Corrigé de la série:2

Exercice 1. 1. Posons $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Alors $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$ et donc le rayon de convergence de cette série entière est égal à $R = 1$.

2. Posons $a_n = \frac{n!}{(2n)!}$. Alors $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4n+2} = 0$, alors le rayon de convergence est $R = +\infty$.

3. Posons $a_n = \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}}$. Alors $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4n+2} = 0$, alors le rayon de convergence est $R = +\infty$.

4. Posons $a_n = \ln(n)$. Alors $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1.$, alors le rayon de convergence est $R = 1$.

5. Posons $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n+1}x^{2n}$. Alors $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\frac{2^n+1}{2^{n+1}+1}x^2 = \frac{x^2}{2}$.
   - Si $|x| < \sqrt{2}$, alors $\frac{x^2}{2} < 1$, d'après la règle de d'Alembert la série entière converge.
   - Si $|x| > \sqrt{2}$, alors $\frac{x^2}{2} > 1$, d'après la règle de d'Alembert la série entière diverge.

   Alors $R = \sqrt{2}$.

6. Notans $a_n \frac{(-1)^n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}$. On a $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2n+1} = 0$. Donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Exercice 2. Soit $u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

1. Puisque $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim_{+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}}$, donc le rayon de convergence vaut 1.
2. Par croissance de la fonction sinus entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, la suite $\left(\sin(1/\sqrt{n})\right)$ est décroissante, et positive. D'après le critère des séries alternées, la série converge en -1. En, la série $\sum_n \sin(1/\sqrt{n})$ est divergente, par comparaison à la série de Riemann divergente $\sum_n 1/\sqrt{n}$ (on compare bien des séries à termes positifs).

Exercice 3. 1. $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n-1}{n!}x^n$.

Posons $u_n = \frac{n-1}{n!}$. On vérifie facilement que la suite (u_{n+1}/u_n) tend vers 0, et donc le rayon de convergence de la série entière est égal à $+\infty$. Pour déterminer sa somme, on écrit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{n-1}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x\cdot x^n}{n!} - e^x = (x-1)e^x$$

2. $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+2}{n+1}x^n$.

Posons $u_n = \frac{n+2}{n+1}$. Puisque $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$. On en déduit que le rayon de convergence de la série étudiée est égal à 1. Pour sommer la série entière, il suffit d'écrire $\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$. Ce qui donne

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+2}{n+1}x^n &= \sum_{n\geqslant 0}x^n + \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}x^n \\ &= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x}\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}.\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n$.
Comme pour la première série, la règle de d'Alembert montre facilement que le rayon de convergence de la série entière vaut $+\infty$. Ensuite,
$$(n+1)(n-2) = n^2 - n - 2 = n(n-1) - 2$$
On a donc
$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{n(n-1)}{n!}x^n - 2\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}x^n \\ &= \sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{(n-2)!}x^n - 2e^x \\ &= x^2\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}x^n - 2e^x = (x^2-2)e^x.\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}x^{2n}$.
Par la règle de d'Alembert, on prouve facilement que le rayon de convergence vaut $+\infty$. Pour identifier la somme, que nous noterons S , il faut "voir" que cette somme ressemble beaucoup à la fonction exponentielle, mais il faut l'évaluer en $-x^2/2$ pour voir apparaitre le $(-1)^n x^{2n}$ au numérateur et le 2^n au dénominateur. Au final (il faut aussi remarquer que la somme commence pour $n = 1$, on obtient $S(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}x^{2n} = 1 - \exp(-x^2/2)$.

Exercice 4. Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et on s'intéresse à la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} S_n x^n$. On note R son rayon de convergence.

1. On sait que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{n+1}$. Donc
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{(n+1)S_n} = 1$. Donc $R = 1$.
2. On développe et on fait un changement d'indices dans une des deux sommes :
$$\begin{aligned}(1-x)F(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^{n+1} \\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right)x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \\ &= -\ln(1-x).\end{aligned}$$
3. Ayant reconnu le développement en série entière de $-ln(1-x)$, on en déduit que $F(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.