Université Mohamed Premier
Faculté Poluridisciplinaire -Naor
Département de Mathématiques

Série : 2

Année Universitaire 2019/2020
Filière SMPC, S_2
Module : M12 : Analyse : 2

Séries entières

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$
2. $\sum_{n} \frac{n!}{(2n)!} x^n$
3. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} x^n$
4. $\sum_{n} (\ln n) x^n$
5. $\sum_{n} \frac{\sqrt{n}}{2^n+1} x^{2n}$
6. $\sum_{n} \frac{(-1)^n}{1\times 3\times \cdots \times (2n-1)} x^n$

Exercice 2. Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
2. Etudier la convergence en R et en $-R$.

Exercice 3. Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n-1}{n!} x^n$
2. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+2}{n+1} x^n$
3. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$
4. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$

Exercice 4. Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et on s'intéresse à la série entière $\sum_{n\geqslant 1} S_n x^n$. On note R son rayon de convergence.

1. Démontrer que $R = 1$.
2. On pose, pour $x \in]-1,1[$, $F(x) = \sum_{n\geqslant 1} S_n x^n$. Montrer que

$$\forall x \in]-1,1[, (1-x)F(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$$

3. En déduire la valeur de $F(x)$ sur $]-1,1[$