = \frac{25^{25}}{25!}e^{-25} \approx F(25,5) - F(24.5) = \Phi(\frac{0,5}{5}) - \Phi(\frac{-0,5}{5}) = 2\Phi(0,1) - 1 \approx 0,0796.$$

Chapitre 5

Couples aléatoires

5.1 Couples aléatoires discrets

5.1.1 Loi conjointe

Définition 5.1.1. *On appelle couple aléatoire un couple (X, Y) de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$. Le couple (X, Y) est aussi appelé vecteur aléatoire de dimension 2.*
Soit (X, Y) un couple aléatoire discret, on pose

$$X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{(x_i, y_j)\}_{i \in I, j \in J}.$$

La loi conjointe du couple (X, Y) est définie par

$$\boxed{\forall i \in I, \quad \forall j \in J, \quad p_{ij} = p(X = x_i, Y = y_j).}$$

Exemple 5.1.1. *Une urne contient 4 boules blanches, 2 noires et 4 rouges. On tire 3 boules sans remise. Soit X le nombre de boules blanches et Y le nombre de boules noires. Quelle est la loi conjointe du couple (X, Y) ? On représente la loi du couple par un tableau à double entrée.*

On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. On obtient le tableau

$X \backslash Y$	0	1	2
0	4/120	12/120	4/120
1	24/120	32/120	4/120
2	24/120	12/120	0
3	4/120	0	0

Propriété 5.1.1. *On a*

$$\boxed{\forall i \in I, \quad \forall j \in J, \quad p_{ij} \geq 0,}$$

et

$$\boxed{\sum_{i \in I, j \in J} p_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} p_{ij} = 1.}$$

5.1.2 Fonction de répartition

Définition 5.1.2. *On appelle fonction de répartition du couple aléatoire* (X,Y) *la fonction* $F_{(X,Y)}$ *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad F_{(X,Y)}(x,y) = p(X \leq x, Y \leq y).}$$

Exemple 5.1.2. *Calculer* $P(a < X \leq b, c < Y \leq d)$ *en fonction de* $F(a,c)$ *,* $F(a,d)$*,* $F(b,c)$ *et* $F(b,d)$*.*

On obtient $p(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F(a,d) + F(b,d) - F(a,c) - F(b,c)$*.*

5.1.3 Lois marginales

Définition 5.1.3. *Soit* (X,Y) *un couple aléatoire discret, on pose*

$$\boxed{\forall i \in I, \quad p_{i.} = \sum_{j \in J} p_{ij} \quad \text{et} \quad \forall j \in J, \quad p_{.j} = \sum_{i \in I} p_{ij}.}$$

La famille $(x_i, p_{i.})_{i \in I}$ *définit la loi de* X *dite loi marginale de* X*.*
La famille $(y_j, p_{.j})_{j \in J}$ *définit la loi de* Y *dite loi marginale de* Y*.*

Exemple 5.1.3. *Les lois marginales dans le premier exemple avec l'urne sont données au tableau suivant.*

X \ Y	0	1	2	$p_{i.}$
0	4/120	12/120	4/120	20/120
1	24/120	32/120	4/120	60/120
2	24/120	12/120	0	36/120
3	4/120	0	0	4/120
$p_{.j}$	56/120	56/120	8/120	1

5.1.4 Indépendance

Définition 5.1.4. *Soit* (X,Y) *un couple aléatoire discret. Les variables* X *et* Y *sont indépendantes si*

$$\boxed{\forall i \in I, \forall j \in J, \quad P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j).}$$

Dans ce cas la loi conjointe est le produit des marginales.

Propriété 5.1.2. lien avec l'indépendance entre événements : *Soit* A *et* B *deux événements,* A *et* B *sont indépendants si et seulement si les variables aléatoires* 1_A *et* 1_B *sont indépendantes.*

Exemple 5.1.4. *Une urne contient* a *boules noires et* b *boules blanches. On tire deux fois une boule et on note* X_i *la variable qui vaut 1 si la boule tirée au ième tirage est blanche et 0 sinon. Étudier l'indépendance de* X_1 *et de* X_2 *si le tirage se fait avec remise puis dans le cas où le tirage se fait sans remise.*

- *Tirage avec remise :* $P(X_1 = 1) = \frac{b}{a+b}$ *et* $P(X_2 = 1) = \frac{b}{a+b}$ *et* $P(X_1 = 1, X_2 = 1) = (\frac{b}{a+b})^2$ *et de même pour les autres, donc* X_1 *et* X_2 *sont indépendantes.*

- *Tirage sans remise :* $P(X_1 = 1) = \frac{b}{a+b}$ *et* $P(X_2 = 1) = \frac{b(b-1)+ab}{(a+b)(a+b-1)} = \frac{b}{a+b}$ *et* $P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}$, *donc* X_1 *et* X_2 *ne sont pas indépendantes.*

Exemple 5.1.5. *Étudier l'indépendance*

- *si* $p_{ij} = \frac{1}{e^2}\frac{1}{i!j!}$ *pour tout entier* i, j.
- *si* $p_{ij} = \frac{1}{2e^2}\frac{i+j}{i!j!}$ *pour tout entier* i, j.

Dans le premier cas, il y a indépendance ; $p_{ij} = p_i p_j$.

Dans le second cas, il n'y a pas indépendance ; $p_i = \frac{i+1}{2i!e}$ *et* $p_j = \frac{j+1}{2j!e}$

5.1.5 Covariance

Propriété 5.1.3. *Soit* (X, Y) *un couple aléatoire discret tel que* X *et* Y *ont une variance. La variable aléatoire* XY *a une espérance et on a*

$$\boxed{(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2).}$$

Il y a égalité si et seulement si Y *est une fonction quasi affine de* X, *çàd, il existe deux réels* a *et* b *tels que* $P(Y = aX + b) = 1$.

Définition 5.1.5. *On appelle covariance de* X *et de* Y *le réel défini par*

$$\boxed{Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y).}$$

On appelle coefficient de corrélation de X *et de* Y *(si* $\sigma_X \sigma_Y \neq 0$*) :*

$$\boxed{\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.}$$

On dit que X *et* Y *sont non corrélés si* $Cov(X, Y) = 0$.

Propriété 5.1.4. *Soit* (X, Y) *un couple aléatoire discret tel que* X *et* Y *ont une variance. Soit* a *et* b *deux réels, on a :*

- $Cov(X, X) = Var(X)$,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$,
- $Cov(aX + bZ, Y) = aCov(X, Y) + bCov(Z, Y)$,
- $|\rho(X, Y)| \leq 1$
- $|\rho(X, Y)| = 1 \iff Y$ *est presque sûrement une fonction affine de* X.

Propriété 5.1.5. Variance d'une somme : *Soit* (X, Y) *un couple aléatoire discret tel que* X *et* Y *ont une variance,*

$$\boxed{Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y).}$$

Exemple 5.1.6. *On tire au hazard* 2 *boules en même temps d'une urne qui contient une boule blanche,* 3 *noires et* 6 *jaunes.*

1. *Donner la loi conjointe du couple (X, Y), où X et Y représentent respectivement le nombre des boules blanches ou noires obtenues*
2. *Donner les lois marginales des X et Y*
3. *Déterminer la fonction de répartition conjointe du couple (X, Y)*
4. *Calculer $Cov\,(X, Y)$ et $\rho\,(X, Y)$*
5. *Vérifier si X et Y sont indépendantes ou non*

Solution :

L'ensemble des valeurs possibles pour le couple (X, Y) est $\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1),(0,2),(1,2)\}$.

1.

$$
\begin{aligned}
p_{00} = p\,(X=0, Y=0) &= \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{5}{15},\\
p_{10} = p\,(X=1, Y=0) &= \frac{C_1^1 C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{2}{15},\\
p_{01} = p\,(X=0, Y=1) &= \frac{C_6^1 C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{6}{15},\\
p_{11} = p\,(X=1, Y=1) &= \frac{C_3^1 C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{15},\\
p_{02} = p\,(X=0, Y=2) &= \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{15},\\
p_{12} = p\,(X=1, Y=2) &= 0.
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit que la loi conjointe du couple (X, Y) est

X \ Y	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{5}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{12}{15}$
1	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	$\frac{3}{15}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

2. A partir du tableau, on a :

X :

x_i	0	1
$p_{i\cdot}$	$\frac{12}{15}$	$\frac{3}{15}$

Y :

y_j	0	1	2
$p_{\cdot j}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

3. Suivant les différentes positions de x et y par rapport à 0, 1, et 2, on calcul la fonction de répartition conjointe du couple (X, Y) :

$$
F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases}
0; & x < 0 \quad \text{ou} \quad y < 0,\\
\frac{5}{15}; & 0 \le x < 1 \quad \text{et} \quad 0 \le y < 1,\\
\frac{11}{15}; & 0 \le x < 1 \quad \text{et} \quad 1 \le y < 2,\\
\frac{12}{15}; & 0 \le x < 1 \quad \text{et} \quad y \ge 2,\\
\frac{14}{15}; & x \ge 1 \quad \text{et} \quad 0 \le y < 1,\\
1; & x \ge 1 \quad \text{et} \quad 1 \le y < 2,\\
1; & x \ge 1 \quad \text{et} \quad y \ge 2.
\end{cases}
$$

4. Calculons d'abord, $E(X)$, $E(X^2)$, $E(Y)$, $E(Y^2)$, $E(XY)$, σ_X et σ_Y.

$$E(X) = E(X^2) = \frac{1}{5} \Rightarrow \sigma_X = \frac{2}{5},$$

$$E(Y) = \frac{3}{5}, \quad E(Y^2) = \frac{11}{15} \Rightarrow \sigma_Y = \frac{2\sqrt{21}}{15},$$

et puisque

XY :

$x_i y_j$	0	1
	$\frac{14}{15}$	$\frac{1}{15}$

alors, $E(XY) = \frac{1}{15}$.

Par suite,

$$Cov\,(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{4}{75},$$

$$\rho\,(X, Y) = \frac{Cov\,(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = -\frac{1}{\sqrt{21}} \approx -0.218.$$

5. Puisque $Cov\,(X, Y) \neq 0$, les v.a. X et Y sont dépendantes. On peut aussi voir que

$$\frac{5}{15} = p\,(X = 0, Y = 0) \neq p\,(X = 0) \times p\,(Y = 0) = \frac{12}{15} \times \frac{7}{15}.$$

5.2 Vecteurs aléatoires

5.2.1 Matrice de variance-covariance

Définition 5.2.1. Matrice de variance-covariance : *Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur de n variables aléatoires discrètes. On appelle matrice de variance-covariance la matrice carrée d'ordre n dont les termes sont $Cov(X_i, X_j)$. C'est une matrice symétrique.*

5.2.2 Indépendance mutuelle

Définition 5.2.2. indépendance mutuelle : *Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur de n variables aléatoires discrètes, on dit que les variables aléatoires sont mutuellement indépendantes si pour tout n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ de $X_1(\Omega) \times \cdots X_n(\Omega)$ on a*

$$\boxed{p\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \Pi_{i=1}^{n} p\left([X_i = x_i]\right).}$$

Propriété 5.2.1. Lien avec l'indépendance entre événements *: Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d' événements. Les A_i sont mutuellement indépendants si et seulement si les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_i}$ sont mutuellement indépendantes.*

Propriété 5.2.2. *Si $(X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur de n variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes, alors pour toute fonction ϕ et ψ, les variables aléatoires $\phi(X_1, \cdots, X_p)$ et $\psi(X_p, \cdots, X_n)$ sont indépendantes.*

5.2.3 Variance d'une somme

Propriété 5.2.3. Variance d'une somme : *Soit* $(X_1, \cdots, X_n)$ *un vecteur de* n *variables aléatoires discrètes, on a*

$$\boxed{Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} Cov(X_i, X_j).}$$

Exemple 5.2.1. *Variance de la binomiale : Soit* X *une v.a. suivant une loi binomiale* $\mathcal{B}(n,p)$. *On interprète* X *comme la somme de* n *variables aléatoires indépendantes* X_i *suivant une loi de Bernouilli de paramètre* p. *Donc*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad avec \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad X_i \sim \mathcal{B}(1,p),$$

d'où $E(X) = np$ *et* $Var(X) = npq$ *par indépendance des* X_i.

5.3 Couple aléatoire continu

Définition 5.3.1. *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires contenues définies sur le même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$. *La loi de couple* (X,Y) *sera définie à partir de sa fonction de répartition :*

$$F_{X,Y}(x,y) = p\left((X,Y)^{-1}(]-\infty, x[\times]-\infty, y[)\right) = p(X < x; Y < y).$$

Propriété 5.3.1. *On a*

1. $F_{X,Y}$ *est totalement croissante au sens large, ç-à-d que les fonctions partielles* $F_{X,Y}(x,.)$ *et* $F_{X,Y}(.,y)$ *sont croissantes pour tous réels* x *et* y .
2. $F_{X,Y}(x,.)$ *et* $F_{X,Y}(.,y)$ *sont continues à gauche*
3. $\lim_{x\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim_{y\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} F_{X,Y}(x,x) = 1$.

5.3.1 Fonction densité de probabilité

Définition 5.3.2. *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$. *S'il existe une fonction positive* f *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$, *telle que pour tous réels* x *et* y ,

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv,$$

alors f *est dite densité de probabilité du couple* (X,Y).

Propriété 5.3.2. *On a*

1. *Pour tout A élément de $\mathcal{A}$, alors $p((X,Y) \in A) = \int\int_A f(u,v)dudv$. En particulier, $\int\int_{\mathbb{R}^2} f(u,v)dudv = 1$*
2. *En tout point (x_0, y_0) où f est continue, $f(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$*
3. *X et Y ont comme densités de probabilités respectives $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy$ et $f_Y(Y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx$*
4. *$E(X) = \int\int_{\mathbb{R}^2} xf(x,y)dxdy$ et $E(Y) = \int\int_{\mathbb{R}^2} yf(x,y)dxdy$*
5. *$E(h(X,Y)) = \int\int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)f(x,y)dxdy$*
6. *$V(X) = \int\int_{\mathbb{R}^2} (x - E(X))^2 f(x,y)dxdy$ et $V(Y) = \int\int_{\mathbb{R}^2} (y - E(Y))^2 f(x,y)dxdy$*

Remarque 5.3.1. *Lorsque les quantités sont définies, on pose, comme dans le cas discret,*

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y), \quad r(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

5.3.2 Lois marginales et lois conditionnelles

Les lois marginales de X et Y sont connues par leur fonction de répartition

$$F_X(x) = p(X < x) = p(X < x, Y \in \mathbb{R}) = \lim_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x,y),$$

$$F_Y(y) = p(Y < y) = p(X \in \mathbb{R}, Y < y) = \lim_{x \to +\infty} F_{X,Y}(x,y).$$

Soit (X,Y) un couple aléatoire de densité de probabilité f. Soit f_X la densité de probabilité de X et un réel x tel que $f_X(x) \neq 0$. La loi conditionnelle de Y liée par la condition $(X = x)$ est définie par sa densité de probabilité

$$f_x(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$

5.3.3 Indépendance

Définition 5.3.3. *Les variables X et Y sont indépendantes si pour tous x et y réels*

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \times F_Y(y).$$

Propriété 5.3.3. *On a*

1. *X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tous x et y réels $f(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$. Et dans ce cas $Cov(X,Y) = 0$*
2. *X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tous couples d'intervalles réels $[a,a'[$ et $[b,b'[$, on a*

$$p\left((X,Y)^{-1}([a,a'[\times[b,b'[)\right) = p\left(X^{-1}([a,a'[\right) \times p(Y^{-1}([b,b'[)$$

3. *X et Y sont indépendantes si et seulement si les lois conditionnelles sont identiques aux lois marginales (En particulier, $F_x(y)$ ne dépendra pas de x)*

Exemple 5.3.1. *Soient $c \in \mathbb{R}$ et $f_{(X,Y)}$ une fonction telle que :*

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} cxye^{-x^2-y^2}; & x \in \mathbb{R}^+, \quad y \in \mathbb{R}^+, \\ 0; & \textit{sinon.} \end{cases}$$

1. *Calculer c pour que la fonction $f_{(X,Y)}$ soit une densité de probabilité du couple (X,Y)*
2. *Déterminer la fonction de répartition conjointe du couple (X,Y)*
3. *Trouver les densités marginales des X et Y*

Solution :

1. Il faut remarquer d'abord que $f_{(X,Y)}$ doit être positive, ainsi $c \geq 0$. De plus
$$1 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy = c\int_{\mathbb{R}} xe^{-x^2}dx \int_{\mathbb{R}} ye^{-y^2}dy = \frac{c}{4} \Rightarrow c = 4.$$
2. La fonction de répartition conjointe du couple (X,Y) est donnée par
$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)dudv = 4\int_{-\infty}^{x} ue^{-u^2}du \int_{-\infty}^{y} ve^{-v^2}dv = \left(1-e^{-x^2}\right)\left(1-e^{-y^2}\right), \quad \forall x, y \in$$
et pour $x, y \in \mathbb{R}^-$, on a $F_{X,Y}(x,y) = 0$.

   Pour les fonctions de répartitions marginales, il suffit de prendre la limite. En effet
$$F_X(x) = \lim_{y\to+\infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim_{y\to+\infty}\left(1-e^{-x^2}\right)\left(1-e^{-y^2}\right)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}(x,y) = \left(1-e^{-x^2}\right)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$
De même
$$F_Y(y) = \lim_{x\to+\infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim_{x\to+\infty}\left(1-e^{-x^2}\right)\left(1-e^{-y^2}\right)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}(x,y) = \left(1-e^{-y^2}\right)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y).$$
3. Pour les fonctions de densité marginales, on a
$$f_X(x) = F'_X(x) = 2xe^{-x^2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x),$$
et
$$f_Y(y) = F'_Y(y) = 2ye^{-y^2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y).$$

5.3.4 Lois dérivées de la loi normale

Définition 5.3.4.
1. *Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des de v.a. indépendantes et identiquement distribuées qui suivent la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors la v.a. $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi dite la loi du Khi-deux à n degrés de liberté et notée $\chi^2(n)$*
2. *Soit une v.a. U qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et X une v.a. qui suit indépendamment de U une loi du Khi-deux $\chi^2(n)$ à n degrés de liberté. Alors, la v.a. $T_n = \frac{U}{\sqrt{\frac{X}{n}}}$ suite une loi dite loi de Student $t(n)$ à n degré de liberté.*
3. *Soient X et Y deux v.a. suivant indépendamment des lois du Khi-deux à n et p degrés de liberté respectivement. Alors la variable aléatoire $\frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{P}}$ suit une loi dite de Fisher-Snedecor à n degrés de liberté au numérateur et p degrés de liberté au dénominateur et est notée $F(n,p)$.*

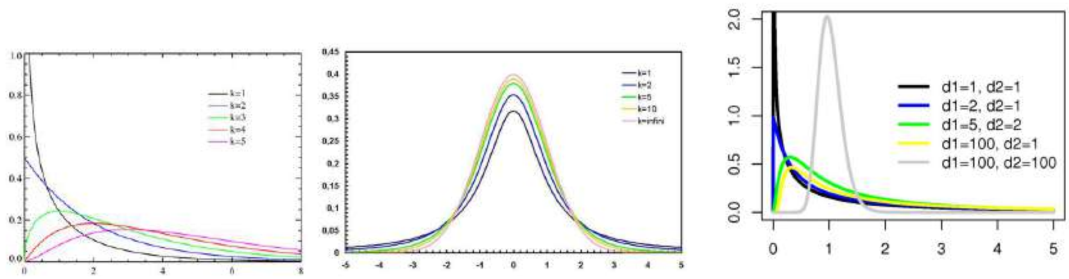


FIGURE 5.1 – De gauche à droite, les graphes des densités des lois Khi2, Student et de Fisher.

Propriété 5.3.4. *1. Si X suit une loi Khi-deux $\chi^2(n)$, alors $E(X) = n$ et $Var(X) = 2n$*

2. Si X et Y deux v.a. indépendantes suivant des lois Khi-deux $\chi^2(n)$ et $\chi^2(p)$, alors $X + Y$ suit la loi Khi-deux $\chi^2(n + p)$.

3. Si X suivant une loi de Student $t(n)$ à $n \geq 3$ degré de liberté, alors $E(X) = 0$ et $Var(X) = \frac{n}{n-2}$.

4. Si X une v.a. qui suit une loi de Fisher $F(n, p)$, alors

$$p \geq 3 \Rightarrow E(X) = \frac{p}{p-2},$$

$$p \geq 5 \Rightarrow E(X) = \frac{2p^2(n+p-2)}{n(p-2)^2(p-4)}.$$

Remarque 5.3.2. *Ces trois dernières lois seront utiles dans la théorie des tests. L'expression explicite des densités de ces lois n'est pas à connaître (sauf pour la loi normale). Des tables statistiques et des logiciels permettent de les manipuler.*