Série 3

Intégrales simples et primitives

Exercice 1 :

Calculer la limite des suites suivantes:

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ **2**. $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}$ **3**. $w_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \sin\left(\frac{k}{n}\right)$

Exercice 2 :

Soit $f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$, $x \in]1,+\infty[$.

1. Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$

2. En déduire la primitive de f sur $]1,+\infty[$ qui s'annule en 2.

Exercice 3 :

Par une intégration par parties calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt$ **2**. $J = \int_0^1 x(\arctan x)^2 dx$ **3**. $K = \int_0^1 \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx$

Exercice 4 :

En effectuant le changement de variable indiqué, calculer

1. $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt\ (u=\sqrt{t})$ **2**. $\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx\ (u=e^x)$ **3**. $\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx(u=\ln(x))$

4. $\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\sqrt{2}\cos x + 2\sin^2 x}dx\ (t=\cos(x))$ **5**. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\sin x}\ (u=\tan(x/2))$.

Exercice 5 :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in [a,b]$, on a $f(a+b-x) = f(x)$.

1. Montrer que $\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

2. En déduire la valeur de $I = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.