Université Mohamed Premier
Faculté Poluridisciplinaire -Naor
Département de Mathématiques

Série : 1

Année Universitaire 2019/2020
Filière SMPC, S_2
Module : M12 : Analyse : 2

"Séries Numériques"

Exercice 1. Étudier la nature des séries numériques $\sum_n u_n$ dans les cas suivants :

1) $u_n = \dfrac{n}{3n+1}$, 2) $u_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$, 3) $u_n = e^{-\frac{1}{n^2}}$.

4) $u_n = \dfrac{1}{5n^{\frac{3}{2}}}$, 5) $u_n = \dfrac{2}{n^{\frac{1}{2}}}$, 6) $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

7) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, 8) $u_n = \arcsin\left(\dfrac{2n}{4n^3-1}\right)$, 9) $u_n = \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

10) $u_n = \log\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$, 11) $u_n = \log(n)\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\log\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$, 12) $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$.

13) $u_n = \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{-n^2}$, 14) $u_n = \dfrac{a^n}{n^\alpha n!}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 0$, 15) $u_n = \left(\dfrac{n}{4n-1}\right)^{2n}$.

16) $u_n = \left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2}$, 17) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 18) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+\sin(n^2)}$.

19) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+e^{-n}}$, 20) $u_n = (-1)^n\dfrac{\log(n)}{n} + \dfrac{1}{n\log(n)}$.

Exercice 2. Donner la nature et calculer la somme des séries de terme général :

1) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, $n > 0$,
2) $u_n = \arctan\left(\dfrac{1}{1+n+n^2}\right)$, (Ind : $\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right), ab > -1$).

Exercice 3. Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n\log(n)}$.

1. $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?
2. Quelle est la nature de $\sum u_n$? Conclure.

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

1. Calculer u_0.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2n+1}$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n + u_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$
4. En déduire que : $\sum_0^n v_k = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}$
5. Montrer que la série de terme général v_n converge et calculer sa somme.