Université Mohammed Premier
Faculté Pluridisciplinaire de Nador
Département de Mathématiques

Année 2019/2020
Filière SMPC
Analyse 2

Corrigé de la série 5

Exercice 1 :

1. On commence par résoudre l'équation homogène $y' + y = 0$ dont la solution générale est $y(x) = \lambda e^{-x}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^{-x}$. La méthode de variation de la constante donne :

$$\lambda'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x} \Rightarrow \lambda'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Une solution particulière est donc donn par $y(x) = \ln(1+e^x)e^{-x}$. Finalement, la solution générale de l'équation avec second membre est donnée par

$$x \mapsto \ln(1+e^x)e^{-x} + \lambda e^{-x}.$$

2. On commence par résoudre l'équation homogène $(1+x)y' + y = 0$, dont la solution générale est donnée par $y(x) = \frac{\lambda}{1+x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante, en posant $y(x) = \frac{\lambda(x)}{1+x}$. On obtient

$$\lambda'(x) = 1 + \ln(1+x).$$

Une primitive est donnée par $\lambda(x) = (1+x)\ln(1+x)$, et la solution générale de l'équation avec second membre est donc donnée par

$$x \mapsto \frac{\lambda}{1+x} + \ln(1+x).$$

3. On commence par rsoudre l'équation sans second membre $y' - \frac{y}{x} = 0$. L'ensemble des solutions de cette équation sont les fonctions $x \mapsto Cx$, $C \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)x$. Reportant dans l'équation différentielle, on trouve l'équation $\lambda'(x) = x$, ce qui donne $\lambda(x) = \frac{x^2}{2} + C$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc donné par les fonctions

$$x \mapsto Cx + \frac{x^3}{2}.$$

4. On commence par résoudre l'équation homogène $y' - 2xy = 0$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{x^2}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution particulière de l'équation en utilisant la méthode de variation de la

constante. On pose donc $y(x) = \lambda(x)e^{x^2}$ et introduisant y dans l'équation avec second membre, on trouve

$$\lambda'(x)e^{x^2} = (-2x+1)e^x \iff \lambda'(x) = (-2x+1)e^{-x^2+x}.$$

Une primitive est donnée par $\lambda(x) = e^{-x^2+x}$ et donc une solution particulière de l'équation avec second membre est donnée par

$$x \mapsto e^{-x^2+x}e^{x^2} = e^x.$$

Finalement, les solutions de l'équation sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{x^2} + e^x$.

5. On commence par résoudre l'équation homogène $y' - \frac{2}{t}y = 0$. On trouve que les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda t^2$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante en posant $y(t) = \lambda(t)t^2$. L'équation devient :

$$t^2 = y'(t) - \frac{2}{t}y(t) = \lambda'(t)t^2.$$

Dès lors, $\lambda'(t) = 1$ soit $\lambda(t) = t + C$. Finalement, les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation de départ sont les fonctions

$$t \mapsto t^3 + Ct^2.$$

Exercice 2 :

1. Il est clair que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, indépendamment de la valeur de C, et que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \pm\infty$ si $D \neq 0$, et $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ si $D = 0$. Ainsi, on a un prolongement continu en 0 si et seulement si $D = 0$. Dans ce cas, on a $f(0) = 0$.

2. On suppose donc que $D = 0$. La fonction f étant identiquement nulle à gauche de 0, elle est dérivable à gauche en 0 et sa dérivée est nulle. Pour $x > 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{C}{x}\exp(-1/x).$$

Posons $u = \frac{1}{x}$. Lorsque x tend vers 0^+, u tend vers $+\infty$ et

$$\frac{1}{x}\exp(-1/x) = u\exp(-u).$$

Par comparaison des fonctions polynomes et exponentielle, on en déduit que $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0^+, et donc f' est dérivable à droite en 0, de dérivée nulle. Ainsi, on a bien que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$. La continuité gauche de f' en 0 ne pose alors pas de problèmes. En ce qui concerne la dérivée à droite, on remarque que, pour $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{C}{x^2}\exp(-1/x) = Cu^2\exp(-u)$$

toujours avec le même changement de variables. Comme précédemment, on en tire que $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$, et donc que f' est continue en 0.

3. Sur l'intervalle $]0,+\infty[$, la fonction x^2 ne s'annule pas et l'équation est équivalente à
$$y' = \frac{1}{x^2}y.$$
Les solutions de cette équation sont les fonctions $y(x) = C\exp(-1/x)$, où $C \in \mathbb{R}$. La résolution sur l'intervalle $]-\infty,0[$ donne exactement le même ensemble de solutions.

4. Soit y une solution sur $\mathbb{R}$. Sa restriction $]0,+\infty[$ est solution sur $]0,+\infty[$, et donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x > 0$, $y(x) = C\exp(-1/x)$. La restriction de y $]-\infty,0[$ est aussi solution sur $]-\infty,0[$, et donc il existe une constante $D \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x < 0$, $y(x) = D\exp(-1/x)$. Remarquons ici que C et D n'ont aucune raison d'être égaux. En effet, les résolutions sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ se font totalement indépendamment. D'ailleurs, le résultat des premières questions entraîne que, pour que y soit continue en 0, il est nécessaire que $D = 0$. Dans ce cas, la fonction y est de classe C^1, et elle vérifie bien l'équation diffrentielle : c'est clair pour $x \neq 0$, et c'est aussi vrai en 0 par continuité de y et y' en 0.

Exercice 3 :

1. On commence par résoudre l'équation homogène $y'' - 4y' + 3y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 3 = 0$, dont les racines sont 1 et 3. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x}$. Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = (ax+b)e^{-x}$. En dérivant, on trouve
$$y'(x) = (-ax + (-b+a))e^{-x},\ y''(x) = (ax + (b-2a))e^{-x}$$
et donc a et b sont solutions du système :
$$\begin{cases} 8a &= 2 \\ 8b - 6a &= 1 \end{cases}$$
On résoud ce système, et on trouve qu'une solution particulière est donnée par $y_0(x) = \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right)e^{-x}$. Finalement, les solutions de l'équation avec second membre sont les fonctions de la forme
$$x \mapsto \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right)e^{-x} + \lambda e^x + \mu e^{3x},\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation homogène $y'' + 9y = 0$ admet pour équation caractéristique associée $r^2 + 9 = 0$, dont les racines sont $3i$ et $-3i$. Les solutions relles de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto \cos(3x)$ et $t \mapsto \sin(3x)$. On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1, et on trouve $x \mapsto \frac{x+1}{9}$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme
$$x \mapsto A\cos(3x) + B\sin(3x) + \frac{x+1}{9}.$$
La condition $y(0) = 0$ entraîne $A = -1/9$.

3. L'équation caractéristique est $r^2-2r+1=0$ dont 1 est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme

$$x\mapsto (A+Bx)e^x,\ \ A,B\in\mathbb{R}.$$

Pour rsoudre l'équation avec second membre, on linéarise $\sin^2 x=\frac{1-\cos(2x)}{2}$. Par le principe de superposition des solutions, on cherche d'abord une solution particulière qui correspond 1/2. La fonction constante égale 1/2 convient. On cherche ensuite une solution particulière convenant $\cos(2x)$ (il suffira ensuite de multiplier par $-1/2$ pour trouver une solution convenant $-\cos(2x)/2$). On cherche cette solution particulière sous la forme $y(x)=c\cos(2x)+d\sin(2x)$. On a alors

$$y''(x)-2y'(x)+y(x)=(-3c-4d)\cos(2x)+(4c-3d)\sin(2x).$$

On cherche donc c et d solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcl}-3c-4d&=&1\\4c-3d&=&0\end{array}\right.$$

On trouve $c=-3/25$ et $d=-4/25$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions

$$x\mapsto (A+Bx)e^x+\frac{1}{2}+\frac{3}{50}\cos(2x)+\frac{2}{25}\sin(2x),\ \ A,B\in\mathbb{R}.$$

Exercice 4 :

On résoud d'abord l'équation homogène sans second membre $y''+4y=0$. On peut introduire l'équation caractéristique $r^2+4=0$. les fonctions $y_1:t\mapsto\sin(2t)$ et $y_2:t\mapsto\cos(2t)$ sont solutions. Pour déterminer une solution de l'équation avec second membre, on applique la méthode de variation de la constante en cherchant une solution qui s'écrit : $y(t)=\lambda_1(t)y_1(t)+\lambda_2(t)y_2(t)$. Attention, puisqu'ici on a affaire une équation du second degré, les fonctions dérivées λ_1' et λ_2' doivent vérifier le système

$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1'(t)y_1(t)+\lambda_2'(t)y_2(t)&=&0\\\lambda_1'(t)y_1'(t)+\lambda_2'(t)y_2'(t)&=&\tan(t)\end{array}\right.$$

(si cela n'est pas clair, consultez d'urgence votre cours!). On remplace y_1 et y_2 par leurs valeurs respectives, et on trouve le système

$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1'(t)\sin(2t)+\lambda_2'(t)\cos(2t)&=&0\\\lambda_1'(t)\cos(2t)-\lambda_2'(t)\sin(2t)&=&\frac{1}{2}\tan(t).\end{array}\right.$$

Il vient

$$\lambda_1'(t)=\frac{1}{2}\cos(2t)\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{1}{2}\sin(2t)+\frac{1}{2}\frac{-\sin(t)}{\cos(t)}$$

en utilisant $\cos(2t)=2\cos^2(t)-1$. La dernière partie du membre de droite est de la forme u'/u. On peut intégrer et on trouve, à une constante près,

$$\lambda_1(t)=-\frac{1}{4}\cos(2t)+\frac{1}{2}\ln(\cos t).$$

De même, on trouve

$$\lambda_2'(t) = -\sin^2(t) = -\frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$$

soit

$$\lambda_2(t) = -\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t).$$

Les solutions donc sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\sin(2t) + B\cos(2t) + 1/2\sin(2t)\ln(\cos(t)) - t/2\cos(2t)$ où $A, B \in \mathbb{R}$.