Corrigé de la série 3

Exercice 1 :

1. On a $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$ on a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur $[0,\,1]$ définine par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, on sait que u_n converge alors vers $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

2. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} v_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} \\
&= \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} \\
&= [-\sqrt{4-x^2}]_0^1 \\
&= 2-\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} w_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \int_0^1 x\sin(x)dx \\
&= [-x\cos(x)]_0^1 + \int_0^1 \cos(x)dx \\
&= -\cos(1) + [\sin(x)]_0^1 \\
&= \sin(1) - \cos(1)
\end{aligned}$$

Exercice 2 :

1. On peut tout mettre au même dénominateur, et procéder par identification. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2} &= \frac{a(x+3)^2 + b(x-1)(x+3) + c(x-1)}{(x-1)(x+3)^2} \\
&= \frac{x^2(a+b) + x(6a+2b+c) + (9a-3b-c)}{(x-1)(x+3)^2}.
\end{aligned}$$

L'égalité demandée sera vérifiée dès que

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 5 \\ 6a+2b+c & = & 21 \\ 9a-3b-c & = & 22 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 5-b \\ -4b+c & = & -9 \\ -12b-c & = & -23 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 5-b \\ c & = & -9+4b \\ -16b & = & -32 \end{array}\right.$$

On trouve finalement comme unique solution $a=3$, $b=2$ et $c=-1$, de sorte que

$$f(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2}.$$

2. On intègre chacun des éléments simples de la décomposition précédente, en tenant compte du fait que l'on travaille sur l'intervalle $]1,+\infty[$. Les primitives de f sur cet intervalle sont donc les fonctions

$$F(x) = 3\ln(x-1) + 2\ln(x+3) + \frac{1}{x+3} + d.$$

La primitive qui s'annule en 2 et celle pour laquelle d vérifie l'équation

$$3\ln(1) + 2\ln 5 + \frac{1}{5} + d = 0.$$

La primitive de f sur l'intervalle $]1,+\infty[$ qui s'annule en 2 est donc la fonction F définie par

$$F(x) = 3\ln(x-1) + 2\ln(x+3) + \frac{1}{x+3} - 2\ln 5 - \frac{1}{5}.$$

Exercice 3 :

1. On commence par intégrer par parties pour obtenir

$$I = \left[-\frac{\ln(1+t)}{t}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)}dt = -\frac{\ln(3)}{2} + \ln(2) + \int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)}.$$

On calcule la dernière intégrale en réalisant une intégration par parties. Plus précisément, on remarque que

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

Ainsi il vient

$$\int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)} = [\ln(t) - \ln(t+1)]_1^2 = 2\ln(2) - \ln(3).$$

Finalement, on trouve

$$I = -\frac{3\ln(3)}{2} + 3\ln(2).$$

2. On intègre par parties, en posant $u'(x) = x$ et $v(x) = (\arctan x)^2$. On a $v'(x) = \frac{2\arctan(x)}{x^2+1}$, et ceci nous incite considérer comme primitive de u' la fonction $u(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)$, ce qui va simplifier les calculs. On obtient alors

$$J = \frac{1}{2}[(x^2+1)(\arctan x)^2]_0^1 - \int_0^1 \arctan x dx.$$

On calcule la dernière intégrale en réalisant nouveau une intégration par parties, et on trouve :

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi^2}{16} - [x\arctan x]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_0^1 \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

3. La fonction $f : x \mapsto \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}$ est continue sur $]0,1]$, et elle tend vers 0 en 0. On peut donc la prolonger par continuité à $[0,1]$ en posant $f(0) = 0$, ce qui donne un sens à K. Pour calculer cette intégrale, on va intégrer par parties entre $a > 0$ et 1, pour ne pas être gêné par les problèmes en 0. On pose donc $K(a) = \int_a^1 \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}$, puis :

$$\begin{aligned} u(x) &= (\ln x) & v'(x) &= \tfrac{x}{(x^2+1)^2} \\ u'(x) &= \tfrac{1}{x} & v(x) &= -\tfrac{1}{2(x^2+1)} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$K(a) = \left[-\frac{\ln x}{2(x^2+1)}\right]_a^1 + \frac{1}{2}\int_a^1 \frac{dx}{x(x^2+1)}.$$

De plus,

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

de sorte que

$$\int_a^1 \frac{dx}{x(x^2+1)} = \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_a^1 = -\frac{1}{2}\ln 2 - \ln(a) + \frac{1}{2}\ln(1+a^2).$$

On obtient donc que

$$K(a) = \frac{\ln a}{2(a^2+1)} - \frac{\ln 2}{4} - \frac{\ln a}{2} + \frac{1}{4}\ln(1+a^2).$$

Reste faire tendre a vers 0. Pour cela, on factorise par $\ln a$, et on trouve

$$K(a) = \frac{-a^2\ln(a)}{2(a^2+1)} - \frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{4}\ln(1+a^2).$$

Comme $a^2\ln(a)$ tend vers 0 lorsque a tend vers 0, de même que $\ln(1+a^2)$, on conclut finalement que

$$K = -\frac{\ln 2}{4}.$$

Exercice 4 :

1. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est une bijection de classe C^1 de $[1,4]$ sur $[1,2]$. On peut donc poser $u = \sqrt{t}$. Lorsque $t = 1$, $u = 1$ et lorsque $t = 4$, u vaut 2. De plus, on a
$$\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = \frac{1-u}{u}$$
et
$$u = \sqrt{t} \Rightarrow t = u^2 \Rightarrow dt = 2udu.$$
On en déduit que
$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{t} dt &= \int_1^2 \frac{1-u}{u} 2udu \\ &= \int_1^2 (2-2u)du \\ &= \left[2u - u^2\right]_1^2 \\ &= -1\end{aligned}$$

2. La fonction $x \mapsto e^x$ réalise une bijection de $[1,2]$ sur $[e, e^2]$. Effectuons le changement de variables $u = e^x$ dans l'intégrale, de sorte que $du = e^x dx$. Il vient
$$\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int_e^{e^2} \frac{du}{1+u} = [\ln|1+u|]_e^{e^2} = \ln\left(\frac{1+e^2}{1+e}\right).$$

3. La fonction $x \mapsto \ln x$ réalise une bijection de $[1, e]$ sur $[0,1]$. On pose donc $u = \ln x$ de sorte que $du = \frac{dx}{x}$. De plus, lorsque x vaut 1, u vaut 0 et lorsque x vaut e, u vaut 1. On trouve donc
$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx &= \int_0^1 u^n du \\ &= \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

4. On pose $t = \cos x$. Il vient $dt = -\sin x dx$ et donc
$$I = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{-dt}{t(\sqrt{2}t + 2 - 2t^2)}.$$
On décompose la fraction rationnelle en éléments simples en remarquant que
$$\frac{-1}{t(\sqrt{2}t+2-2t^2)} = \frac{1}{t(t-\sqrt{2})(2t+\sqrt{2})} = \frac{-1}{2t} + \frac{1}{6(t-\sqrt{2})} + \frac{2}{3(2t+\sqrt{2})}.$$
On en déduit
$$I = \left[-\frac{1}{2}\ln t + \frac{1}{6}\ln(\sqrt{2}-t) + \frac{1}{3}\ln(2t+\sqrt{2})\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1$$
(il faut prendre garde que $t - \sqrt{2}$ est négatif sur l'intervalle considéré). On trouve alors :
$$I = \frac{1}{6}\ln(\sqrt{2}-1) + \frac{1}{3}\ln(2+\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}) - \frac{1}{6}\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\ln(2\sqrt{2}).$$
Ceci peut encore se simplifier, mais c'est sans grand intérêt...

5. On pose $u = \tan(x/2)$, de sorte que $dx = \frac{2du}{1+u^2}$. L'intégrale devient

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\sin x} &= \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{2u}{1+u^2}} \times \frac{2du}{1+u^2} \\
&= \int_0^1 \frac{du}{u^2+u+1} \\
&= \int_0^1 \frac{du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^{1/2}+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Exercice 5 :

1. En effectuant le changement de variables $u = a+b-x$, on trouve donc

$$\begin{aligned}
\int_a^b xf(x)dx &= -\int_b^a (a+b-u)f(a+b-u)du \\
&= \int_a^b (a+b-u)f(u)du \\
&= (a+b)\int_a^b f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx.
\end{aligned}$$

   Ceci donne le résultat demandé.

2. Pour l'application, posons $a=0$, $b=\pi$ et $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$. Alors $f(\pi - x) = f(x)$ et donc, d'après le résultat précédent, on a

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

   On calcule cette intégrale en effectuant le changement de variables $u = \cos x$. En effet, la fonction $x \mapsto \cos x$ réalise une bijection de l'intervalle $[0,\pi]$ sur l'intervalle $[-1,1]$. De $du = -\sin x dx$, on déduit

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{-du}{1+u^2} \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 \frac{du}{1+u^2} \\
&= \frac{\pi}{2}(\arctan(1) - \arctan(-1)) \\
&= \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$