الكلية متعددة التخصصات الناظور
Faculté Pluridisciplinaire de Nador

Université Mohammed Premier
Faculté Pluridisciplinaire de Nador
Département de Mathématiques

Cours d'Algèbre 2

Filière : SMPC

(Semestre II)

Pr. El Mehdi Bouba

Année universitaire :2020–2021

Table des matières

Préface 2

1. Matrices et déterminants 3

1.1. Matrices 3

1.2. Déterminant 17

2. Espaces vectoriels 22

2.1. Généralités sur les espaces vectoriels 22

2.2. Les sous-espaces vectoriels 23

2.3. Bases et dimension d'un espace vectoriel 23

2.4. Somme des sous-espaces vecoriels 26

2.5. Rang d'une matrice 26

3. Applications linéaires 29

3.1. Généralités sur les applications linéaires 29

3.2. Image d'une application linéaire 30

3.3. Noyau d'une application linéaire 31

3.4. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ 32

3.5. Composition et inverse d'applications linéaires 33

3.6. Matrice d'une application linéaire 35

3.7. Changement de bases 42

4. Diagonalisation, trigonalisation et applications 49

4.1. Matrices semblables 49

4.2. Diagonalisation 49

4.3. Le polynôme caractértique 50

4.4. Compter les vecteurs propres 51

4.5. Résumé 52

4.6. Trigonalisation 53

4.7. Applications 54

Références 57

Préface

Ces notes de cours sont destinées en premier lieu aux étudiants de la faculté pluridisciplinaire de Nador, de la filière SMPC semestre 2. C'est une introduction à la notion d'espace vectoriel qui est une structure fondamentale des mathématiques modernes.

Il s'agit de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles pourtant très différents. Par exemple, on peut additionner deux vecteurs du plan, et aussi multiplier un vecteur par un réel. Mais on peut aussi additionner deux fonctions, ou multiplier une fonction par un réel. Même chose avec les polynômes, les matrices,...

Le but est d'obtenir des théorèmes généraux qui s'appliqueront aussi bien aux vecteurs du plan, de l'espace, aux espaces de fonctions, aux polynômes, aux matrices, ...

Pour ceux qui s'intéressent ou veulent approfondir l'un ou l'autre des sujets traités, je recommande les références citées à la fin de ce polycopié.

1. Matrices et déterminants

Dans toute la suite, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1. **Matrices.**

1.1.1. *Généralités sur les matrices.*

Définition 1. Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{K}$.

- Elle est dite de taille $m \times n$ si le tableau possède m lignes et n colonnes.
- Les nombres du tableau sont appelés les coefficients de A.
- Le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne est noté a_{ij}.
- Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients correspondants sont égaux.
- L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ou,} \quad A = \big(a_{ij}\big)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \quad \text{ou} \quad \big(a_{ij}\big).$$

Exemple 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

est une matrice 2×3 avec, par exemple, $a_{11} = 1$ et $a_{23} = 7$.

1.1.2. *Matrices particulières.* Voici quelques types de matrices intéressantes :

- Si $m = n$ (même nombre de lignes que de colonnes), la matrice est dite matrice carrée. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Les éléments $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ forment la **diagonale principale** de la matrice.

- Une matrice qui n'a qu'une seule ligne ($m = 1$) est appelée matrice ligne ou vecteur ligne. On la note
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$
- De même, une matrice qui n'a qu'une seule colonne ($n = 1$) est appelée matrice colonne. On la note
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$
- La matrice (de taille $m \times n$) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la matrice nulle et est notée $0_{m,n}$ ou plus simplement 0. Dans le calcul matriciel, la matrice nulle joue le rôle du nombre 0 pour les réels.

1.1.3. *Addition et multiplication de matrices.*

Définition 2 (Somme de deux matrices)**.** Soient A et B deux matrices ayant la même taille $m \times n$. Leur somme $C = A + B$ est la matrice de taille $m \times n$ définie par
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

En d'autres termes, on somme coefficient par coefficient.

Exemple 2.

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Par contre si} \quad B' = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A + B' \quad \text{n'est pas définie.}$$

Définition 3 (Produit d'une matrice par un scalaire)**.** Le produit d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est la matrice $\begin{pmatrix} \alpha a_{ij} \end{pmatrix}$ formée en multipliant chaque coefficient de A par α. Elle est notée $\alpha \cdot A$ (ou simplement αA).

Exemple 3.

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha = 2 \quad \text{alors} \quad \alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $(-1)A$ est l'opposée de A et est notée $-A$. La différence $A - B$ est définie par $A + (-B)$.

Exemple 4.

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ alors $A - B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

L'addition et la multiplication par un scalaire se comportent sans surprises :

Proposition 1. *Soient A, B et C trois matrices appartenant à $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$ deux scalaires.*

(1) $A + B = B + A$: la somme est commutative,
(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$: la somme est associative,
(3) $A + 0 = A$: la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition,
(4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
(5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Définition 4 (Produit de deux matrices)**.** Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $m \times n$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $n \times p$. Alors le produit $C = AB$ est une matrice $m \times p$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

On peut écrire le coefficient de façon plus développée, à savoir :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Il est commode de disposer les calculs de la façon suivante.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} & & & \times & \\ & & & \times & \\ & & & \times & \\ & & & \times & \end{pmatrix} \leftarrow B \\ A \rightarrow \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ \times & \times & \times & \times \\ & & & \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} & & & | & \\ & & & | & \\ - & - & - & c_{ij} & \\ & & & & \end{pmatrix} \leftarrow AB \end{array}$$

Avec cette disposition, on considère d'abord la ligne de la matrice A située à gauche du coefficient que l'on veut calculer (ligne représentée par des $\times$ dans A) et aussi la colonne de la matrice B située au-dessus du coefficient que l'on veut calculer (colonne représentée par des $\times$ dans B). On calcule le produit du premier coefficient de la ligne par le premier coefficient de la colonne ($a_{i1} \times b_{1j}$), que l'on ajoute au produit du deuxième coefficient de la ligne par le deuxième coefficient de la colonne ($a_{i2} \times b_{2j}$), que l'on ajoute au produit du troisième ...

Exemple 5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On dispose d'abord le produit correctement (à gauche) : la matrice obtenue est de taille 2×2. Puis on calcule chacun des coefficients, en commençant par le premier coefficient $c_{11} = 1 \times 1 \ + \ 2 \times (-1) \ + \ 3 \times 1 = 2$ (au milieu), puis les autres (à droite).

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Un exemple intéressant est le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne :

$$u = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Alors $u \times v$ est une matrice de taille 1×1 dont l'unique coefficient est

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Ce nombre s'appelle le produit scalaire des vecteurs u et v.

Calculer le coefficient c_{ij} dans le produit $A \times B$ revient donc à calculer le produit scalaire des vecteurs formés par la i-ème ligne de A et la j-ème colonne de B.

Remarques 1. Il faut faire attention aux remarques suivantes :

- Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.
- $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.
- $AB = AC$ n'implique pas $B = C$.

Proposition 2. *Le produit des matrices vérifie les propriétés suivantes :*

(1) $A(BC) = (AB)C$ *: associativité du produit,*
(2) $A(B+C) = AB + AC$ *et* $(B+C)A = BA + CA$ *: distributivité du produit par rapport à la somme,*
(3) $A \cdot 0 = 0$ *et* $0 \cdot A = 0$.

Définition 5. La matrice carrée suivante s'appelle la matrice **identité** :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous ses autres éléments sont égaux à 0. Elle se note I_n ou simplement I.

Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. C'est l'élément neutre pour la multiplication. En d'autres termes :

Proposition 3. *Si A est une matrice $m \times n$, alors*

$$I_m \cdot A = A \qquad et \qquad A \cdot I_n = A.$$

Définition 6 (Puissance d'une matrice)**.** Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit les puissances successives de A par $A^0 = I_n$ et $A^{p+1} = A^p \times A$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Autrement dit, $A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ facteurs}}$.

Exemple 6. On cherche à calculer A^p avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On calcule A^2, A^3 et A^4 et on obtient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

L'observation de ces premières puissances permet de penser que la formule est : $A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$.

Démontrons ce résultat par récurrence.

Il est vrai pour $p = 0$ (on trouve l'identité). On le suppose vrai pour un entier p et on va le démontrer pour $p+1$. On a, d'après la définition,

$$A^{p+1} = A^p \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{p+1} - 1 \\ 0 & (-1)^{p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{p+1} \end{pmatrix}.$$

Donc la propriété est démontrée.

1.1.4. *Inverse d'une matrice.*

Définition 7 (Matrice inverse)**.** Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. S'il existe une matrice carrée B de taille $n \times n$ telle que

$$AB = I_n \qquad \text{et} \qquad BA = I_n,$$

on dit que A est inversible. On appelle B l'inverse de A et on la note A^{-1}.

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Exemple 7. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Étudier si A est inversible, c'est étudier l'existence d'une matrice $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, telle que $AB = I$ et $BA = I$.

Or $AB = I$ équivaut à :

$$AB = I \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d = 1 \end{cases}$$

Sa résolution est immédiate : $a = 1$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = 0$, $d = \frac{1}{3}$. Il n'y a donc qu'une seule matrice possible, à savoir $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{smallmatrix}\right)$.

Pour prouver qu'elle convient, il faut aussi montrer l'égalité $BA = I$, dont la vérification est laissée au lecteur. La matrice A est donc inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Exemple 8. La matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ n'est pas inversible. En effet, soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice quelconque. Alors le produit

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 5b & 0 \\ 3c + 5d & 0 \end{pmatrix}$$

ne peut jamais être égal à la matrice identité I_2.

Proposition 4. *Si A est inversible, alors son inverse est unique.*

Proposition 5. *Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et on a :*

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Proposition 6. *Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Alors AB est inversible et*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Il faut bien faire attention à l'inversion de l'ordre.

Proposition 7. *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et C une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors l'égalité $AC = BC$ implique l'égalité $A = B$.*

Nous allons voir une méthode pour calculer l'inverse d'une matrice quelconque de manière efficace. Cette méthode est une reformulation de la méthode du pivot de Gauss pour les systèmes linéaires. Auparavant, nous commençons par une formule directe dans le cas simple des matrices 2×2.

Considérons la matrice 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Proposition 8. *Si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Méthode de Gauss pour inverser les matrices

La méthode pour inverser une matrice A consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A jusqu'à la transformer en la matrice identité I. On fait simultanément les mêmes opérations élémentaires en partant de la matrice I. On aboutit alors à une matrice qui est A^{-1}.

En pratique, on fait les deux opérations en même temps en adoptant la disposition suivante : à côté de la matrice A que l'on veut inverser, on rajoute la matrice identité pour former un tableau $(A \mid I)$. Sur les lignes de cette matrice augmentée, on effectue des opérations élémentaires jusqu'à obtenir le tableau $(I \mid B)$. Et alors $B = A^{-1}$.

Ces opérations élémentaires sur les lignes sont :

(1) $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une ligne par un réel non nul (ou un élément de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$).

(2) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j.

(3) $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux lignes.

Exemple 9. Calculons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Voici la matrice augmentée, avec les lignes numérotées :

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On applique la méthode de Gauss pour faire apparaître des 0 sur la première colonne, d'abord sur la deuxième ligne par l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ qui conduit à la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ \\ \end{array}$$

Puis un 0 sur la première colonne, à la troisième ligne, avec $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

On multiplie la ligne L_2 afin qu'elle commence par 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \, {\scriptstyle L_2 \leftarrow -\frac{1}{8} L_2}$$

On continue afin de faire apparaître des 0 partout sous la diagonale, et on multiplie la ligne L_3. Ce qui termine la première partie de la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \, {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2}$$

puis

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \, {\scriptstyle L_3 \leftarrow 2L_3}$$

Il ne reste plus qu'à « remonter » pour faire apparaître des zéros au-dessus de la diagonale :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \, {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{8} L_3}$$

puis

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \, {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3}$$

Ainsi l'inverse de A est la matrice obtenue à droite et après avoir factorisé tous les coefficients par $\frac{1}{4}$, on a obtenu :

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Pour se rassurer sur ses calculs, on vérifie que $A \times A^{-1} = I$.

Matrices et systèmes linéaires

Le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\ x_1 & + & a_{12}\ x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\ x_n & = & b_1 \\ a_{21}\ x_1 & + & a_{22}\ x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\ x_n & = & b_2 \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{m1}\ x_1 & + & a_{m2}\ x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\ x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}.$$

On appelle $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice des coefficients du système. $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ est le vecteur du second membre. Le vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est une solution du système si et seulement si

$$AX = B.$$

Nous savons que :

Théorème 1. *Un système d'équations linéaires soit il n'a aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.*

Matrices inversibles et systèmes linéaires

Considérons le cas où le nombre d'équations égale le nombre d'inconnues :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}.$$

Alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée et B un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Pour tout second membre, nous pouvons utiliser les matrices pour trouver la solution du système linéaire.

Proposition 9. *Si la matrice A est inversible, alors la solution du système $AX = B$ est unique et est :*

$$X = A^{-1}B.$$

La preuve est juste de vérifier que si $X = A^{-1}B$, alors $AX = A\big(A^{-1}B\big) = \big(AA^{-1}\big)B = I \cdot B = B$. Réciproquement si $AX = B$, alors nécessairement $X = A^{-1}B$.

Nous verrons bientôt que si la matrice n'est pas inversible, alors soit il n'y a pas de solution, soit une infinité.

1.1.5. *Matrices diagonales et triangulaires, transposition, trace et symétrie.* Soit A une matrice de taille $n \times n$. On dit que A est triangulaire inférieure si ses éléments au-dessus de la diagonale sont nuls, autrement dit :

$$i < j \implies a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire inférieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On dit que A est triangulaire supérieure si ses éléments en-dessous de la diagonale sont nuls, autrement dit :

$$i > j \implies a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire supérieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 10. Deux matrices triangulaires inférieures (à gauche), une matrice triangulaire supérieure (à droite) :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Une matrice qui est triangulaire inférieure et triangulaire supérieure est dite **diagonale**. Autrement dit : $i \neq j \implies a_{ij} = 0$.

Exemple 11. Exemples de matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 12 (Puissances d'une matrice diagonale)**.** Si D est une matrice diagonale, il est très facile de calculer ses puissances D^p (par récurrence sur p) :

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \implies D^p = \begin{pmatrix} \alpha_1^p & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1}^p & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_n^p \end{pmatrix}$$

La transposition

Soit A la matrice de taille $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Définition 8. On appelle matrice transposée de A la matrice ${}^tA$ (ou A^T) de taille $n \times m$ définie par :

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit : le coefficient à la place (i,j) de ${}^tA$ est a_{ji}. Ou encore la i-ème ligne de A devient la i-ème colonne de ${}^tA$ (et réciproquement la j-ème colonne de ${}^tA$ est la j-ème ligne de A).

Exemple 13.

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

$${}^t\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \qquad {}^t(1 \quad -2 \quad 5) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Théorème 2. *L'opération de transposition obéit aux règles suivantes :*

(1) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

(2) ${}^t(\alpha A) = \alpha {}^tA$

(3) ${}^t({}^tA) = A$

(4) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

(5) Si A est inversible, alors ${}^tA$ l'est aussi et on a $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Notez bien l'inversion : ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$, comme pour $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

La trace

Dans le cas d'une matrice carrée de taille $n \times n$, les éléments $a_{11},\ a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sont appelés les éléments diagonaux. Sa diagonale est la diagonale $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition 9. La **trace** de la matrice A est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A.

Autrement dit,

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Exemple 14. On a :

- Si $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, alors $tr(A) = 2 + 5 = 7$.
- Pour $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 11 & 0 & -10 \end{smallmatrix}\right)$, $tr(B) = 1 + 2 - 10 = -7$.

Théorème 3. *Soient A et B deux matrices $n \times n$. Alors :*

(1) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$,
(2) $tr(\alpha A) = \alpha\ tr(A)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$,
(3) $tr({}^tA) = tr(A)$,
(4) $tr(AB) = tr(BA)$.

Matrices symétriques

Définition 10. Une matrice A de taille $n \times n$ est symétrique si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si

$$A =^t A,$$

ou encore si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$. Les coefficients sont donc symétriques par rapport à la diagonale.

Exemple 15. Les matrices suivantes sont symétriques :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 16. Pour une matrice B quelconque, les matrices $B \cdot^t B$ et ${}^tB \cdot B$ sont symétriques.

En effet, ${}^t(B^tB) =^t ({}^tB)^tB = B^tB$. Idem pour ${}^tBB$.

Matrices antisymétriques

Définition 11. Une matrice A de taille $n \times n$ est antisymétrique si

$${}^tA = -A,$$

c'est-à-dire si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$.

Exemple 17.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours tous nuls.

1.2. **Déterminant.** Dans cette partie, on cherche à associer à toute matrice carrée un nombre, son déterminant, qui soit facile à calculer et qui permette de décider si la matrice est inversible ou non.

Théorème 4. *Il existe une unique fonction*

$$\begin{array}{cccc} \det & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ & & A & \mapsto & \det(A) \end{array}.$$

ayant les propriétés suivantes :

(1) Si A_1 est obtenue à partir de A en multipliant une ligne par $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\det(A_1) = \lambda \det(A)$.
(2) Si A_2 est obtenue à partir de A en échangeant deux lignes, alors $\det(A_2) = -\det(A)$.
(3) Si A_3 est obtenue à partir de A en ajoutant à une ligne un multiple d'une autre ligne, alors $\det(A_3) = \det(A)$.
(4) $\det(I_n) = 1$.

De plus, pour toute matrice A, on a $\det(A) = \det({}^tA)$. *Par suite, on peut remplacer «ligne» par «colonne» dans ce qui précède.*

Proposition 10. *Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul.*

Exemple 18. Soit θ un paramètre réel. Quand est-ce que la matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est inversible ? En prenant le déterminant, on obtient $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$, donc la matrice est toujours inversible.

Proposition 11. *Soient A et B deux matrices carrées de même taille. Alors :*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

De plus si A est inversible alors :

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Définition 12. Soit A une matrice $n \times n$. On appelle mineur en i, j, et on note Δ_{ij} , le déterminant de la matrice $(n-1)\times(n-1)$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A.

Exemple 19. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$
Alors
$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}, \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}, \Delta_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Définition 13. Notons $A = (a_{ij})$. Le développement de $\det(A)$ par la ligne i est
$$det_i(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(i+j)} a_{ij} \Delta_{ij}.$$
Le développement de $\det(A)$ par la colonne j est
$$det^j(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i+j)} a_{ij} \Delta_{ij}.$$

Exemple 20. Prenons
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Pour gérer le signe $(-1)^{i+j}$, le plus simple est de former un tableau :
$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$
Pour développer par rapport à la première ligne, disons, on prend les mineurs et les coefficients dans la matrice, les signes dans le tableau, et on ajoute :
$$det_1(A) = +0 \times \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$0 + 17 + 0 = 17.$$
Par rapport à la troisième colonne, on a :
$$det^3(A) = +(-1) \times \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$0 - 5 \times (-3) - (-2) = 17.$$
Ce n'est pas un hasard si on trouve le même résultat.

Proposition 12. *Pour tout i et tout j, on a :*

$$det_i(A) = det^j(A) = det(A).$$

En d'autre termes, le développement donne une formule pour calculer le déterminant, en fonction de déterminants plus petits.

Nous allons maintenant voir une formule pour calculer l'inverse d'une matrice carrée. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice.

On pose

$$C = ((-1)^{i+j}\Delta_{ij}).$$

et on l'appelle la comatrice de A.

Proposition 13. *Soit A une matrice inversible. Alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t C.$$

Exemple 21. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Le calcul donne que $\det(A) = -4$. La comatrice C s'obtient en calculant 9 déterminants 2×2 (sans oublier les signes $+/-$). On trouve :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 8 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 5 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^t C = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

1.2.1. *Méthode de Cramer.* Le théorème suivant, appelé règle de Cramer, donne une formule explicite pour la solution de certains systèmes d'équations linéaires ayant autant d'équations que d'inconnues.

Considérons le système d'équations linéaires à n équations et n inconnues suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \qquad \cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$$

Ce système peut aussi s'écrire sous forme matricielle $AX = B$ où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Définissons la matrice $A_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, A_j est la matrice obtenue en remplaçant la j-ème colonne de A par le second membre B. La règle de Cramer va nous permettre de calculer la solution du système dans le cas où $\det(A) \neq 0$ en fonction des déterminants des matrices A et A_j.

Théorème 5 (Règle de Cramer)**.** *Soit*

$$AX = B$$

un système de n équations à n inconnues. Supposons que $\det(A) \neq 0$*. Alors l'unique solution* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *du système est donnée par :*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \qquad \ldots \qquad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}.$$

Exemple 22. Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 & & + & 2x_3 & = & 6 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 30 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 8. \end{cases}$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

et

$$\det(A) = 44 \qquad \det(A_1) = -40 \qquad \det(A_2) = 72 \qquad \det(A_3) = 152.$$

La solution est alors :

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = -\frac{40}{44} = -\frac{10}{11} \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11} \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}\,.$$

2. Espaces vectoriels

On rappelle que la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1. **Généralités sur les espaces vectoriels.**

2.1.1. *Définition.* Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble non vide E muni :

- d'une loi de composition interne, c'est-à-dire d'une application de $E \times E$ dans E :

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & u+v \end{array}$$

- d'une loi de composition externe, c'est-à-dire d'une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda,u) & \mapsto & \lambda \cdot u \end{array}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

(1) $u+v=v+u \quad$ (pour tous u,$v \in E$)
(2) $u+(v+w)=(u+v)+w \quad$ (pour tous $u,v,w \in E$)
(3) Il existe un élément neutre $0_E \in E$ tel que $u+0_E=u \quad$ (pour tout $u \in E$)
(4) Tout $u \in E$ admet un symétrique u' tel que $u+u'=0_E$. Cet élément u' est noté $-u$.
(5) $1_{\mathbb{K}} \cdot u = u \quad$ (pour tout $u \in E$)
(6) $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u \quad$ (pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u \in E$)
(7) $\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v \quad$ (pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $u,v \in E$)
(8) $(\lambda+\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u \quad$ (pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u \in E$)

On appelle les éléments de E des **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ des **scalaires**.

2.1.2. *Exemples fondamentaux.*

- L'exemple le plus fondamental des espaces vectoriel est celui de l'ensemble $\mathbb{K}^n$.
- L'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ des matrices $m \times n$ est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- Soit A un ensemble quelconque. Notons l'ensemble des fonctions $f : A \to \mathbb{K}$ par $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$, c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

2.2. **Les sous-espaces vectoriels.**

Définition 14. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $F \subset E$ une partie non vide. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E lorsque les deux conditions suivantes sont remplies : pour $u, v \in F$, on doit avoir $u + v \in F$, et pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $v \in F$, on doit avoir $\lambda.v \in F$.

2.2.1. *Exemples.*

- Donnons-nous une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et considérons $E = \{v \in \mathbb{K}^n | Av = 0\}$. Alors E est un sous-espace de $\mathbb{K}^n$. En effet, si u et v sont dans E, on a : $Au = Av = 0$, donc $A(u + v) = Au + Av = 0$, donc $u + v \in E$. On vérifie de même que $A(\lambda v) = \lambda Av = 0$ si $Av = 0$, donc $\lambda v \in E$ si $v \in E$.
- On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes dont le degré est $\leq n$. Alors $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{K}[X]$.
- Soit $\mathcal{C}(I,R)$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle I. On a déja : $\mathcal{C}(I,R) \subset \mathcal{F}(I,R)$, et c'est un sous-espace vectoriel. On peut remplacer «continue» par «dérivable».

  On peut même considérer

  $$E = \{f \in \mathcal{F}(I,R)|\ f \text{ est dérivable deux fois et } 3f'' - 5f' + f = 0\}.$$

  On vérifie que E est alors un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,R)$.

Théorème 6 (Caractérisation d'un sous-espace vectoriel)**.** *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie non vide de E.*

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$\lambda u + \mu v \in F \textit{ pour tous } u, v \in F \textit{ et tous } \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Proposition 14. *Soit E un espace vectoriel. L'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace de E.*

2.3. **Bases et dimension d'un espace vectoriel.**

2.3.1. *Familles génératrices.*

Définition 15. Soit E un espace vectoriel, et soient $e_1, e_2, \ldots e_n$ des éléments de E. Une **combinaison linéaire** de ces éléments est une somme de la forme :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n, \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{K}.$$

L'ensemble des combinaisons linéaires de $e_1, e_2, \ldots e_n$ est noté $\textbf{Vect}(e_1, e_2, \ldots e_n)$.

Lemme 1. *L'ensemble* $Vect(e_1, e_2, \dots e_n)$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

Nous dirons que $Vect(e_1, e_2, \dots e_n)$ est l'espace engendré par les vecteurs $e_1, e_2, \dots e_n$.

Définition 16. Soient E un espace vectoriel et $e_1, e_2, \dots e_n$ une famille d'éléments de E. On dit que c'est une famille **génératrice** de E lorsque $E = Vect(e_1, e_2, \dots e_n)$.

Exemple 23. Prenons $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Écrivons simplement

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2.$$

On constate bien que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de e_1 et e_2 , donc e_1, e_2 est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Il y en a d'autres, par exemple prenons $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La condition pour qu'un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartienne à $Vect(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est l'existence de deux nombres λ_1 et λ_2 tels que

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = x \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = y \end{cases}$$

Le déterminant du système est $2 \times 1 - 3 \times 1 = -1 \neq 0$, donc la matrice correspondante est inversible, donc le système a une solution unique (λ_1, λ_2).

2.3.2. *Familles libres.*

Définition 17. Soit E un espace vectoriel, et soient $e_1, e_2, \dots e_n$ une famille d'éléments de E. On dit que c'est une famille **libre** lorsque l'équation

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = 0, \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{K},$$

ne possède qu'une seule solution, à savoir

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Exemple 24. Prenons $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Pour vérifier si la famille est libre, nous devons examiner l'équation $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$, qui s'écrit comme le système

$$\begin{cases} -5\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 7\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Le déterminant étant $-38 \neq 0$, le système a une solution unique, qui est bien sûr $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Donc la famille est libre.

Si maintenant on pose $e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$, la famille e_1, e_2, e_3 est-elle libre ? Le système devient :

$$\begin{cases} -5\lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 7\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

En faisant $L_1 \leftarrow L_1 + 5L_2$, puis en permutant les lignes, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 7\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \\ 38\lambda_2 + 38\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

alors $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3$. En particulier, on a la solution $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$, et d'ailleurs on vérifie effectivement que $e_1 + e_2 - e_3 = 0$. La famille n'est donc pas libre.

2.3.3. *Base et dimension.*

Définition 18. Lorsqu'une famille est à la fois libre et génératrice, on dit que c'est une **base** de l'espace vectoriel considéré.

Exemple 25. Considérons $E = \mathbb{K}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. Posons $e_i = X^i$, pour $0 \leq i \leq n$. Tout polynôme s'écrit comme combinaison linéaire des puissances de X, donc la famille est génératrice, de plus si :

$$\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \cdots + \lambda_n X^n,$$

alors on a $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ (par définition du polynôme nul). Donc la famille est libre. Finalement la famille $1, X, X_2, \cdots, X_n$ est une base, qu'on appelle encore la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Noter qu'elle comprend $n + 1$ éléments.

Définition 19. La **dimension** d'un espace vectoriel est le nombre de vecteurs dans une base quelconque. La dimension de E est notée $\mathbf{dim(E)}$.

Exemple 26. La dimension de $\mathbb{K}_n[X]$ est $n+1$, prendre la base canonique $1, X, X^2, \cdots, X^n$.

Théorème 7. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On peut extraire de toute famille génératrice C de E une base B de E.*

Théorème 8. *(de la base incomplète) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre $C = (u_1, \cdots, u_p)$ de vecteurs de E peut être complétée en une base $B = (u_1, \cdots, u_p, \cdots, u_n)$ de E.*

Proposition 15. *Dans un espace vectoriel E de dimension n :*

(1) Toute famille libre $(u_1, \cdots, u_n)$ de n vecteurs de E est une base.
(2) Toute famille génératrice $(u_1, \cdots, u_n)$ de n vecteurs de E est une base.

Proposition 16. *(1) Un sous-espace F d'un espace vectoriel E de dimension finie est de dimension finie.*
(2) On a alors $dim(F) \leq dim(E)$.
(3) Si $dim(F) = dim(E)$, on a $F = E$.

2.4. **Somme des sous-espaces vecoriels.** Soient E un espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels de F. On appelle somme de F et G le sous-espace $Vect(F \cup G)$ engendré par $F \cup G$. On le note $F + G$.

Notons que l'union $F \cup G$ n'est un espace vectoriel que dans des conditions particulières.

Proposition 17. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a :*

$$dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G).$$

Définition 20. Un hyperplan d'un espace E de dimension n est un sous-espace vectoriel H de dimension $n - 1$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E contenant un hyperplan H, alors $F = H$ ou $F = E$.

2.5. **Rang d'une matrice.**

Rang d'une famille de vecteurs : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille finie de vecteurs de E. Le sous-espace vectoriel $Vect(v_1, \ldots, v_p)$ engendré par $\{v_1, \ldots, v_p\}$ étant de dimension finie, on peut donc donner la définition suivante :

Définition 21 (Rang d'une famille finie de vecteurs)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille finie de vecteurs de E. Le **rang** de la famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est la dimension du sous-espace vectoriel $Vect(v_1, \ldots, v_p)$ engendré par les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$. Autrement dit :

$$rg(v_1, \ldots, v_p) = dim(Vect(v_1, \ldots, v_p)).$$

Calculer le rang d'une famille de vecteurs n'est pas toujours évident, cependant il y a des inégalités qui découlent directement de la définition.

Proposition 18. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille de p vecteurs de E. Alors :*

(1) $0 \leq rg(v_1,\ldots,v_p) \leq p$: le rang est inférieur ou égal au nombre d'éléments dans la famille.

(2) Si E est de dimension finie alors $rg(v_1,\ldots,v_p) \leq dim(E)$: le rang est inférieur ou égal à la dimension de l'espace ambiant E.

Remarque 1. Nous avons :

- Le rang d'une famille vaut 0 si et seulement si tous les vecteurs sont nuls.
- Le rang d'une famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ vaut p si et seulement si la famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est libre.

Exemple 27. Quel est le rang de la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ suivante dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Ce sont des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ donc $rg(v_1,v_2,v_3) \leq 4$.
- Mais comme il n'y a que 3 vecteurs alors $rg(v_1,v_2,v_3) \leq 3$.
- Le vecteur v_1 est non nul donc $rg(v_1,v_2,v_3) \geq 1$.
- Il est clair que v_1 et v_2 sont linéairement indépendants donc $rg(v_1,v_2,v_3) \geq rg(v_1,v_2) = 2$.

Il reste donc à déterminer si le rang vaut 2 ou 3. On cherche si la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre ou liée en résolvant le système linéaire :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0.$$

On trouve $v_1 - v_2 + v_3 = 0$. La famille est donc liée.

Ainsi $Vect(v_1,v_2,v_3) = Vect(v_1,v_2)$, donc $rg(v_1,v_2,v_3) = dim(Vect(v_1,v_2,v_3)) = 2$.

Rang d'une matrice : Une matrice peut être vue comme une juxtaposition de vecteurs colonnes.

Définition 22. On définit le **rang** d'une matrice comme étant le rang de ses vecteurs colonnes.

Exemple 28. Le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{K})$$

est par définition le rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{K}^2$:

$$\left\{ v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right), v_3 = \left(\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{smallmatrix}\right), v_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}.$$

Tous ces vecteurs sont colinéaires à v_1, donc le rang de la famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est 1 et ainsi $rg(A) = 1$.

Réciproquement, on se donne une famille de p vecteurs $\{v_1, \ldots, v_p\}$ d'un espace vectoriel E de dimension n. Fixons une base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E. Chaque vecteur v_j se décompose dans la base $\mathcal{B}$: $v_j = a_{1j}e_1 + \cdots + a_{ij}e_i + \cdots + a_{nj}e_n$, ce que l'on note $v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. En juxtaposant ces vecteurs colonnes, on obtient une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de la famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est égal au rang de la matrice A.

Théorème 9 (Matrice inversible et rang)**.** *Une matrice carrée A de taille n est inversible si et seulement si $rg(A) = n$.*

3. Applications linéaires

3.1. Généralités sur les applications linéaires.

Définition 23. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application f de E dans F est une application linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

(1) $f(u+v) = f(u) + f(v)$, pour tous $u, v \in E$;
(2) $f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$, pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Notation. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$.

Exemple 29. Voici d'autres exemples d'applications linéaires :

(1) Pour une matrice fixée $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, l'application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ définie par

$$f(X) = AX$$

est une application linéaire.

(2) L'application nulle, notée $0_{\mathcal{L}(E,F)}$:

$$f : E \longrightarrow F \qquad f(u) = 0_F \qquad \text{pour tout } u \in E.$$

(3) L'application identité, notée id_E :

$$f : E \longrightarrow E \qquad f(u) = u \qquad \text{pour tout } u \in E.$$

Proposition 19. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est une application linéaire de E dans F, alors :*

- $f(0_E) = 0_F$,
- $f(-u) = -f(u)$, *pour tout* $u \in E$.

Pour démontrer qu'une application est linéaire, on peut aussi utiliser la caractérisation suivante :

Proposition 20 (Caractérisation d'une application linéaire)**.** *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F. L'application f est linéaire si et seulement si, pour tous vecteurs u et v de E et pour tous scalaires λ et μ de $\mathbb{K}$,*

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Plus généralement, une application linéaire f préserve les combinaisons linéaires : pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et tous $v_1, \ldots, v_n \in E$, on a

$$f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n).$$

Vocabulaire.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Une application linéaire de E dans F est aussi appelée **morphisme** (ou homomorphisme) d'espaces vectoriels. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$.
- Une application linéaire de E dans E est appelée endomorphisme de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

3.2. **Image d'une application linéaire.** Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Soit A un sous-ensemble de E. L'ensemble des images par f des éléments de A, appelé image directe de A par f, est noté $f(A)$. C'est un sous-ensemble de F. On a par définition :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Dans toute la suite, E et F désigneront des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ sera une application linéaire.

$f(E)$ s'appelle l'image de l'application linéaire f et est noté $Im(f)$.

Proposition 21 (Structure de l'image d'un sous-espace vectoriel)**.** *Soient E et F deux espaces vectoriels.*

(1) Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.

(2) En particulier, $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Remarque 2. On a par définition de l'image directe $f(E)$:

f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$.

Preuve Tout d'abord, comme $0_E \in E'$ alors $0_F = f(0_E) \in f(E')$. Ensuite on montre que pour tout couple (y_1,y_2) d'éléments de $f(E')$ et pour tous scalaires λ, μ, l'élément $\lambda y_1 + \mu y_2$ appartient à $f(E')$. En effet :

$$y_1 \in f(E') \iff \exists x_1 \in E', f(x_1) = y_1$$
$$y_2 \in f(E') \iff \exists x_2 \in E', f(x_2) = y_2.$$

Comme f est linéaire, on a

$$\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2).$$

Or $\lambda x_1 + \mu x_2$ est un élément de E', car E' est un sous-espace vectoriel de E, donc $\lambda y_1 + \mu y_2$ est bien un élément de $f(E')$.

3.3. **Noyau d'une application linéaire.**

Définition 24 (Définition du noyau)**.** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Le noyau de f, noté $Ker(f)$, est l'ensemble des éléments de E dont l'image est 0_F :

$$Ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

Autrement dit, le noyau est l'image réciproque du vecteur nul de l'espace d'arrivée : $Ker(f) = f^{-1}\{0_F\}$.

Proposition 22. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve $Ker(f)$ est non vide car $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in Ker(f)$. Soient $x_1, x_2 \in Ker(f)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda x_1 + \mu x_2$ est un élément de $Ker(f)$. On a, en utilisant la linéarité de f et le fait que x_1 et x_2 sont des éléments de $Ker(f)$: $f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = \lambda 0_F + \mu 0_F = 0_F$.

Exemple 30. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ l'application linéaire définie par $f(X) = AX$. Alors $Ker(f) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$: c'est donc l'ensemble des $X \in \mathbb{R}^n$ solutions du système linéaire homogène $AX = 0$.

Remarque 3. Le noyau fournit une nouvelle façon d'obtenir des sous-espaces vectoriels.

Théorème 10 (Caractérisation des applications linéaires injectives)**.** *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Alors :*

$$f \textit{ injective} \quad \iff \quad Ker(f) = \{0_E\}$$

Autrement dit, f est injective si et seulement si son noyau ne contient que le vecteur nul. En particulier, pour montrer que f est injective, il suffit de vérifier que : si $f(x) = 0_F$ alors $x = 0_E$.

Preuve

- Supposons que f soit injective et montrons que $Ker(f) = \{0_E\}$. Soit x un élément de $Ker(f)$. On a $f(x) = 0_F$. Or, comme f est linéaire, on a aussi $f(0_E) = 0_F$. De l'égalité $f(x) = f(0_E)$, on déduit $x = 0_E$ car f est injective. Donc $Ker(f) = \{0_E\}$.
- Réciproquement, supposons maintenant que $Ker(f) = \{0_E\}$. Soient x et y deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$. On a donc $f(x) - f(y) = 0_F$. Comme f

est linéaire, on en déduit $f(x-y)=0_F$, c'est-à-dire $x-y$ est un élément de $Ker(f)$. Donc $x-y=0_E$, soit $x=y$.

Exemple 31. Considérons, pour $n \geq 1$, l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_{n+1}[X] \\ P(X) &\longmapsto X \cdot P(X). \end{aligned}$$

Étudions d'abord le noyau de f : soit $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $X \cdot P(X) = 0$. Alors

$$a_n X^{n+1} + \cdots + a_1 X^2 + a_0 X = 0.$$

Ainsi, $a_i = 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ et donc $P(X) = 0$. Le noyau de f est donc nul : $Ker(f) = \{0\}$.

L'espace $Im(f)$ est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ sans terme constant : $Im(f) = Vect\{X, X^2, \ldots, X^{n+1}\}$.

Conclusion : f est injective, mais n'est pas surjective.

Le théorème suivant donne une relation entre la dimension du noyau et la dimension de l'image de f.

Théorème 11 (Théorème du rang)**.** *Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E étant de dimension finie. Alors*

$$dim(E) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)).$$

On définit le rang d'une application linéaire f comme étant la dimension de $Im(f)$, d'où le nom du théorème.

3.4. **L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$.** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Remarquons tout d'abord que, l'ensemble des applications de E dans F, noté $\mathcal{F}(E,F)$, peut être muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe, définies de la façon suivante : f, g étant deux éléments de $\mathcal{F}(E,F)$, et λ étant un élément de $\mathbb{K}$, pour tout vecteur u de E,

$$(f+g)(u) = f(u) + g(u) \qquad \text{et} \qquad (\lambda \cdot f)(u) = \lambda f(u).$$

Proposition 23. *L'ensemble des applications linéaires entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, noté $\mathcal{L}(E,F)$, muni des deux lois définies précédemment, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Preuve L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est inclus dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(E,F)$. Pour montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il suffit donc de montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$:

- Tout d'abord, l'application nulle appartient à $\mathcal{L}(E,F)$.
- Soient $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$, et montrons que $f+g$ est linéaire. Pour tous vecteurs u et v de E et pour tous scalaires α, β de $\mathbb{K}$,

$$\begin{array}{rcll}(f+g)(\alpha u+\beta v) & = & f(\alpha u+\beta v)+g(\alpha u+\beta v) & (\text{définition de } f+g)\\ & = & \alpha f(u)+\beta f(v)+\alpha g(u)+\beta g(v) & (\text{linéarité de } f \text{ et de } g)\\ & = & \alpha\left(f(u)+g(u)\right)+\beta\left(f(v)+g(v)\right) & (\text{propriétés des lois de } F)\\ & = & \alpha(f+g)(u)+\beta(f+g)(v) & (\text{définition de } f+g)\end{array}$$

  $f+g$ est donc linéaire et $\mathcal{L}(E,F)$ est stable pour l'addition.
- Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, et montrons que λf est linéaire.

$$\begin{array}{rcll}(\lambda f)(\alpha u+\beta v) & = & \lambda f(\alpha u+\beta v) & (\text{définition de } \lambda f)\\ & = & \lambda\left(\alpha f(u)+\beta f(v)\right) & (\text{linéarité de } f)\\ & = & \alpha\lambda f(u)+\beta\lambda f(v) & (\text{propriétés des lois de } F)\\ & = & \alpha(\lambda f)(u)+\beta(\lambda f)(v) & (\text{définition de } \lambda f)\end{array}$$

  λf est donc linéaire et $\mathcal{L}(E,F)$ est stable pour la loi externe.

$\mathcal{L}(E,F)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$.

En particulier, $\mathcal{L}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,E)$.

3.5. **Composition et inverse d'applications linéaires.**

Proposition 24 (Composée de deux applications linéaires)**.** *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.*

Remarque 4. En particulier, le composé de deux endomorphismes de E est un endomorphisme de E. Autrement dit, $\circ$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{L}(E)$.

Preuve Soient u et v deux vecteurs de E, et α et β deux éléments de $\mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{array}{rcll}(g\circ f)(\alpha u+\beta v) & = & g\left(f(\alpha u+\beta v)\right) & (\text{définition de } g\circ f)\\ & = & g\left(\alpha f(u)+\beta f(v)\right) & (\text{linéarité de } f)\\ & = & \alpha g\left(f(u)\right)+\beta g\left(f(v)\right) & (\text{linéarité de } g)\\ & = & \alpha(g\circ f)(u)+\beta(g\circ f)(v) & (\text{définition de } g\circ f)\end{array}$$

Vocabulaire.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Une application linéaire bijective de E sur F est appelée **isomorphisme** d'espaces vectoriels. Les deux espaces vectoriels E et F sont alors dits isomorphes.
- Un endomorphisme bijectif de E (c'est-à-dire une application linéaire bijective de E dans E) est appelé **automorphisme** de E.

Proposition 25 (Linéarité de l'application réciproque d'un isomorphisme)**.** *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est un isomorphisme de E sur F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.*

Preuve Comme f est une application bijective de E sur F, alors f^{-1} est une application bijective de F sur E. Il reste donc à prouver que f^{-1} est bien linéaire.

Soient u' et v' deux vecteurs de F et soient α et β deux éléments de $\mathbb{K}$. On pose $f^{-1}(u') = u$ et $f^{-1}(v') = v$, et on a alors $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$. Comme f est linéaire, on a

$$f^{-1}(\alpha u' + \beta v') = f^{-1}\left(\alpha f(u) + \beta f(v)\right) = f^{-1}\left(f(\alpha u + \beta v)\right) = \alpha u + \beta v$$

car $f^{-1} \circ f = id_E$ (où id_E désigne l'application identité de E dans E). Ainsi

$$f^{-1}(\alpha u' + \beta v') = \alpha f^{-1}(u') + \beta f^{-1}(v'),$$

et f^{-1} est donc linéaire.

Exemple 32. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (2x + 3y, x + y)$. Il est facile de prouver que f est linéaire. Pour prouver que f est bijective, on pourrait calculer son noyau et son image. Mais ici nous allons calculer directement son inverse : on cherche à résoudre $f(x,y) = (x',y')$. Cela correspond à l'équation $(2x + 3y, x + y) = (x',y')$ qui est un système linéaire à deux équations et deux inconnues.

On trouve $(x,y) = (-x' + 3y', x' - 2y')$. On pose donc $f^{-1}(x',y') = (-x' + 3y', x' - 2y')$. On vérifie aisément que f^{-1} est l'inverse de f, et on remarque que f^{-1} est une application linéaire.

Exemple 33. Plus généralement, soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par $f(X) = AX$ (où A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Si la matrice A est inversible, alors f^{-1} est une application linéaire bijective et est définie par $f^{-1}(X) = A^{-1}X$.

Dans l'exemple précédent,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3.6. **Matrice d'une application linéaire.** Il existe un lien étroit entre les matrices et les applications linéaires. À une matrice on associe naturellement une application linéaire. Et réciproquement, étant donné une application linéaire, et des bases pour les espaces vectoriels de départ et d'arrivée, on associe une matrice.

Dans cette section, tous les espaces vectoriels sont de dimension finie.

3.6.1. *Matrice associée à une application linéaire.* Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient n la dimension de E et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soient m la dimension de F et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_m)$ une base de F. Soit enfin $f : E \to F$ une application linéaire.

Les propriétés des applications linéaires entre deux espaces de dimension finie permettent d'affirmer que :

- l'application linéaire f est déterminée de façon unique par l'image d'une base de E, donc par les vecteurs $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$.
- Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, $f(e_j)$ est un vecteur de F et s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ de F.

  Il existe donc m scalaires uniques $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ tels que

$$f(e_j) = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \dots + a_{mj} f_m = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}.$$

Ainsi, l'application linéaire f est entièrement déterminée par les coefficients $(a_{ij})_{(i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}}$. Il est donc naturel d'introduire la définition suivante :

Définition 25. La matrice de l'application linéaire f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est constituée par les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_m)$:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_n) \end{array} \\
\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{array} &
\begin{pmatrix}
a_{11} & & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & & a_{mj} & \dots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

En termes plus simples : c'est la matrice dont les vecteurs colonnes sont l'image par f des vecteurs de la base de départ $\mathcal{B}$, exprimée dans la base d'arrivée $\mathcal{B}'$. On note cette matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Remarque 5. On remarque que :

- La taille de la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ dépend uniquement de la dimension de E et de celle de F.
- Par contre, les coefficients de la matrice dépendent du choix de la base $\mathcal{B}$ de E et de la base $\mathcal{B}'$ de F.

Exemple 34. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$
\begin{array}{rccl}
f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
 & & (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto & (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + 3x_3)
\end{array}
$$

Il est utile d'identifier vecteurs lignes et vecteurs colonnes ; ainsi f peut être vue comme l'application $f : \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x_1+x_2-x_3 \\ x_1-2x_2+3x_3 \end{smallmatrix}\right)$.

Soient $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (f_1,f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. C'est-à-dire :

$$
e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

(1) Quelle est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$?
   - On a $f(e_1) = f(1,0,0) = (1,1) = f_1 + f_2$. La première colonne de la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est donc $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
   - De même $f(e_2) = f(0,1,0) = (1,-2) = f_1 - 2f_2$. La deuxième colonne de la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est donc $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.
   - Enfin $f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,3) = -f_1 + 3f_2$. La troisième colonne de la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est donc $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Ainsi :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) On va maintenant changer la base de l'espace de départ et celle de l'espace d'arrivée. Soient les vecteurs

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On montre facilement que $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_0' = (\phi_1,\phi_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Quelle est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_0'$?

$f(\epsilon_1) = f(1,1,0) = (2,-1) = 3\phi_1 - \phi_2$, $f(\epsilon_2) = f(1,0,1) = (0,4) = -4\phi_1 + 4\phi_2$, $f(\epsilon_3) = f(0,1,1) = (0,1) = -\phi_1 + \phi_2$, donc

$$M_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0'}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cet exemple illustre bien le fait que la matrice dépend du choix des bases.

3.6.2. *Opérations sur les applications linéaires et les matrices.*

Proposition 26. *Soient $f,g : E \to F$ deux applications linéaires et soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Alors :*

- $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$
- $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$

Autrement dit, si on note :

$$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f), \quad B = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g), \quad C = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g), \quad D = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f).$$

Alors :

$$C = A + B \qquad et \qquad D = \lambda A.$$

Autrement dit : la matrice associée à la somme de deux applications linéaires est la somme des matrices (à condition de considérer la même base sur l'espace de départ pour les deux applications et la même base sur l'espace d'arrivée). Idem avec le produit par un scalaire.

Le plus important sera la composition des applications linéaires.

Proposition 27. *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires et soient $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F et $\mathcal{B}''$ une base de G. Alors :*

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$$

Autrement dit, si on note :

$$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \qquad B = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \qquad C = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)$$

Alors

$$C = B \times A$$

Autrement dit, à condition de bien choisir les bases, la matrice associée à la composition de deux applications linéaires est le produit des matrices associées à chacune d'elles, dans le même ordre.

En fait, le produit de matrices, qui semble compliqué au premier abord, est défini afin de correspondre à la composition des applications linéaires.

Preuve Posons $n = dim(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E ; $m = dim(F)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_m)$ une base de F ; $q = dim(G)$ et $\mathcal{B}'' = (g_1, \ldots, g_q)$ une base de G.

Écrivons $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice de f, $B = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{q,m}(\mathbb{K})$ la matrice de g, $C = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$ la matrice de $g \circ f$.

On a

$$\begin{array}{rcl}
(g \circ f)(e_1) & = & g\big(f(e_1)\big) \\
 & = & g(a_{11}f_1 + \cdots + a_{m1}f_m) \\
 & = & a_{11}g(f_1) + \cdots + a_{m1}g(f_m) \\
 & = & a_{11}\Big(b_{11}g_1 + \cdots + b_{q1}g_q\Big) + \cdots + a_{m1}\Big(b_{1m}g_1 + \cdots + b_{qm}g_q\Big)
\end{array}$$

Ainsi, la première colonne de $C = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)$ est

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{m1}b_{1m} \\ a_{11}b_{21} + \cdots + a_{m1}b_{2m} \\ \vdots \\ a_{11}b_{q1} + \cdots + a_{m1}b_{qm} \end{pmatrix}.$$

Mais ceci est aussi la première colonne de la matrice BA. En faisant la même chose avec les autres colonnes, on remarque que $C = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)$ et BA sont deux matrices ayant leurs colonnes égales. On a donc bien l'égalité cherchée.

Exemple 35. On considère deux applications linéaires : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. On pose $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, $G = \mathbb{R}^2$ avec $f : E \to F$, $g : F \to G$. On se donne des bases : $\mathcal{B} = (e_1,e_2)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (f_1,f_2,f_3)$ une base de F, et $\mathcal{B}'' = (g_1,g_2)$ une base de G.

On suppose connues les matrices de f et g :

$$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2} \qquad B = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}$$

Calculons la matrice associée à $g \circ f : E \to G$, $C = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)$, de deux façons différentes.

(1) **Première méthode.** Revenons à la définition de la matrice de l'application linéaire $g \circ f$. Il s'agit d'exprimer l'image des vecteurs de la base de départ $\mathcal{B}$ dans la base d'arrivée $\mathcal{B}''$. C'est-à-dire qu'il faut exprimer $g \circ f(e_j)$ dans la base (g_1,g_2).

- Calcul des $f(e_j)$. On sait par définition de la matrice A que $f(e_1)$ correspond au premier vecteur colonne : plus précisément, $f(e_1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{B}'} = 1f_1 + 1f_2 + 0f_3 = f_1 + f_2$.
  De même, $f(e_2) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{B}'} = 0f_1 + 1f_2 + 2f_3 = f_2 + 2f_3$.
- Calcul des $g(f_j)$. Par définition, $g(f_j)$ correspond à la j-ème colonne de la matrice B :
  - $g(f_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}''} = 2g_1 + 3g_2$
  - $g(f_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}''} = -g_1 + g_2$
  - $g(f_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}''} = 2g_2$
- Calcul des $g \circ f(e_j)$. Pour cela on combine les deux séries de calculs précédents :

$$g \circ f(e_1) = g(f_1 + f_2) = g(f_1) + g(f_2) = (2g_1 + 3g_2) + (-g_1 + g_2) = g_1 + 4g_2$$

$$g \circ f(e_2) = g(f_2 + 2f_3) = g(f_2) + 2g(f_3) = (-g_1 + g_2) + 2(2g_2) = -g_1 + 5g_2$$

- Calcul de la matrice $C = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)$: cette matrice est composée des vecteurs $g \circ f(e_j)$ exprimés dans la base $\mathcal{B}''$. Comme

$$g \circ f(e_1) = g_1 + 4g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}''} \qquad g \circ f(e_2) = -g_1 + 5g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}''}$$

alors

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

On trouve bien une matrice de taille 2×2 (car l'espace de départ et d'arrivée de $g \circ f$ est $\mathbb{R}^2$).

(2) **Deuxième méthode.** Utilisons le produit de matrices : on sait que $C = BA$. Donc

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = C = B \times A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Cet exemple met bien en évidence le gain, en termes de quantité de calculs, réalisé en passant par l'intermédiaire des matrices.

3.6.3. *Matrice d'un endomorphisme.* Dans cette section, on étudie le cas où l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont identiques.

$$f : E \to E \text{ est un endomorphisme.}$$

Si $dim(E) = n$, alors chaque matrice associée à f est une matrice carrée de taille $n \times n$.

Nous avons deux situations :

- Si on choisit la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée, alors on note simplement $M_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice associée à f.
- Mais on peut aussi choisir deux bases distinctes pour le même espace vectoriel E ; on note alors comme précédemment $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Exemple 36. Comme exemples :

- Cas de l'identité : $id : E \to E$ est définie par $id(x) = x$. Alors quelle que soit la base $\mathcal{B}$ de E, la matrice associée est la matrice identité : $M_{\mathcal{B}}(id) = I_n$.
- Cas d'une homothétie $h_\lambda : E \to E$, $h_\lambda(x) = \lambda \cdot x$ (où $\lambda \in \mathbb{K}$ est le rapport de l'homothétie) : $M_{\mathcal{B}}(h_\lambda) = \lambda I_n$.

3.6.4. *Matrice d'un isomorphisme.* Passons maintenant aux isomorphismes. Rappelons qu'un isomorphisme $f : E \to F$ est une application linéaire bijective. Nous avons vu que cela entraîne $dim(E) = dim(F)$.

Théorème 12 (Caractérisation de la matrice d'un isomorphisme)**.** *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F et $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.*

(1) f est bijective si et seulement si la matrice A est inversible. Autrement dit, f est un isomorphisme si et seulement si sa matrice associée $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible.
(2) De plus, si $f : E \to F$ est bijective, alors la matrice de l'application linéaire $f^{-1} : F \to E$ est la matrice A^{-1}. Autrement dit, $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = \Big(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\Big)^{-1}$.

Voici le cas particulier très important d'un endomorphisme $f : E \to E$ où E est muni de la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée et $A = M_{\mathcal{B}}(f)$.

Corollaire 1. *Nous avons :*

- *f est bijective si et seulement si A est inversible.*
- *Si f est bijective, alors la matrice associée à f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$ est A^{-1}.*

Autrement dit : $M_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \big(M_{\mathcal{B}}(f)\big)^{-1}$.
Preuve On note $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

- Si f est bijective, notons $B = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1})$. Alors par la proposition 27 on sait que
$$BA = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) \times M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(id_E) = I.$$
De même $AB = I$. Ainsi $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible et son inverse est $B = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1})$.
- Réciproquement, si $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est une matrice inversible, notons $B = A^{-1}$. Soit $g : F \to E$ l'application linéaire telle que $B = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g)$. Alors, toujours par la proposition 27
$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g) \times M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = BA = I$$
Donc la matrice de $g \circ f$ est l'identité, ce qui implique $g \circ f = id_E$. De même $f \circ g = id_F$. Ainsi f est bijective (et sa bijection réciproque est g).

3.7. **Changement de bases.**

3.7.1. *Application linéaire, matrice, vecteur.* Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (e_1,e_2,\ldots,e_n)$ une base de E. Pour chaque $x \in E$, il existe un n-uplet unique d'éléments de $\mathbb{K}$ $(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ tel que

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n.$$

La matrice des coordonnées de x est un vecteur colonne, noté $M_{\mathcal{B}}(x)$ ou encore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Dans $\mathbb{R}^n$, si $\mathcal{B}$ est la base canonique, alors on note simplement $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ en omettant de mentionner la base.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. Le but de ce paragraphe est de traduire l'égalité vectorielle $y = f(x)$ par une égalité matricielle.

Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.

Proposition 28. *Soit $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$. Pour $x \in E$, notons $X = M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Pour $y \in F$, notons $Y = M_{\mathcal{B}'}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$.*

Alors, si $y = f(x)$, on a

$$Y = AX$$

Autrement dit :

$$M_{\mathcal{B}'}\big(f(x)\big) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times M_{\mathcal{B}}(x)$$

Preuve

- On pose $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$, $\mathcal{B}' = (f_1,f_2,\ldots,f_m)$, $A = (a_{ij}) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ et $X = M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
- On a

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_je_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_jf(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}f_i\right).$$

En utilisant la commutativité de $\mathbb{K}$, on a

$$f(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j\right) f_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j\right) f_m.$$

- La matrice colonne des coordonnées de $y = f(x)$ dans la base $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ est $\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix}$.
- Ainsi la matrice $Y = M_{\mathcal{B}'}\big(f(x)\big) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix}$ n'est autre que $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Exemple 37. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est égale à

$$A = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On se propose de déterminer le noyau de f et l'image de f.

Les éléments x de E sont des combinaisons linéaires de e_1, e_2 et e_3 : $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. On a

$$\begin{aligned} x \in Ker(f) \quad &\iff \quad f(x) = 0_E \iff M_{\mathcal{B}}\big(f(x)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \quad AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On résout ce système par la méthode du pivot de Gauss. On trouve

$$\begin{aligned} Ker(f) &= \big\{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_2 + x_3 = 0\big\} \\ &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} t \\ -t \\ t \end{smallmatrix}\right) \mid t \in \mathbb{K} \right\} = Vect\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{B}} \right) \end{aligned}$$

Le noyau est donc de dimension 1. Par le théorème du rang, l'image $Im(f)$ est de dimension 2. Les deux premiers vecteurs de la matrice A étant linéairement indépendants, ils engendrent $Im(f)$:

$$Im(f) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right).$$

3.7.2. *Matrice de passage d'une base à une autre.* Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On sait que toutes les bases de E ont n éléments.

Définition 26. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E.

On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$, et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, la matrice carrée de taille $n \times n$ dont la j-ème colonne est formée des coordonnées du j-ème vecteur de la base $\mathcal{B}'$, par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Exemple 38. Soit l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$. On considère

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad\qquad \epsilon_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad \epsilon_2 = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}.$$

On considère la base $\mathcal{B} = (e_1,e_2)$ et la base $\mathcal{B}' = (\epsilon_1,\epsilon_2)$.

Quelle est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$?

Il faut exprimer ϵ_1 et ϵ_2 en fonction de (e_1,e_2). On calcule que :

$$\epsilon_1 = -e_1 + 2e_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \epsilon_2 = e_1 + 4e_2 = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

La matrice de passage est donc :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\2 & 4\end{pmatrix}$$

On va interpréter une matrice de passage comme la matrice associée à l'application identité de E par rapport à des bases bien choisies.

Proposition 29. *La matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ est la matrice associée à l'identité $id_E : (E,\mathcal{B}') \to (E,\mathcal{B})$ où E est l'espace de départ muni de la base $\mathcal{B}'$, et E est aussi l'espace d'arrivée, mais muni de la base $\mathcal{B}$:*

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E)$$

Faites bien attention à l'inversion de l'ordre des bases !

Cette interprétation est un outil fondamental pour ce qui suit. Elle permet d'obtenir les résultats de façon très élégante et avec un minimum de calculs.

Preuve On pose $\mathcal{B} = (e_1,e_2,\dots,e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1,e'_2,\dots,e'_n)$. On considère

$$\begin{array}{rcccl} id_E & : & (E,\mathcal{B}') & \longrightarrow & (E,\mathcal{B}) \\ & & x & \longmapsto & id_E(x) = x \end{array}$$

On a $id_E(e'_j) = e'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$ et $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E)$ est la matrice dont la j-ème colonne est formée des coordonnées de e'_j par rapport à $\mathcal{B}$, soit $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$. Cette colonne est la j-ème colonne de $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Proposition 30. *On a :*

(1) La matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ vers une base $\mathcal{B}'$ est inversible et son inverse est égale à la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$:

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \big(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\big)^{-1}$$

(2) Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases, alors

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$$

Preuve

(1) On a $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\big(id_E\big)$. Donc, d'après le théorème caractérisant la matrice d'un isomorphisme, $P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \big(M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\big(id_E\big)\big)^{-1} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\big(id_E^{-1}\big)$. Or $id_E^{-1} = id_E$, donc $P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\big(id_E\big) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

(2) $id_E : (E,\mathcal{B}'') \to (E,\mathcal{B})$ se factorise de la façon suivante :

$$(E,\mathcal{B}'') \xrightarrow{id_E} (E,\mathcal{B}') \xrightarrow{id_E} (E,\mathcal{B}).$$

Autrement dit, on écrit $id_E = id_E \circ id_E$. Cette factorisation permet d'écrire l'égalité suivante : $M_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}\big(id_E\big) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\big(id_E\big) \times M_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}\big(id_E\big)$, soit $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$.

Exemple 39. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$. Définissons

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Quelle est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$?

On a d'abord

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La proposition implique que $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} \times P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$. Donc on a $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2}$. En appliquant la méthode de Gauss pour calculer $P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$, on trouve alors :

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant étudier l'effet d'un changement de bases sur les coordonnées d'un vecteur.

- Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
- Soit $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.
- Pour $x \in E$, il se décompose en $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ dans la base $\mathcal{B}$ et on note $X = M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.
- Ce même $x \in E$ se décompose en $x = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$ dans la base $\mathcal{B}'$ et on note $X' = M_{\mathcal{B}'}(x) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$.

Proposition 31.

$$X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times X'$$

Notez bien l'ordre !

Preuve $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est la matrice de $id_E : (E,\mathcal{B}') \to (E,\mathcal{B})$. On utilise que $x = id_E(x)$ et la proposition. On a :

$$X = M_{\mathcal{B}}(x) = M_{\mathcal{B}}\big(id_E(x)\big) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E) \times M_{\mathcal{B}'}(x) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times X'$$

3.7.3. *Formule de changement de base.*

- Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
- Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
- Soient $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E.
- Soient $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F.
- Soit $P = P_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}'_E$.
- Soit $Q = P_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ à $\mathcal{B}'_F$.
- Soit $A = M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ la matrice de l'application linéaire f de la base $\mathcal{B}_E$ vers la base $\mathcal{B}_F$.
- Soit $B = M_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f)$ la matrice de l'application linéaire f de la base $\mathcal{B}'_E$ vers la base $\mathcal{B}'_F$.

Théorème 13 (Formule de changement de base)**.**

$$B = Q^{-1}AP$$

Preuve L'application $f : (E,\mathcal{B}'_E) \to (F,\mathcal{B}'_F)$ se factorise de la façon suivante :

$$(E,\mathcal{B}'_E) \xrightarrow{id_E} (E,\mathcal{B}_E) \xrightarrow{f} (F,\mathcal{B}_F) \xrightarrow{id_F} (F,\mathcal{B}'_F),$$

c'est-à-dire que $f = id_F \circ f \circ id_E$.

On a donc l'égalité de matrices suivante :

$$\begin{aligned} B &= M_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f) \\ &= M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F}(id_F) \times M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \times M_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(id_E) \\ &= P_{\mathcal{B}'_F,\mathcal{B}_F} \times M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \times P_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E} \\ &= Q^{-1}AP \end{aligned}$$

Dans le cas particulier d'un endomorphisme, nous obtenons une formule plus simple :

- Soit $f : E \to E$ une application linéaire.
- Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
- Soit $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
- Soit $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}$.
- Soit $B = M_{\mathcal{B}'}(f)$ la matrice de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}'$.

Le théorème devient alors :

Corollaire 2.

$$B = P^{-1}AP$$

Exemple 40. Reprenons les deux bases de $\mathbb{R}^3$ de l'exemple :

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_1$ est :

$$A = M_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Que vaut la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_2$, $B = M_{\mathcal{B}_2}(f)$?

(1) Nous avons calculé la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$ qui est

$$P = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) On calcule aussi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) On applique la formule du changement de base du corollaire :

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

C'est souvent l'intérêt des changements de base, se ramener à une matrice plus simple. Par exemple ici, il est facile de calculer les puissances B^k, pour en déduire les A^k.

4. Diagonalisation, trigonalisation et applications

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Un moyen de calculer plus facilement avec une application linéaire $f : E \to E$ est de trouver une base de E dans laquelle la matrice de f ait une forme simple : diagonale si possible, ou triangulaire. Cela s'appelle diagonaliser, triangulariser (on dit aussi trigonaliser), ou plus généralement réduire l'endomorphisme f.

4.1. Matrices semblables.

Définition 27. Deux matrices carrées A et B à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont dites semblables, s'il existe une matrice inversible P à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que $B = P^{-1}AP$ (ou ce qui revient au même, $A = PBP^{-1}$).

4.2. Diagonalisation.

Définition 28. On dit qu'une matrice A est diagonalisable lorsqu'il existe une matrice diagonale D telle que A et D sont semblables.

Exemple 41.

La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. En effet, A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ puisque $B = P^{-1}AP$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Proposition 32. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ l'application linéaire définie par A, c'est-à-dire $f(v) = Av$.*

Alors A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe une base $e_1, e_2, \cdots, e_n$ de $\mathbb{K}^n$ avec la propriété que $f(e_i) = \lambda_i e_i$ pour un certain scalaire $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Lorsque c'est le cas, soit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs e_i, on a alors :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Définition 29. Soit $f : E \to E$ une application linéaire. Un **vecteur propre** de f est un vecteur $v \neq 0$ tel que $f(v) = \lambda v$ pour un certain scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que v et λ sont associés. Lorsque $\lambda \in \mathbb{K}$ est associé à au moins un vecteur propre, on dit que c'est une **valeur propre** de f. Enfin, la valeur propre λ étant fixée, l'ensemble des $v \in E$ tels que $f(v) = \lambda v$ est appelé l'**espace propre** associé à λ. Nous le noterons E_λ.

4.3. **Le polynôme caractértique.**

Définition 30. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit f l'application $f(v) = Av$. Alors, λ est valeur propre de $f \Leftrightarrow det(A - \lambda Id) = 0$.

L'expression $det(A - \lambda Id)$ est un polynôme en λ, que l'on appelle le **polynôme caractéristique** de A (ou de f). On le note χ_A, ou χ_f.

Exemple 42. Prenons une matrice 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est alors

$$\chi_A = det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A).$$

Exemple 43. Prenons maintenant

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est alors

$$\chi_A = det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 2 & 1 \\ -6 & -1 - \lambda & -2 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6).$$

Donc,

$$\chi_A = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 2).$$

Les valeurs propres sont donc 2 et 3, et on dit que 3 a une «multiplicité» de 2 puisque le polynôme caractéristique a $(\lambda - 3)^2$ en facteur.

Examinons les vecteurs propres. Pour trouver ceux associés à la valeur propre 2, on résout le système $Av = 2v$. Faites le calcul, vous trouverez un espace de dimension 1, avec pour base par exemple $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pour la valeur propre 3, on résout $Av = 3v$.

L'ensemble des solutions est de dimension 2, avec pour base par exemple $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Il se trouve que e_1, e_2, e_3 est une base de $\mathbb{R}^3$. Nous avons donc une base de vecteurs propres, ce qui signifie que A est diagonalisable. Plus précisément, si P est la matrice dont les colonnes sont e_1, e_2, e_3, on sait sans calcul supplémentaire que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Donnons quelques proriétés générales du polynômes caractéristique.

Proposition 33. *Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

(1) Si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$.
(2) Si A est diagonalisable, alors son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

Rappelons qu'un polynôme en λ est dit scindé si c'est un produit de facteurs de degré 1, c'est-à-dire s'il est de la forme

$$c(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n).$$

4.4. **Compter les vecteurs propres.** Après avoir trouvé des vecteurs propres pour les diverses valeurs propres, nous devons vérifier si l'on peut trouver une base complète, formée de ces vecteurs propres. Il s'ensuit un travail de vérification, pour savoir si certaines familles sont libres.

Lemme 2. *Soit $f : E \to E$ une application linéaire, et soit $e_1, e_2, \cdots, e_n$ une famille de vecteurs propres de f. On suppose que e_i est associé à λ_i , et que les nombres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont distincts. Alors la famille $e_1, e_2, \cdots, e_n$ est libre.*

Proposition 34. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit f l'application linéaire associée. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ les racines distinctes du polynôme caractéristique de A.*

Pour chaque λ_i , soit n_i la dimension de l'espace propre associé $ker(f - \lambda_i Id)$, et soit $e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{in_i}$ une base de cet espace. Alors A est diagonalisable si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = n$$

Lorsque c'est le cas, la famille comprenant tous les vecteurs e_{ij} est une base de $\mathbb{K}^n$, formée de vecteurs propres de f.

4.5. **Résumé.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ l'application linéaire définie par $f(v) = Av$. Pour tenter de diagonaliser A, on suit les étapes suivantes.

(1) On calcule le polynôme caractéristique $\chi_A = det(A - \lambda Id)$, et on trouve ses racines distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ dans $\mathbb{K}$.
- Si χ_A n'est pas scindé, alors A n'est pas diagonalisable, et on s'arrête.
- Si χ_A est scindé, on passe à l'étape suivante. Si $n = m$, c'est-à-dire si on a n valeurs propres distinctes, alors on sait déjà que A est diagonalisable.

(2) Pour chaque λ_i , on calcule une base de $ker(f - \lambda_i Id)$. On en déduit sa dimension n_i.
- Si $\sum_i n_i < n$, la matrice A n'est pas diagonalisable, et on s'arrête.
- Si $\sum_i n_i = n$, la matrice est diagonalisable, et on passe à l'étape suivante.

(3) Soit $e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{in_i}$ une base de $ker(f - \lambda_i Id)$. Alors la réunion de tous ces vecteurs est une base de $\mathbb{K}^n$. Soit P la matrice dont les colonnes sont, dans l'ordre : $e_{11}, \cdots, e_{1n_1}, \cdots, e_{m1}, \cdots, e_{mn_m}$. Alors, $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale, où λ_i apparaît n_i fois sur sa diagonale.

Exemple 44. Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Le calcul du polynôme caractéristique donne :

$$\chi_A = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 2\lambda - 24.$$

Selon la façon de calculer le déterminant, ce polynôme peut vous apparaître factorisé, ce qui est évidemment une bonne chose pour calculer les racines.

$$\chi_A = -(\lambda + 2)(\lambda^2 - 7\lambda + 12) = -(\lambda + 2)(\lambda - 4)(\lambda - 3).$$

Les valeurs propres sont -2, 4 et 3. On a trois valeurs propres distinctes, donc la matrice A est diagonalisable.

Nous allons trouver des vecteurs e_1, e_2 et e_3, vecteurs propres associés à -2, 4 et 3 respectivement, ces vecteurs vont former une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit P la matrice dont les colonnes sont e_1, e_2 et e_3. Alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour la valeur propre -2 par exemple, on cherche $ker(f + 2Id)$ ce qui revient à résoudre :

$$\begin{cases} 3x - y + 3z &= 0 \\ 2x + 5y + 2z &= 0 \\ 3x + y + 3z &= 0 \end{cases}$$

En quelques étapes on constate que ce système équivaut aux équations $y = 0$ et $x + z = 0$. En prenant $z = 1$ par exemple, on obtient

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De la même manière, on obtient $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.6. **Trigonalisation.**

Définition 31. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si, et seulement si, elle est semblable à une matrice triangulaire.

Exemple 45.

Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, or $B = P^{-1}AP$, la matrice A est trigonalisable.

Proposition 35. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, son ploynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.*

Remarque 6.

Pratiquement, la trigonalisation, comme la diagonalisation éventuelle, commence par la recherche des valeurs propres et des sous-espaces propres ; dans ceux qui sont de dimension égale à la multiplicité de la valeur propre associées, on choisit une base de vecteurs propres ; dans les autres, une base incomplète de vecteurs propres : on complète ce système par des vecteurs non propres, souvent des vecteurs de la base canonique.

Exemple 46.

Voir TD.

4.7. **Applications.**

4.7.1. *Calcul de la puissance d'une matrice.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, supposons que la matrice A est diagonalisable, il existe alors une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que : $D = P^{-1}AP$, c'est-à-dire $A = PDP^{-1}$. Donc :

$$A^k = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})}_{k\, fois} = PD^kP^{-1}.$$

D'autre part, si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ on a $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$, et donc A^k se calcule facilement par la formule :

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Exemple 47.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, donc $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$. Alors, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Pour les valeurs propres 2 et 3 on trouve :

- E_2 est définie par $-x - y = 0$ donc $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- E_3 est définie par $-2x - y = 0$ donc $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. En effectuant les calculs, on obtient :

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^{k+1} - 3^k & 2^k - 3^k \\ -2^{k+1} + 2.3^k & -2^k + 2.3^k \end{pmatrix}.$$

4.7.2. *Résolution d'un système de suites récurrentes.*

Exemple 48.

Illustrons cela sur un exemple. Il s'agit de déterminer deux suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$(1)\ \begin{cases} U_{n+1} = U_n - V_n \\ V_{n+1} = 2U_n + 4V_n \end{cases} \text{ et telles que } \begin{cases} U_0 = 2 \\ V_0 = 1 \end{cases}.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$. Le système (1) s'écrit :

$$X_{n+1} = AX_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

d'où, par récurrence :

$$X_n = A^n X_0 \text{ avec } X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On est ainsi ramené au calcul de A^n. Dans notre cas, compte tenu du résultat ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.2^n - 3^{n+1} \\ -5.2^n + 2.3^{n+1} \end{pmatrix},$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} U_n = 5.2^n - 3^{n+1} \\ V_n = -5.2^n + 2.3^{n+1} \end{cases}.$$

4.7.3. *Système différentiel linéaire à coefficients constants.* Soit à résoudre de système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} & = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ & \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} & = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad \text{avec } a_{ii} \in \mathbb{R}, x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dérivables.}$$

Ce système s'écrit sous forme matricielle comme suite :

$$\frac{dX}{dt} = AX, \text{ où } A = (a_{ii}) \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Supposons que A est diagonalisable, il existe alors, une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que : $D = P^{-1}AP$. Si A est la matrice d'un endomorphisme

f dans la base canonique $\mathcal{B}$, D sa matrice dans la base des vecteurs propores $\mathcal{B}'$, X est la matrice d'un vecteur x dans $\mathcal{B}$ et X' sa matrice dans $\mathcal{B}'$, alors on a : $X' = P^{-1}X$.

En dérivant cette relation, on obtient :

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}\frac{dX}{dt} = P^{-1}AX = P^{-1}APX' = DX'.$$

Ce système s'intègre facilement, car D est diagonale.

Ainsi, on peut résoudre le système $\frac{dX}{dt} = AX$ de la manière suivante :

- On diagonalise A si $D = P^{-1}AP$ est diagonale semblable à A.
- On intègre le système $\frac{dX'}{dt} = DX'$.
- On revient à X par $X = PX'$.

Exemple 49.

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 4y \end{cases}.$$

On a :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Le système $\frac{dX'}{dt} = DX'$ s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt} = 2x' \\ \frac{dy'}{dt} = 3y' \end{cases},$$

ce qui donne immédiatement :

$$\begin{cases} x' & = c_1e^{2t} \\ & y' = c_2e^{3t} \end{cases},$$

et donc, en revenant à X par $X = PX'$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1e^{2t} \\ c_2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{2t} + c_2e^{3t} \\ -c_1e^{2t} - 2c_2e^{3t} \end{pmatrix},$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} x & = c_1e^{2t} + c_2e^{3t} \\ & y = -c_1e^{2t} - 2c_2e^{3t} \end{cases}.$$

Références

[1] Grifone, J. *Algèbre linéaire. 4^e édition*, Cépaduès-éditions (2011).

[2] Escofier, J. P., *Toute l'algèbre de la Licence : Cours et exercices corrigés. 4^e édition*, Dunod (2016).

[3] Bodin, A., *Algèbre : Cours de mathématiques - Première année.* (2016).