
Intégrales simples et primitives

Exercice 1 :

Calculer la limite des suites suivantes:

$$1. \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} \quad 2. \quad v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2 - k^2}} \quad 3. \quad w_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

Exercice 2 :

$$\text{Soit } f(x) = \frac{5x^2 + 21x + 22}{(x-1)(x+3)^2}, \quad x \in]1, +\infty[.$$

1. Démontrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$

2. En déduire la primitive de f sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 2.

Exercice 3 :

Par une intégration par parties calculer les intégrales suivantes :

$$1. \quad I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt \quad 2. \quad J = \int_0^1 x(\arctan x)^2 dx \quad 3. \quad K = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Exercice 4 :

En effectuant le changement de variable indiqué, calculer

$$1. \quad \int_1^4 \frac{1 - \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt \quad (u = \sqrt{t}) \quad 2. \quad \int_1^2 \frac{e^x}{1 + e^x} dx \quad (u = e^x) \quad 3. \quad \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx \quad (u = \ln(x))$$
$$4. \quad \int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\sqrt{2} \cos x + 2 \sin^2 x} dx \quad (t = \cos(x)) \quad 5. \quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \sin x} \quad (u = \tan(x/2)).$$

Exercice 5 :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(a + b - x) = f(x)$.

$$1. \quad \text{Montrer que } \int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

$$2. \quad \text{En déduire la valeur de } I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$