Module: Analyse 2

Pr. Hamid Boua

Université Mohammed premier

Faculté Pluridisciplinaire, Nador

SMPC

S2

Table des matières

CHAPITRE 1

Séries numériques

Le but est de donner un sens précis à une somme infinie de termes.

1.1 Séries numériques

1.1.1 Définition d'une série numérique

Définition 1.1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On appelle série numérique de terme général u_n, la suite S_n définie par $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On note cette série $\sum u_n$. Le terme S_n est appelé somme partielle d'indice n de cette série.*

Exemples 1.2.

1. ***La série arithmétique*** *$\sum n$ est la série des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.*
2. ***La série géométrique*** *$\sum q^n$ est la série des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$ et $S_n = n+1$ si $q = 1$.*
3. ***La série harmonique*** *$\sum \dfrac{1}{n}$ est la série des sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.*
4. ***La série harmonique alternée*** *$\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est la série des sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}$.*
5. ***La série téléscopique*** *$\sum (a_{n+1} - a_n)$ est la série des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$.*

1.1.2 Convergence d'une série numérique

Définition 1.3. *1. La série $\sum u_n$ est dite convergente si la suite S_n a une limite finie quand $n \mapsto +\infty$. Dans ce cas $S = \lim_{n \mapsto +\infty} S_n$ est appelée la somme de la série, on la note par $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. On dit aussi que la série $\sum u_n$ converge et sa somme est S.*

2. La série $\sum u_n$ est dite divergente si la suite S_n n'a pas de limite finie (c'est-à dire S_n n'a pas de limite, ou bien admet une limite infinie)

Exemples 1.4. *1. Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$, $n \geq 2$. On a :*

$$\forall n \geq 2,\ \tfrac{1}{n(n-1)} = \tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n}$$

Alors $S_n = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} (\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k-1}) = 1 - \dfrac{1}{n}$, donc $\lim_{n \mapsto +\infty} S_n = 1$.
D'où la série $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n-1)} = 1$.

2. La série arithmétique $\sum n$ est divergente car $\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$.

3. Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$. On a :
$S_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1 - (\frac{1}{3})^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$.
$S_n = \dfrac{3}{2}(1 - \dfrac{1}{3^{n+1}})$, donc $\lim_{n \mapsto +\infty} S_n = \dfrac{3}{2}$.
Donc la série $\sum \frac{1}{3^n}$ est convergente de somme $\dfrac{3}{2}$.

Cas particuliers

1. **Série téléscopique.** Soit $\sum u_n$ une série telle que $u_n = a_n - a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\text{la série } \sum u_n \text{ converge} \iff \text{la suite } a_n \text{ converge.}$$

Dans ce cas, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = a_0 - \lim_{n \to \infty} a_n$.

En effet $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = a_0 - a_1 + a_1 - a_2 + ... + a_{n_1} - a_n + a_n - a_{n+1}$, implique que $S_n = a_0 - a_{n+1}$ d'où la série $\sum u_n$ converge $\iff$ la suite S_n admet une limite finie $\iff$ la suite a_n admet une limite finie.

2. **Série géométrique.** Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}$. On appelle série géométrique de premier terme a et de raison q, la série $q^n a$, c-à-d, la série : $a+qa+q^2a+...+q^na+...$
La série $\sum q^n a$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n a = \frac{a}{1-q}$
donc $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ si $|q| < 1$.
En effet : $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k a = a + qa + q^2a + ... + q^n a = a(1 + q + q^2 + ... + q^n)$
Si $q = 1$ on a $S_n = (n + 1)a$ donc la série diverge.
Si $q \neq 1$ on a $S_n = a\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
Si $|q| < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$.
Si $q > 1$ $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = +\infty$ donc S_n diverge d'où $\sum u_n$ diverge.
Si $q \leq -1$ alors S_n n'a pas de limite quand $n \to +\infty$, donc la série $\sum q^n a$ diverge.

Définition 1.5. *Déterminer la nature d'une série c'est déterminer si elle est convergente ou divergente*

Définition 1.6. *(Série définie à partir d'un certain rang) Soit $(u_n)_{n\geq p}$ une suite définie à partir de p. On pose $S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k$. On dit que la série $\sum_{n\geq p} u_n$ converge si et seulement si la suite S_n admet une limite finie.*

Définition 1.7. *Soit $\sum u_n$ une série qui converge, et soit S sa somme. On pose $R_n = S - S_n$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et on la note par $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. R_n est appelée le reste d'indice n de la série $\sum u_n$. On a $\lim_{n\mapsto+\infty} R_n = 0$*

Remarque 1.8. *On ne peut introduire le reste d'une série qu'après avoir justifié sa convergence.*

Proposition 1.9. *Si la série $\sum u_n$ converge alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k =$. De plus $\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = 0$.*

Proposition 1.10. *Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = 0$.*

Preuve. *On a $u_n = S_n - S_{n-1}$ et $\lim_{n\mapsto+\infty} S_n = S$ donc*

$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim_{n\mapsto+\infty} S_n - \lim_{n\mapsto+\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Remarque 1.11. *La réciproque est fausse : La série harmonique* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge malgré que* $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

En effet : On pose $v_n = \dfrac{1}{n}$ *et* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n}$.

$S_{2n} - S_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n} \geq \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n} + ... + \dfrac{1}{2n} = \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$

Donc $S_{2n} - S_n \geq \dfrac{1}{2}$, *d'où la suite* S_n *ne peut pas converge sinon on obtient* $0 \geq \dfrac{1}{2}$ *ce qui est absurde. Donc la série* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge.*

Définition 1.12. *Par contraposée, si* $(u_n)_n$ *ne tend pas vers* 0, *alors la série* $\sum u_n$ *diverge. On dit que* $\sum u_n$ *diverge grossièrement.*

Exemples 1.13.

1. *La série* $\sum \cos(n)$ *diverge grossièrement car la suite* $(\cos(n))_n$ *ne tend pas vers* 0.
2. *La série harmonique diverge mais pas grossièrement.*
3. *La série* $\sum 2^n$ *diverge grossièrement car la suite* $(2^n)_n$ *tend vers* $+\infty$.

1.1.3 Opérations sur les séries convergentes

Théorème 1.14. *Si les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent et leurs sommes* S *et* S', *alors on :*

1. *La série* $\sum (u_n + v_n)$ *converge et sa somme est* $S + S'$.
2. *La série* $\sum (\lambda u_n)$ *converge et sa somme est* λS, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve. *a)* $u_0+v_0+u_1+v_1+...+u_n+v_n = u_0+u_1+...+u_n+v_0+v_1+...+v_n = S_n+S'_n \to S+S'$ *qd* $n \to +\infty$.

b)$\lambda u_0 + \lambda u_1 + ... + \lambda u_n = \lambda(u_0 + u_1 + ... + u_n) = \lambda S_n \to \lambda S$ *qd* $n \to +\infty$.

Exemple 1.15.

1. *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum (u_n + v_n)$ *convergent alors* $\sum v_n$ *converge.*
2. *Si* $\sum u_n$ *converge et* $\sum v_n$ *diverge, alors* $\sum (u_n + v_n)$ *diverge.*

Remarque 1.16. *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *divergent, on ne peut rien dire sur la nature de* $\sum (u_n + v_n)$.

Proposition 1.17. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite réelle positive. Si* $\sum u_n$ *converge alors* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \geq 0$.

Corollaire 1.18. *Soient* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites réelles vérifiant pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

Si $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent, alors* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

$\boxed{\mathit{1.2}}$ Convergence par comparaison à une série positive

1.2.1 Séries à termes positifs

Définition 1.19. *Une série u_n est dite à termes positifs si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 0$.*

Proposition 1.20. *Pour qu'une série $\sum u_n$ à termes positifs converge, il faut et il suffit que sa somme partielle S_n soit majorée.*

Preuve. *On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, on a $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n$ car $u_{n+1} \geq 0$ donc $S_{n+1} \geq S_n$. La suite S_n est alors croissante, donc pour qu'elle admet une limite finie il faut et il suffit qu'elle soit majorée.*

1.2.2 Comparaison de séries à termes positifs

Définition 1.21. *(Critère de comparaison des séries)*
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, tel que $0 \leq u_n \leq v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, alors on a

1. *Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge,*
2. *Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.*

Preuve. *1) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.*
$0 \leq u_k \leq v_k$ *donc* $0 \leq S_n \leq S'_n$
$\sum v_n$ converge implique que la suite S'_n converge donc S'_n est majorée, or $S_n \leq S'_n$ donc S_n est majorée, ce qui donne S_n converge ce qui implique que la série $\sum u_n$ converge.
2) est simplement la contraposée de (1)

Exemple 1.22. *1) $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$, donc la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car la série $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ est converge.*

2) $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

Remarque 1.23. *Le résultat reste vrai si la comparaison ne vaut qu'à partir d'un certain rang.*

Proposition 1.24. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs avec $u_n \sim v_n$ quand $n \mapsto +\infty$, alors on a :*

$$\sum u_n \text{ est convergente} \Longleftrightarrow \sum v_n \text{ est convergente.}$$

Preuve. *Puisque* $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, *alors* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que si* $n \geq n_0$ *on a* $\mid \dfrac{u_n}{v_n} - 1 \mid < \dfrac{1}{2}$ *donc* $\dfrac{1}{2} < \dfrac{u_n}{v_n} < \dfrac{3}{2}$, $\forall n \geq n_0$, $\Longrightarrow \forall n \geq n_0 : \frac{1}{2}v_n < u_n < \frac{3}{2}$.

- *Si* $\sum u_n$ *convergente alors* $\sum \dfrac{1}{2}v_n$ *convergente, d'où* $\sum v_n$ *convergente.*
- *Réciproquement, si* $\sum v_n$ *convergente alors* $\sum \dfrac{3}{2}u_n$ *convergente donc* $\sum u_n$ *convergente.*

Exemples 1.25. *1.* $\sum \dfrac{1}{n^2+n}$ *converge car* $\frac{1}{n^2+n} \sim \frac{1}{n^2}$ *et* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *converge .*

2. $\sum \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$ *diverge car* $\frac{1}{n+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$ *et* $\sum \dfrac{1}{n}$ *diverge .*

Proposition 1.26. *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes* ***positifs****.*

1. *Si* $u_n = O(v_n)$ *quand* $n \mapsto +\infty$, *alors* $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow \sum u_n$ *converge.*
2. *Si* $u_n = \circ(v_n)$ *quand* $n \mapsto +\infty$, *alors* $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow \sum u_n$ *converge.*

Preuve.
1. *Si* $u_n = O(v_n)$ *quand* $n \mapsto +\infty$, *alors la suite* $(\frac{u_n}{v_n})_n$ *est bornée, donc* $\exists M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que si* $n \geq n_0$ *on a* $0 \leq \dfrac{u_n}{v_n} \leq M$, *alors* $\forall n \geq n_0$, $\Longrightarrow \forall n \geq n_0 :$ $0 \leq u_n \leq M v_n$.
   Si $\sum v_n$ *converge alors* $\sum M v_n$ *converge, d'où* $\sum u_n$ *converge.*
2. *si* $u_n = \circ(v_n)$, *alors* $u_n = O(v_n)$, *donc si* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge.*

Exemples 1.27. *1.* $\sum \dfrac{\sin(n)}{n^2}$ *converge car* $\frac{\sin(n)}{n^2} = O(\frac{1}{n^2})$ *et* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *converge .*

2. $\sum \dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^3}$ *converge car* $\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^3} = \circ(\frac{1}{n^2})$ *et* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *converge.*

Exemples 1.28. *La proposition précédente est fausse sans l'hypothèse positifs.*

1.2.3 Séries et règles de référence

a) Série de Riemann

Proposition 1.29. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$, *la série* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *converge si* $\alpha > 1$ *et diverge si* $\alpha \leq 1$.

Exemples 1.30. *1.* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *converge car* $2 > 1$.

2. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ *converge car* $\frac{1}{2} < 1$.

3. $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ *converge car* $\frac{3}{2} > 1$.

b) Critère de d'Alembert

Proposition 1.31. *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs telle que* $\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

1. *Si* $l < 1$ *: la série* $\sum u_n$ *converge ;*
2. *Si* $l > 1$ *: la série* $\sum u_n$ *diverge.*

△ Si $l = 1$, ce critère ne donne rien.

Exemple 1.32. *a)* $u_n = \frac{n^n}{n!}$ *on a* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = (\frac{n+1}{n})^n = e^{n\log(1+\frac{1}{n})}$.
$\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e > 1$ *d'où* $\sum u_n$ *diverge.*
b) $u_n = \frac{b^n}{n!}$ *avec* $b > 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{b}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$ *donc* $\sum u_n$ *converge.*

c) Critère de Cauchy

Proposition 1.33. *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs telle que* $\lim_{n \mapsto +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ *alors :*

1. *Si* $l < 1$ *: la série* $\sum u_n$ *converge.*
2. *Si* $l > 1$ *: la série* $\sum u_n$ *diverge.*
3. *Si* $l = 1$ *: ce critère ne donne rien.*

Exemple 1.34. *Pour* $a > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *on pose* $u_n = (a + \frac{1}{n})^n$. *Trouver la nature de la série* $\sum u_n$.
• *On a* $\sqrt[n]{u_n} = a + \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \mapsto +\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$.
⋆ *Si* $a > 1$ *alors* $\sum u_n$ *diverge.*
⋆ *Si* $a < 1$ *alors* $\sum u_n$ *converge.*
⋆ *Si* $a = 1$ *alors* $u_n = (a + \frac{1}{n})^n = e^{n\log(1+\frac{1}{n})}$, $\lim_{n \mapsto +\infty} u_n = e \neq 0$ *donc* $\sum u_n$ *diverge.*

1.3 Série à termes réels

1.3.1 Convergence absolue

Définition 1.35. *La série* $\sum u_n$ *est dite absolument convergente si la série* $\sum |u_n|$ *est convergente.*

Exemples 1.36. *1. La série* $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ *converge absolument.*

2. La série $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$ *converge absolument.*

3. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *ne converge pas absolument.*

Théorème 1.37. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite réelle.*
Si la série $\sum u_n$ *est absolument convergente alors celle-ci converge et on a :*

$$|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Remarque 1.38. *i) La réciproque de la proposition précédente est fausse.*
ii) Ce résulat, permet parfois de ramener le problème à l'étude de série à termes positifs.

Exemple 1.39. *a) Soit* $u_n = \frac{(-1)^n}{n^4}$ *on a* $|u_n| = \frac{1}{n^4}$*, la série* $\sum \frac{1}{n^4}$ *converge, donc la série* $\sum u_n$ *absolument convergente donc converge.*
b) Soit $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *on a* $|v_n| = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$*. La série* $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ *diverge, donc la série* $\sum v_n$ *n'est pas absolument convergente.*

1.3.2 Séries altérnées

Définition 1.40. *La série* $\sum u_n$ *est dite altermée si on a :*

$$u_n = (-1)^n a_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ avec } a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$$

ou bien si on a :

$$u_n = (-1)^{n+1} a_n \text{ avec } a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Théorème 1.41. *Ctitère de Leibniz*
Soit $\sum(-1)^n u_n$ *une série alternée avec* $u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$*. Si la suite* u_n *est décroissante et si* $\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = 0$*, alors la série* $\sum(-1)^n u_n$ *est convergente et on a* $|R_n| \leq u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *où* $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$

Exemple 1.42. *Etudier la série* $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
C'est une série alternée, on a $\frac{1}{\sqrt{n}}$ *est décroissante et* $\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ *donc par le Théorème de Leibniz, la série* $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *est convergente.*

Définition 1.43. *Une série qui converge sans être absolument convergente est dite semi-convergente.*

Exemple 1.44. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *est semi-convergente.*

1.3.3 Exploitation d'un développement asymptotique à deux termes

Exemple 1.45. *Déterminons la nature de la série* $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$.
La série est altérnée, mais son terme ne décroît pas en valeur absolue.
Au voisinage de 0*, on a*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \circ(x)$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}} &= \frac{(-1)^n}{n} . \frac{1}{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}} \\ &= \frac{(-1)^n}{n}(1 - \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \circ(\frac{1}{n})) \\ &= \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} + \circ(\frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

Puisque les séries $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *et* $\sum \frac{1}{n^2}$ *comvergent, alors la série* $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$ *converge.*

Exemple 1.46. *Déterminons la nature de la série* $\sum \ln(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}})$.
Au voisinage de 0*, on a*

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *on a*

$$\ln(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}) = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \circ(\frac{1}{n})$$

Alors $\ln(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}) - \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \sim -\frac{1}{2n}$. *Donc* $\sum \left(\ln(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}) - \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$ *diverge et puisque la série* $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *comverge, alors la série* $\sum \ln(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}})$ *diverge.*

CHAPITRE 2

Séries entières

2.1 Définition d'une série entière

Définition 2.1. *On appelle série entière toute série dont le terme général est de la forme $a_n x^n$, où $(a_n)_n$ désigne une suite réelle et $x \in \mathbb{R}$. Une série entière est notée $\sum a_n x^n$. L'ensemble :* $\Delta = \{x \in \mathbb{R} : \sum a_n x^n \text{converge}\}$ *est appelé domaine de convergence de la série entière* $\sum a_n x^n$.

Exemples 2.2.

1. $\sum \dfrac{x^n}{n!}$

   Posons $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$ *et appliquons le critère de d'Alembert,* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{x}{n+1}\right| = 0 < 1$. *La série entière* $\sum \frac{x^n}{n!}$ *est absolument convergente pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *; donc* $\Delta = \mathbb{R}$.

2. $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$

   Soit $u_n = \dfrac{x^n}{n^2}$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{n^2}{(n+1)^2}x\right| = |x|$.

   • *Si* $|x| < 1$, *la série est absolument convergente et si* $|x| > 1$ *la série diverge.*

   • *Etudions le cas où* $|x| = 1$. *on a* $|u_n| = \dfrac{|x|^n}{n^2} = \dfrac{1}{n^2}$. *Donc la série* $\sum \frac{x^n}{n^2}$ *est alors absolument convergente dans* $[-1, 1]$ *; d'où* $\Delta = [-1, 1]$.

3. $\sum n! x^n$

   Posons $u_n = n! x^n$ *et appliquons le critère de d'Alembert,*
   $$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} |(n+1)x| = \begin{cases} +\infty, & si\ x \neq 0; \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$$
   La série entière $\sum n! x^n$ *est convergente si et seulement si* $x = 0$ *; donc* $\Delta = \{0\}$.

4. $\sum \dfrac{x^n}{n}$

Soit $u_n = \dfrac{x^n}{n}$*, on a* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{n}{n+1}x\right| = |x|$.

. • *Si* $|x| < 1$*, la série est absolument convergente et si* $|x| > 1$ *la série diverge.*

• *Etudions le cas où* $|x| = 1$.

$*$ *Si* $x = 1$ *: c'est la série harmonique* $\sum \dfrac{1}{n}$*, elle est divergente.*

$*$ *Si* $x = -1$ *: c'est la série harmonique alternée* $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$*, elle est convergente.*

D'où : $\Delta = [-1, 1[$.

Lemme 2.3. ***Lemme d'Abel***
Soit $\sum a_n x^n$ *une série entière. On suppose quŠil existe* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que la suite* $(a_n x_0^n)_n$ *soit bornée, alors La série* $\sum a_n x^n$ *est absolument convergente pour* $|x| < |x_0|$.

Preuve. *La suite* $(a_n x_0^n)_n$ *est bornée, il existe* $M > 0$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N} |a_n x_0^n| \leq M$.
Pour $|x| < |x_0|$, $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$.
La série $\sum \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$ *est une série géométrique de raison* $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$*, donc convergente. D'après le théorème de comparaison, la série* $\sum |a_n x^n|$ *est convergente et par conséquent la série* $\sum a_n x^n$ *converge absolument pour* $|x| < |x_0|$.

2.2 Rayon de convergence d'une série entière

Pour les séries entières, la notion de convergence prend une forme assez simple.

Théorème 2.4. *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière, alors il existe un unique nombre réel* $R \geq 0$ *(éventuellement infini) tel que :*

1. $\sum a_n x^n$ *converge absolument dans* $]-R, R[$
2. $\sum a_n x^n$ *diverge si* $|x| > R$.

Définition 2.5. *Le nombre* R *est appelé rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n x^n$.

Remarque 2.6. *Le rayon de convergence d'une série* $\sum a_n x^n$ *est caractérisé par :*

1. *Si* $|x| < R$*, alors* $\sum a_n x^n$ *est absolument convergente.*
2. *Si* $|x| > R$*, alors* $\sum a_n x^n$ *diverge.*
3. $|x| = R$ *est le cas douteux où on ne peut rien dire sur la nature de la série.*

2.2.1 Détermination du rayon de convergence

Lemme 2.7. ***Lemme d'Hadamard***
Soit $\sum a_n x^n$ *une série entière. On suppose que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
Le rayon de convergence R est donné par la relation : $R = \frac{1}{l}$

Preuve. 1. *Posons* $l = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$*ů En utilisant le critère de d'Alembert on a :*
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l|x|$*ů Ceci implique :*
a) $(l|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{l}) \Rightarrow$ *la série est absolument convergente.*
b) $(l|x| > 1 \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{l}) \Rightarrow$ *la série est divergente. D'après la remarque précédente,* $R = \frac{1}{l}$

2. *Posons* $l = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. *En utilisant le critère de Cauchy :*
$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = l|x|$ *puis on adopte le même raisonnement que précédemment, on aboutit à la même conclusion ;* $R = \frac{1}{l}$.

Exemples 2.8. 1. $\sum \frac{x^n}{n!}$
On a $a_n = \frac{1}{n!}$, *utilisons le critère de D'Alembert :* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$, *donc le rayon de convergence est* $R = +\infty$. *La série est absolument convergente pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

2. $\sum \frac{x^n}{n^2}$
On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{(n+1)}\right)^2 = 1$, *donc le rayon de convergence est* $R = 1$.
La série est absolument convergente pour tout $|x| < 1$ *et divergente si* $|x| > 1$.

3. $\sum \frac{x^n}{2^n}$
Le critère de Cauchy donne :
$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}$, *donc le rayon de convergence est* $R = 2$. *La série est absolument convergente pour tout* $|x| < 1$ *et divergente si* $|x| > 1$. *La série est absolument convergente pour tout* $|x| < 2$ *et divergente si* $|x| > 2$.

4. $\sum 3^n x^{2n+5}$
On a $l = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}x^{2n+7}}{3^n x^{2n+5}} = 3|x|^2$
La série converge si $3|x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$, *d'où le rayon de convergence est* $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
La série est absolument convergente pour tout $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ *et divergente si* $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\boxed{2.3}$ Propriétés

Ce paragraphe étudie les propriétés de continuité, de dérivabilité et d'intégrabilité de la fonction somme des séries entières.

2.3.1 Continuité d'une série entière

Proposition 2.9. *est alors continue.*

2.3.2 Dérivée d'une série entière

Proposition 2.10. *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* R *et soit* $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$*. Alors* f *est dérivable et on a* $f'(x) =_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$*.*

Exemple 2.11. *On sait que la série entière* $\sum x^n$ *est de rayon de convergence* 1*.*
De plus pour tout $x \in]-1, 1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$*, donc d'après la proposition précédente* $\forall x \in]-1, 1[$, $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$,

Corollaire 2.12. *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* R *et soit* $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$*. Alors* f *est indéfiniment dérivable (*f *est de classe* $C^\infty(]-R, R[)$*), et l'on a :* $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$*.*

Preuve. *En effet, si* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *par application de la proposition précédente on a* $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$*, et par récurrence, la dérivée d'ordre* k *est donnée par la relation :* $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)(n-2)...(n-k+1) a_n x^{n-k}$*.*
De cette expression, il résulte que $f^{(k)}(0) = a_k k!$*, c'est-à-dire que* $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$*.*

2.3.3 Primitive d'une série entière

Proposition 2.13. *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* R *et soit* $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$*. On considère la fonction* F *:*

$]-R,R[\to \mathbb{R}$ *définie par* $F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$. *Alors* $F'(x)=f(x)$ *pour tout* $x\in]-R,R[$.

Preuve. *Le rayon de convergence de la série entière* $\sum \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ *est* R *car* $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{n+2}\frac{n+1}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}$. *D'après le théorème précédent on conclut que* $F'=f$.

Remarque 2.14. *Si* $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, *avec* $a_n\in\mathbb{R}$ *et* $x\in]-R,R[$, *alors* $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n\right)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\int_0^x t^ndt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n$ *pour tout* $x\in]-R,R[$.

Exemple 2.15. *On sait que la série entière* $\sum x^n$ *est de rayon de convergence* 1 *et* $\forall x\in]-1,1[$, $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ $(\star)$.

- *En remplaçant* x *par* $-x$ *dans* $(\star)$, *on obtient* $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n(\star\star)$ *et d'après la proposition précédente* $\forall x\in]-1,1[$, $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.

• • *En remplaçant* x *par* x^2 *dans* $(\star\star)$, *on obtient* $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^{2n}$ *et d'après la proposition précédente* $\forall x\in]-1,1[$, $\arctan(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.

2.4 Fonctions développable en série entière

Théorème 2.16.

1. $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$
2. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\cos(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$
3. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
4. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\cosh(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$
5. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sinh(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
6. $\forall x\in]-1,1[$, $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$

7. $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$

8. $\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

9. $\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$

10. $\forall x \in]-1,1[,\ \arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

11. $\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

Exemple 2.17. 1. *Calculons la somme* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n-1}{n!}x^n$.

Posons $u_n = \frac{n-1}{n!}$. *On vérifie facilement que la suite* $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ *tend vers* 0, *et donc le rayon de convergence de la série entière est égal à* $+\infty$. *Pour déterminer sa somme, on écrit que pour tout* $x \in \mathbb{R}$,
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n-1}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = (x-1)e^x.$

2. *Calculons la somme* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+2}{n+1}x^n$.

Posons $u_n = \frac{n+2}{n+1}$. *On vérifie facilement que la suite* $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ *tend vers* 1, *on en déduit que le rayon de convergence de la série étudiée est égal à* 1. *Pour sommer la série entière, il suffit d'écrire* $\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$, *ce qui donne* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+2}{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}.$

3. *Calculons la somme* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$.

Posons $a_n = \frac{x^{2n}}{2n+1}$. *On a* $a_{n+1}/a_n \to x^2$. *Ainsi, si* $|x| < 1$ *la série est convergente et si* $|x| > 1$, *la série est divergente. Autrement dit, on a prouvé que le rayon de convergence est égal à* 1. *Posons, pour* $\in]-1,1[$, $S(x)$ *la somme de la série entière. Alors* S *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et* $(xS)'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}$.
Par intégration, on en déduit que pour tout $]-1,1[$, *on a* $xS(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ *et donc, pour* $x \neq 0$, $S(x) = \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. *De plus,* $S(0) = 1$.

4. *Trouver le rayon de convergence* R, *puis calculer pour tout* $x \in]-R,R[$, *la somme* $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$.

Le rayon de convergence est égal à $+\infty$.
Lorsque $x \geq 0$, *alors* $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \cosh(\sqrt{x})$.
Lorsque $x \leq 0$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{-x})$.

CHAPITRE 3

Intégrales simples et primitives

3.1 Intégrales et Sommes de Riemann

Définition 3.1. *On appelle subdivision d'ordre n de l'intervalle $[a,b]$ toute partie finie, $\sigma = \{x_0, x_1, ...x_n\}$ de $[a,b]$ telle que $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.*

○ *On note $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ un intervalle de la subdivision et $l_k = x_{k+1} - x_k$ sa longueur.*

○ *Le nombre $\Pi_\sigma = \max\limits_{0 \leq k \leq n-1} l_k$ est dit pas de la subdivision.*

Exemple 3.2. *La subdivision équidistante d'ordre n est la subdivision obtenue en découpant l'intervalle $[a,b]$ en n intervalle de même longeur : $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ avec $k = 0, ..., n$, $l_k = \dfrac{b-a}{n}$ et $\Pi_\sigma = \dfrac{b-a}{n}$*

Définition 3.3. *Soit f une fonction définie sur un segment $[a,b]$, soit $\sigma = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ une subdivision de $[a,b]$, et soit $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des réels tels que, pour chaque i, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. On appelle somme de Riemann de f associée à σ et aux ξ_i la somme définie par :*

$$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$

Théorème 3.4. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, la somme de Riemann $S(f, \sigma, \xi)$ tend vers une limite finie, cette limite est noté par $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et est appelée l'intégrale de f sur $[a,b]$.*

Remarque 3.5. *Géométriquement, les sommes de Riemann peuvent être vues comme une valeur approchée de l'intégrale de f par la méthode des rectangles. Le théorème suivant explicite qu'elles approchent effectivement l'intégrale de f.*

Précisément, l'écart entre $\int_a^b f(t)dt$ et $S(f,\sigma,\xi)$ peut être majoré par une quantité ne dépendant que du pas de la subdivision, quantité qui tend vers 0 lorsque le pas tend vers 0.
Le plus souvent, ce théorème est appliquée lorsque la subdivision est régulière, et lorsque les ξ_i sont égaux à x_i ou x_{i-1}. On a donc le corollaire suivant :

Corollaire 3.6. *Soit Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$$

Exemple 3.7. *Soit $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.*
$u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n(1+\frac{k}{n})} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$
Soit $f(x) = \frac{1}{1+x}$ on a : $u_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\log(1+x)]_0^1 = \log(2)$

$\boxed{3.2}$ Propriétés de l'intégrales

Proposition 3.8. *Soit $c \in]a,b[$ et f une fonction continue sur $[a,b]$, alors on a la relation de Chasles :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Proposition 3.9. *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, alors on a :*

1. $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
2. *Pour tout λ réel,* $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.
3. *Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$ alors* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
4. *Si $f \leq g$ sur $[a,b]$ alors* $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Preuve. *1) et 2)- On a*

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f+g)(x_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(x_k)$$

et $\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(\lambda f)(x_k) = \lambda\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ *et par passage à la limite on a le résultat.*

3) Si $f \geq 0$ *alors* $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \geq 0$ *et par passage à la limite on a le résultat.*

4) Si $g-f \geq 0$ *sur* $[a,b]$ *alors* $\int_a^b (g-f)(x)dx \geq 0$*, et par conséquent* $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Convention :

1. Si f est définie au point a alors $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. Si $a > b$ et si f est continue sur $[b,a]$ alors $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Corollaire 3.10. *Si* f *est continue sur* $[a,b]$*, on a :* $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Preuve. *On a* $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ *donc*

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

D'où $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Proposition 3.11. *(1^{er} Formule de la moyenne)*
Soient f *et* g *deux fonctions continues sur* $[a,b]$*. On suppose que* g *garde un signe constant sur* $[a,b]$*, alors il existe* $c \in [a,b]$ *tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

Preuve. *Supposons que* g *est positive sur* $[a,b]$ *et soient* $m = \inf_{[a,b]} f$ *et* $M = \sup_{[a,b]} f$*, on a* $\forall x \in [a,b]$ $m \leq f(x) \leq M$*, donc* $\forall x \in [a,b]$

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

et par suite

$$m\int_a^b g(x) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$$

Si $\int_a^b g(x)dx = 0$ *alors* $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ *et l'égalité est vérifiée pour tout* $c \in [a,b]$.

Si $\int_a^b g(x)dx \neq 0$ *alors* $\int_a^b g(x)dx > 0$ *et* $m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$

Comme f *est continue sur* $[a,b]$*,* f *atteint ses bornes, il existe donc* $c_1 \in [a,b]$ *et* $d_1 \in [a,b]$ *tels que* $m = f(c_1)$ *et* $M = f(d_1)$ *et d'après le T.V.I, il existe* $c \in [a,b]$ *tel que* $\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(c)$*, ce qui implique que* $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$

Corollaire 3.12. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que* $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$

Preuve. *On applique la proposition 3.11 à la fonction $g \equiv 1$ sur $[a,b]$.*

$\boxed{3.3}$ Primitives

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 3.13. *Une fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si : F est dérivable sur I et $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$.*

Proposition 3.14. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si F est une primitive de f sur I alors :*

1. *$F + K$, avec $K \in \mathbb{R}$, est une primitive de f sur I.*
2. *Toute primitive G de f sur I est de la forme $G = F + K$, avec $K \in \mathbb{R}$.*

Une primitive de f est appelée intégrale indéfinie de f et est notée $\int f(x) = F + K$.

Preuve. *1) $(F(x) + K)' = F'(x) = f(x)$ donc $F + K$ est une primitive de f.*
2) Soit G une primitive de f sur I. Soit $a \in I$ et $x \in I$, par le T.A.F appliqué à la fonction $G - F$ sur l'intervalle fermé d'éxtrémités a et x, il existe c compris strictement entre a et x tel que $(G-F)(x) - (G-F)(a) = (x-a)(G-F)'(c)$
Donc $G(x) - F(x) - G(a) + F(a) = (x-a)(G'(c) - F'(c)) = 0$
D'où $G(x) = F(x) + G(a) - F(a) = F(x) + K$.

Théorème 3.15. *Si f est continue sur I et $a \in I$, alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur I*

Preuve. *Soient $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ telle que $x + h \in I$, on a :*

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt \end{aligned}$$

f étant continue sur l'intervalle d'éxtrémités x et $x+h$, d'après la formule de la moyenne il existe c_h compris entre x et $x+h$, tel que

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = (x+h-x)f(c_h) = hf(c_h)$$

Puisque f est continue, nous avons

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(c_h) = f(x)$$

D'où $F'(x) = f(x)$

Proposition 3.16. *Soit f une fonction continue sur I.*

1. *Pour toute primitive G de f sur I, on a :*

$$\int_a^x f(x)dx = G(x) - G(a)$$

2. *$F(x) = \int_a^x f(x)dx$ est la seule primitive de f qui s'annule au point a.*

Preuve. *1) D'après la proposition 3.14, on a $G(x) = F(x) + K$ donc $G(x) = \int_a^x f(x)dx + K$ d'où $G(a) = \int_a^a f(x)dx + K = K$ donc $G(x) = \int_a^x f(x)dx + G(a)$ ce qui implique que $\int_a^x f(x)dx = G(x) - G(a)$.*

2) On a $F(a) = a$. Réciproquement, si G est une primitive tel que $G(a) = 0$ alors $\int_a^x f(x)dx = G(x) - G(a) = G(x)$ d'où $G(x) = \int_a^x f(x)dx$.

Corollaire 3.17. *Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et u et v deux fonctions dérivables à valeurs dans $[a, b]$. Alors si $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ on a $F'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.*

Preuve. *Posons $G(x) = \int_a^x f(t)dt$*

$$\begin{aligned} F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt &= \int_{u(x)}^{a} f(t)dt + \int_a^{v(x)} f(t)dt \\ &= \int_a^{v(x)} f(t)dt - \int_a^{u(x)} f(t)dt \\ &= G(v(x)) - G(u(x)). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} F'(x) &= v'(x)G'(v(x)) - u'(x)G'(u(x)) \\ &= v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)) \end{aligned}$$

Exemple 3.18. *Calculer la dérivé de $h(x) = \int_{-x^2}^{2x^5} e^{\sin(t)}dt$*
On a : $h'(x) = 2xe^{\sin(-x^2)} + 10x^4 e^{\sin(2x^5)}$

Primitives des fonctions usuelles

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$ pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + K$

$\int \cos(x) dx = \sin(x) + K$

$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + K$

$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x) + K$

$\int \frac{-dx}{\sin^2(x)} = cotant(x) + K$

$\int e^x dx = e^x + K$

$\int chx \; dx = shx + K$

$\int shx dx = chx + K$

$\int \ln(x) dx = x\ln(x) - x + K$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + K$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + K$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = argshx + K = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + K$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = argchx + K = \log(x + \sqrt{x^2-1}) + K$

Théorème 3.19. *Soit I un intervalle de I. Si f et g ont des primitives sur I alors $f + \lambda g$ admet aussi une primitive sur I et on a :* $\int f + \lambda g = \int f + \lambda \int g$

Théorème 3.20. *(Intégration par parties)*
Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$, on a alors :

1. $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

2. $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Preuve. *Il suffit de remarquer que* $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Exemple 3.21. *1) Calculer* $\displaystyle\int x^2e^x dx$
On pose $f(x) = e^x$ *et* $g(x) = x^2$ *donc* $f'(x) = e^x$ *et* $g'(x) = 2x$
$\displaystyle\int x^2e^x dx = f(x)g'(x) - \int f(x)g'(x)dx = x^2e^x - \int 2xe^x dx$
On pose $f(x) = e^x$ *et* $g(x) = 2x$ *donc* $f'(x) = e^x$ *et* $g'(x) = 2$
$\displaystyle\int x^2e^x dx = f(x)g'(x) - \int f(x)g'(x)dx = 2xe^x - \int 2e^x dx$
Donc $\displaystyle\int x^2e^x dx = 2xe^x - 2e^x + K$, *d'où*

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + K = (x^2 - 2x + 2)e^x + K$$

2) Calculer $\displaystyle\int \sin(x)e^x dx$
On pose $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = e^x$ $f'(x) = \cos(x)$, $g'(x) = e^x$

$$\begin{aligned}
\int \sin(x)e^x dx &= e^x\sin(x) - \int \cos(x)e^x dx \\
&= e^x\sin(x) - (e^x\cos(x) + \int e^x\sin(x)dx) \\
&= e^x\sin(x) - e^x\cos(x) - \int \sin(x)e^x dx
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle 2\int \sin(x)e^x dx = e^x\sin(x) - e^x\cos(x)$
D'où $\displaystyle\int \sin(x)e^x dx = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))e^x + K$

Remarque 3.22. *Pour calculer* $\displaystyle\int P(x)\cos(\beta x)$, $\displaystyle\int P(x)\sin(\beta x)$ *ou* $\displaystyle\int P(x)e^{\alpha x}$ *avec* P *un polynôme à coefficient réels, on fait des intégration par parties pour diminuer le degré du polynôme* P *jusqu'à sa disparition(comme l'exemple 3.21)*

Théorème 3.23. *(Changement de variables) Soient* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue et* $\varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$ *de classe* C^1 *alors*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

Preuve. *Soit* F *une primitive de* f *sur* $[a,b]$, *soit* $G(t) = F(\varphi(t))$ *pour* $t \in [\alpha,\beta]$.

On a : $G'(t) = \varphi'(t)F'(\varphi(t)) = \varphi'(t)f(\varphi(t))$ *donc*

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt &= \int_{\alpha}^{\beta} G'(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) \\ &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx\end{aligned}$$

Remarque 3.24. *Dans la pratique, il suffit d'écrire* $x = \varphi(t)$ *et* $dx = \varphi'(t)dt$*.*
Si $t = \alpha$ *alors* $x = \varphi(\alpha)$
Si $t = \beta$ *alors* $x = \varphi(\beta)$
$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$

Exemple 3.25. *1) Calculer* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}}dt$
On pose $x = e^t$*, on a* $dx = e^t dt$*.*
$t = 0$ *alors* $x = 1$
$t = 1$ *alors* $x = e$
$\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}}dt = \int_1^e \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan(x)]_1^e = \arctan(e) - \arctan(1)$
2) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)dt$
$\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\sin(t)dt$

$$\begin{aligned}I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\sin(t)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t))\sin(t)dt\end{aligned}$$

On pose $x = \cos(t)$*,* $dx = -\sin(t)dt$
$\displaystyle I = -\int_1^0 (1-x^2)dx = \int_0^1 (1-x^2)dx = [x - \frac{x^3}{3}]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Exemple 3.26. *1) Calculer* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin(t)dt.$
On pose $x = \cos(t)$*,* $dx = -\sin(t)$*.*
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin(t)dt = -\int_1^0 x^2dx = \int_0^1 x^2dx = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}.$
2) Calculer $\displaystyle\int_0 \frac{\pi}{2} \cos^5(t)dt.$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(t).\cos(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))^2\cos dt.$
On pose $x = \sin(t)$*,* $dx = \cos(t)dt$*.*

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(t)dt &= \int_1^0 (1-x^2)^2 dx = \int_0^1 (1+x^4-2x^2)dx \\ &= [x+\frac{x^5}{5}-2\frac{x^3}{3}]_0^1 = 1+\frac{1}{5}-\frac{2}{3}=\frac{8}{15}\end{aligned}$$

3.4 Primitives des fonctions rationnelles

Une fonction rationnelles est de la forme $F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
On sait que toute fonction rationnelle se décompose comme suit :

$$F(x)=Q_2(x)+\tfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \text{ où } deg(P_1)<deg(Q_1),\ Q_1 \text{ unitaire et } Q_2(x)\in\mathbb{R}[X]$$

On sait que $Q_1(x)$ peut être mis sous la forme :

$$Q_1(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-r_i)^{k_i}\prod_{j=1}^{m}(x^2+p_jx+q_j)^{h_j} \text{ avec } p_j^2-4q_j<0$$

et par suit la décomposition en éléments simples, on obtient :

$$F(x)=Q_2(x)+\sum_{i=1}^{n}(\sum_{\alpha=1}^{k_i}\frac{c_{\alpha,i}}{(x-r_i)^{\alpha}})+\sum_{j=1}^{m}(\sum_{\beta=1}^{h_i}\frac{a_{\beta,j}x+b_{\beta,j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{\beta}})$$

où les $k_i, h_j \in \mathbb{N}$ et $c_{\alpha,i}, a_{\beta,j}, b_{\beta,j}, p_j, q_j \in \mathbb{R}$, avec $p_j^2-4q_j<0$
Le calcul des primitives de fonctions rationnelles se ramène donc à celui des primitives de fonctions de la forme :

1. $\displaystyle\int x^n dx$, $n\in\mathbb{N}$.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-r)^n}dx$, $r\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$
3. $\displaystyle\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx$ avec $p_j^2-4q_j<0$

Nous avons donc,

1. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-r)^n} = \begin{cases} \log|x-r|+c; \text{ si } n=1 \\ \dfrac{1}{-n+1}(x-r)^{-n+1} = \dfrac{1}{(1-n)(x-r)^{n-1}}+c \text{ si } n>1. \end{cases}$
3. Calcule de $\displaystyle\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx$ avec $p^2-4q<0, n\in\mathbb{N}^*$

on a $\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + (b-\frac{pa}{2})\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx$
On a

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx = \begin{cases} \log(x^2+px+q)+c; \text{ si } n=1 \\ \dfrac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}}+c \text{ si } n>1. \end{cases}$$

Reste l'intégrale de la forme $\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx$
On a :

$$(x^2+px+q)^n = ((x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4})^n = (\frac{4q-p^2}{4})^n((\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}})^2+1)^n$$

On pose $u = \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$, $du = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}dx$.

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx = (\frac{4}{4q-p^2})^n \int \frac{1}{(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}})^2+1)^n}dx = (\frac{4}{4q-p^2})^n \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\int \frac{1}{(u^2+1)^n}du$$

On pose $I_n = \int \frac{1}{(u^2+1)^n}du$, par une intégration par parties, on montre que

$$2nI_{n+1} = \frac{u}{(1+u^2)^n} + (2n-1)I_n$$

et

$$I_1 = \int \frac{1}{1+u^2}du = \arctan u + c.$$

Exemple 3.27. *Calculer* $\int \frac{3x}{x^3-1}dx.$
$F(x) = \frac{3x}{x^3-1} = \frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$
$A = ((x-1)F(x))_1 = 1 \Longrightarrow A = 1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = 0 = A+B \Longrightarrow B = -A = -1 \Longrightarrow B = -1$
$F(0) = 0 = -A+C \Longrightarrow C = A = 1 \Longrightarrow C = 1$
Donc

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x^3-1} &= \frac{1}{x-1} + \frac{-x+1}{x^2+x+1} \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{3x}{x^3-1}dx &= \int \frac{dx}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx \\ &= \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{3}{2}I\end{aligned}$$

avec $I = \int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1}dx$

On pose $u = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $du = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$

donc $I = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan u + c$

D'où, $\int \frac{3x}{x^3-1}dx = \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + c$

Exemple 3.28. *Calculer* $I = \int \frac{x}{(x^2-x+1)^2}dx$

$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx$

$I = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx \qquad (*)$

On pose $J = \int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx$

On a : $J = \int \frac{1}{((x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})^2}dx = \frac{16}{9}\int \frac{1}{((\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2+1)^2}dx$

On pose $x = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ $du = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$

$J = \frac{16}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{(u^2+1)^2}du$

Dans $\int \frac{1}{u^2+1}du$ *on pose* $f = u$, $f' = 1$, $g = \frac{1}{u^2+1}$, $g' = \frac{-2u}{(u^2+1)^2}$

donc

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u^2+1}du &= \frac{u}{u^2+1} + \int \frac{2u^2}{(u^2+1)^2}du = \frac{u}{u^2+1} + 2\int \frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^2}du \\ &= \frac{u}{u^2+1} + 2\int \frac{1}{u^2+1}du - 2\int \frac{du}{(u^2+1)^2}\end{aligned}$$

donc $\int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{1}{2}(\frac{u}{u^2+1} + \arctan(u)) + c$

D'où

$$\begin{aligned}
J &= \frac{16}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}(\frac{u}{u^2+1}+\arctan u)+c \\
&= \frac{4\sqrt{3}}{9}(\frac{2x-1}{\sqrt{3}((\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2+1)}+\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+c \\
&= \frac{1}{3}\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+c
\end{aligned}$$

Par $(*)$ *on obtient* $I=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{1}{6}.\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{2\sqrt{3}}{9}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+c$

CHAPITRE 4

Intégrales Généralisées

4.1 Généralités

Dans le chapitre précédent, on a défini et étudié la notion d'intégrale de Riemann d'une fonction définie sur un intervalle fermé et borné. Dans ce chapitre, on cherche à étendre la notion d'intégrale aux fonctions non nécessairement bornée et définies sur des intervalles de la forme $[a, b[\,;\ [a, +\infty[$, $]a, b]$, $]-\infty, b]$, $]a, b[$, $]-\infty, +\infty[$.

Définition 4.1. *Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$. Pour $x \in [a, b[$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente ou existe si $\lim\limits_{x \to b} F(x)$ existe et elle est finie.*
Cette limite est appelée intégrale généralisée ou impropre de f sur $[a, b[$, et on la note par $\int_a^b f(t)dt$.
$\longrightarrow$ Si $\lim\limits_{x \to b} F(x)$ n'existe pas ou égale à ∞, on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ n'existe pas ou divergente.

Définition 4.2. *Soit f une fonction continue sur $]a, b]$ où $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$. Pour $x \in]a, b]$, on pose $F(x) = \int_x^b f(t)dt$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ est convergente ou existe si $\lim\limits_{x \to a} F(x)$ existe et elle est finie.*
Cette limite est appelée intégrale généralisée ou impropre de f sur $]a, b]$, et on la note par $\int_a^b f(t)dt$.
$\longrightarrow$ Si $\lim\limits_{x \to a} F(x)$ n'existe pas ou égale à ∞, on dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ n'existe pas ou divergente.

Exemple 4.3. *1) Etudier la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$.*
Pour $x \geq 0$ on a :

$$\int_0^x e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^x = -e^{-x} + 1$$

$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty} 1-e^{-x} = 1$. *Donc* $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ *est convergente et on a :* $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt =$ 1

2) Etudier la convergence de $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}}$ *et* $\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}}$

Pour $x\geq 1$ *on a :* $\int_1^x\frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_1^x = 2\sqrt{x}-2\to+\infty$, *qd* $x\to+\infty$. *Donc* $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}}$ *diverge*

Pour $\epsilon>0$: $\int_\epsilon^1\frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_\epsilon^1 = 2-2\sqrt{\epsilon}\to 2$, *qd* $\epsilon\to 0$. *Donc* $\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}}$ *est converge et on a* $\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$.

Remarque 4.4. *1) Si* f *est continue sur* $[a,b[$ *et si* $c\in[a,b[$ *alors* $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_c^b f(t)dt$ *sont de même nature. En effet :*

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt$$

$\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt$ *existe dans* $\mathbb{R}$ *si et seulement si* $\lim_{x\to b}\int_c^x f(t)dt$ *existe dans* $\mathbb{R}$

2) De même si f *est continue sur* $]a,b]$ *et si* $c\in]a,b]$ *alors* $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_a^c f(t)dt$ *sont de même nature.*

Définition 4.5. *Soit* f *une fonction continue sur* $]a,b[$ $(-\infty\leq a\leq b\leq+\infty)$. *On dit que l'intégrale de* f *sur* $]a,b[$ *est convergente s'il existe* $c\in]a,b[$ *tel que chacune des intégrales de* f *sur* $]a,c]$ *et sur* $[c,b[$ *sont convergentes, et on pose*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Le nombre $\int_a^b f(t)dt$ *est indépendant de c, et s'appelle l'intégrale généralisée de* f *sur* $]a,b[$.

Exemple 4.6. *1) Etudier la convergence de* $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt$

Pour $x>0$: $\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan t]_0^x = \arctan x\to\frac{\pi}{2}$, *qd* $x\to+\infty$.

Donc $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$

Pour $x<0$: $\int_x^0\frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan t]_x^0 = -\arctan x\to\frac{\pi}{2}$, *qd* $x\to-\infty$.

Donc $\int_{-\infty}^0\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$

D'où $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt = \int_{-\infty}^0\frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$

2) Etudier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(t)dt$

Pour $x > 0$: $\int_0^x \sin(t)dt = -[\cos(t)]_0^x = -\cos(x) + 1$ *n'a pas de limite qd* $x \to +\infty$*, donc* $\int_0^x \sin(t)dt$ *diverge et par suite* $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)dt$ *diverge.*

Définition 4.7. *1) Soit* f *une fonction continue sur* $]a, b[$ *et sur* $]b, d[$*. On dit que* $\int_a^d f(t)dt$ *est convergente si les deux intégrales* $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_b^d f(t)dt$ *sont convergentes, et dans ce cas on pose :*

$$\int_a^d f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^d f(t)dt$$

2) Soit $a_0 < a_1 < ... < a_n$*, soit* f *une fonction continue sur* $]a_i, a_{i+1}[$ *pour chaque* $i \in \{0, ..., n-1\}$*. On dit que* $\int_{a_0}^{a_n} f(t)dt$ *est convergente si pour chaque* $i \in \{0, ..., n-1\}$, $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$ *est convergente et dans ce cas on pose*

$$\int_{a_0}^{a_n} f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$$

Exemple 4.8. $\int_0^{10} \frac{e^t}{t(t-1)(t-2)}dt$ *converge si et seulement si les* 3 *intégrales suivantes sont convergentes :*

$$\int_0^1 \frac{e^t}{t(t-1)(t-2)}dt, \quad \int_1^2 \frac{e^t}{t(t-1)(t-2)}dt, \quad et \quad \int_2^{10} \frac{e^t}{t(t-1)(t-2)}dt$$

Proposition 4.9. *(Exemple de référence)*
Soit $a > 0$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ *converge* $\Longleftrightarrow \alpha > 1$,
2. $\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}dx$ *converge* $\Longleftrightarrow \alpha < 1$,

Preuve. *1) Si* $\alpha = 1$

$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to+\infty} [\log|x|]_a^t = \lim_{t\to+\infty} \log|t| - \log a = +\infty.$

Donc $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ *diverge.*

Si $\alpha \neq 1$

$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{t\to+\infty} [\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}]_a^t = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)a^{\alpha-1}}$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{(1-\alpha)a^{\alpha-1}} \text{ si } \alpha > 1 \text{ (cv)}; \\ \\ +\infty \text{ si } \alpha < 1 \text{ (div)}. \end{cases}$$

2) Si $\alpha = 1$
$\lim\limits_{\epsilon \to +\infty} \int_{\epsilon}^{a} \frac{1}{x} dx = \lim\limits_{\epsilon \to 0} [\log |x|]_{\epsilon}^{a} = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \log a - \log |\epsilon| = +\infty.$
Donc $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ *diverge.*
Si $\alpha \neq 1$
$\lim\limits_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{a} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim\limits_{\epsilon \to 0} [\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}]_{\epsilon}^{a} = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \frac{1}{(1-\alpha)a^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)\epsilon^{\alpha-1}}$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(1-\alpha)a^{\alpha-1}} \ \text{si } \alpha < 1\,; \\ \\ +\infty \ \text{si } \alpha > 1\ . \end{cases}$$

Remarque 4.10. *L'étude de l'intégrale généralisée d'une fonction f sur un intervalle $]c, d]$ se ramène par le changement de variable $t = -x$ à l'étude de l'intégrale généralisée de la fonction $x \longrightarrow f(-x)$ sur l'intervalle $[-d, -c[$*

$$\int_c^d f(t)dt = \int_{-d}^{-c} f(-t)dt$$

Dans la suite on va considérer seulement les intégrales généralisées sur des intérvalles de type $[a, b[$.

$\boxed{4.2}$ Critères de convergence pour les fonctions positives

Proposition 4.11. *Soit f une fonction continue positive sur $[a, b[$. Pour que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ soit convergente, il faut et il suffit, qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [a, b[$: $\int_a^x f(t)dt \leq M$.*

Preuve. *Soit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ pour $x \in [a, b[$.*
Si $x < y$ alors $F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^y f(t)dt \geq 0$ donc F est croissante.
$\int_a^b f(t)dt$ cv $\Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to b} F(x)$ existe dans $\mathbb{R} \Longleftrightarrow F(x)$ est majoré $\Longleftrightarrow \exists M > 0$ tel que $\forall x \in [a, b[$: $\int_a^x f(t)dt \leq M$.

Proposition 4.12. *Soient f et g deux fonctions positives continue sur $[a, b[$ vérifiant $0 \leq f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a, b[$. Alors on a :*

1. *Si* $\int_a^b g(t)dt$ *converge alors* $\int_a^b f(t)dt$ *converge et dans ce cas on a :*

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

2. *Si* $\int_a^b f(t)dt$ *diverge alors* $\int_a^b g(t)dt$ *diverge.*

Preuve. *Pour* $x \in [a, b[$ *on pose* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *et* $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ *on a* $F(x) \leq G(x)$*.*

1) Si $\int_a^b g(t)dt$ *converge alors* $G(x)$ *est majoré donc* $F(x)$ *est majoré d'où* $\int_a^b f(t)dt$ *converge.*
2) C'est la contraposée de 1).

Exemple 4.13. *Déterminer la nature de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}dx$
On a : $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^x}$
or $\int_0^t \frac{1}{e^x}dx = \int_0^t e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^t = -e^{-t}+1 \to 1$ *qd* $t \to +\infty$ *Donc* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x}dx$ *converge,* *d'où* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}dx$ *converge.*

Définition 4.14. *Deux fonctions* f *et* g *définies à gauche de* $b \in \mathbb{R}$*, sauf peut être en* b *(resp. au voisinage de* $+\infty$*) sont équivalentes à gauche de* b *(resp. au voisinage de* $+\infty$*) s'il existe une fonction* ϵ *définie à gauche de* b *sauf peut être en* b *(resp. au voisinage de* $+\infty$*) telle que* $f(x) = g(x)(1+\epsilon(x))$ *avec* $\lim\limits_{x\to b-} \epsilon(x) = 0$ *(resp.* $\lim\limits_{x\to+\infty} \epsilon(x) = 0$*).*

Théorème 4.15. *Soient* $a \in \mathbb{R}$ *et* b *tel que* $a < b \leq +\infty$*.* f *et* g *deux fonctions positives, continue sur* $[a, b[$*.*

1. *Si* f *et* g *sont équivalentes à gauche de* b *(resp. au voisinage de* $b = +\infty$*) alors* $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_a^b g(t)dt$ *sont de même nature.*
2. *Si* $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ *alors* $\int_a^b g(t)dt$ *converge* $\Longrightarrow \int_a^b f(t)dt$ *converge*
3. *Si* $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ *alors* $\int_a^b g(t)dt$ *diverge* $\Longrightarrow \int_a^b f(t)dt$ *diverge*

Exemple 4.16. *1) Etudier la convergence des intégrales* $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^{3/2}}dx$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$*.*

- $\frac{e^x-1}{x^{3/2}} \sim_0 \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ *or* $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}dx$ *converge donc* $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^{3/2}}dx$ *converge.*

• $\dfrac{x}{\sqrt{x^5+1}} = \dfrac{x}{x^{5/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} = \dfrac{1}{x^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} \sim \dfrac{1}{x^{3/2}}$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ *converge donc* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$ *converge.*

2) Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sin t}$

On a $\dfrac{1}{\sin t} \sim_0 \dfrac{1}{t}$ *et* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ *diverge, donc* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sin t}dt$ *diverge.*

Corollaire 4.17. *Soit f une fonction positive et continue sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, on a :*

1. *Si* $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{C}{x^\alpha}$ $(C \neq 0)$ *alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *et* $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ *sont de même nature, donc*
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1$$
2. *Si* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = 0$ *et* $\alpha > 1$ *alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *converge.*
3. *Si* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$ *et* $\alpha \leq 1$ *alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *diverge.*

Exemple 4.18. *Etudier la nature des intégrales* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t}dt$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^2}dt$.

$\to \displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$ *et* $2 > 1$ *alors* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ *converge.*

$\to \displaystyle\lim_{t\to+\infty} t\frac{\log t}{t} = \lim_{t\to+\infty} \log t = +\infty$ *et* $1 \leq 1$ *alors* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t}dt$ *diverge.*

$\to \displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{3/2}\frac{\log t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log t}{t^{1/2}} = 0$ *et* $\dfrac{3}{2} > 1$ *donc* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^2}dt$ *converge.*

$\triangle$ *On remarque qu'on n'obtient rien si on multiple* $\dfrac{\log t}{t^2}$ *par t ou par t^2 en effet :*

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\frac{\log t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \log t = +\infty$ *mais* $\alpha = 2 > 1$.

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t\frac{\log t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log t}{t} = 0$ *mais* $\alpha = 1 \leq 1$.

Corollaire 4.19. *Soit f une fonction positive et continue sur $[a, b[$, a et $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, on a :*

1. *Si* $f(x) \sim_b \dfrac{A}{(b-x)^\alpha}$ $(A \in \mathbb{R}^*)$ *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *et* $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$ *sont de même nature, donc*
$$\int_a^b f(x)dx \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1$$

2. Si $\lim\limits_{x \to b-} (b-x)^\alpha f(x) = 0$ *et* $\alpha < 1$ *alors* $\int_a^b f(x)dx$ *converge.*

3. Si $\lim\limits_{x \to b-} (b-x)^\alpha f(x) = +\infty$ *et* $\alpha \geq 1$ *alors* $\int_a^b f(x)dx$ *diverge.*

Exemple 4.20. *Donner la nature de* $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$

Sur $]1,2]$ *la fonction* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}$ *est positive et continue*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)(x^2+1)}} = \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(x+1)(x^2+1)}}$$

$\lim\limits_{x \to 1} (x-1)^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2} \Longrightarrow f(x) \sim_1 \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}$

Or $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}dx$ *converge donc* $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$ *converge*

Remarque 4.21. *Si* $f \leq 0$ *et continue sur* $[a,b[$ *alors* $-f \geq 0$ *sur* $[a,b[$ *et on a :* $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_a^b (-f)(t)dt$ *sont de même nature.*

Définition 4.22. *Soit* f *une fonction continue sur* $[a,b[$ *où* $a < b \leq +\infty$*. L'intégrale* $\int_a^b f(x)dx$ *est dite absolument convergente si* $\int_a^b |f(t)|dt$ *converge.*

Théorème 4.23. *Une intégrale absolument convergente est convergente.*

$$\int_a^b |f(t)|dt \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \text{ converge}$$

Preuve. *Pour tout* $t \in [a,b[$ *on a :* $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$ *donc* $0 \leq f(t) + |f(t)| \leq 2|f(t)|$
$\int_a^b |f(t)|dt$ *converge donc* $\int_a^b 2|f(t)|dt$ *converge et par suite* $\int_a^b (f(t)+|f(t)|)dt$ *converge.*

$\forall x \in [a,b[$ *:*

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^b (f(t)+|f(t)|)dt - \int_a^x |f(t)|dt$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &= \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt = \lim_{x\to b}\int_a^x (f(t)+|f(t)|)dt - \lim_{x\to b}\int_a^x |f(t)|dt \\ &= \int_a^b (f(t)+|f(t)|)dt - \int_a^b |f(t)|dt\end{aligned}$$

Donc $\int_a^b f(t)dt$ *converge.*

Exemple 4.24. *Etudier l'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty} \frac{2\sin t - 3\cos t}{t^2} dt$

$\forall t \in [1, +\infty[$ *on a* $\mid \frac{2\sin t - 3\cos t}{t^2} \mid \leq \frac{5}{t^2}$
or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ *converge donc* $\int_1^{+\infty} \frac{5}{t^2} dt$ *converge d'où* $\int_1^{+\infty} \mid \frac{2\sin t - 3\cos t}{t^2} \mid dt$ *converge.*

D'où $\int_1^{+\infty} \frac{2\sin t - 3\cos t}{t^2} dt$ *converge.*

Théorème 4.25. *(Intégration par parties)*
Soient f *et* g *deux fonctions de classe* C^1 *sur* $[a, b[$ $(a < b \leq +\infty)$*. Si* $\lim_{x \to b} f(x)g(x)$ *existe dans* $\mathbb{R}$ *alors les intégrales* $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ *et* $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ *sont de même nature, et en cas de convergence on a :*

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = \lim_{x \to b} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

Exemple 4.26. *Etudier la nature de* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$
Posons

$$g = \frac{1}{t}, \quad g' = -\frac{1}{t^2}$$

$$f = -\cos t, \quad f' = \sin t$$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ *donc* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ *sont de même nature, or* $|\frac{\cos t}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} dt$ *converge donc* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ *converge d'où* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ *converge.*

Proposition 4.27. ***Comparaison avec une série numérique***
Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ *une fonction, positive décroissante et continue. La série* $\sum f(n)$ *et* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *sont de même nature.*

CHAPITRE 5

Equations différentielles

Soit $F(x, z_0, z_1, ..., z_n)$ une fonction de $(n+2)$ variables réelles définie sur une partie A de $\mathbb{R}^{n+2}$. Une équation différentielles est une équation qui s'écrit sous la forme :

$$(E): \quad F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x.
L'entier n est dit ordre de l'équation différentielle.
Résoudre l'équation différentielle (E), c'est déterminer sa solution générale c-à-d toutes les fonctions g définies et dérivables jusqu'a l'ordre n sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ telles que :

$$x \in J \Longrightarrow (x, g(x), g'(x), ..., g^{(n)}(x)) \in A$$

et

$$F(x, g(x), g'(x), ..., g^{(n)}(x)) = 0$$

Exemple 5.1.

1. *La quantité de carbone notée $N(t)$ dans un échantillon animal ou végétal décroit après la mort de celui-ci. Elle vérifié l'équation différentielle*

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda.N$$

2. *Considérons la chute d'un corps de masse m soumis à frottement fluide, proportionel à la vitesse. Le vecteur position $x(t)$ est solution de l'équation différentielle*

$$mx'' + \gamma x' - mgx = 0.$$

3. *Considérons un circuit RCL en série. L'intensité i qui traverse le circuit obéit à l'équation différentielle :*

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0.$$

$\boxed{5.1}$ Equations différentielles du premier ordre

Une équation différentielle est du premier ordre si elle ne fait intervenir que la première dérivée y'.

Définition 5.2. *Une équation différentielle du premier ordre est dite linéaire si elle peut se mettre sous la forme :*

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (E)$$

où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et continues sur I.

$\longrightarrow y' - a(x)y = 0$ est l'équation sans second membre (E.S.S.M) associée à (E)

Théorème 5.3. *Soit A une primitive de a sur l'intervalle I. La solution générale de l' ESSM : $y' - a(x)y = 0$ définie sur I est $y = Kexp(A(x))$ où $K \in \mathbb{R}$*

Preuve. $y' - a(x)y = 0 \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = a(x)y \Longrightarrow \dfrac{dy}{y} = a(x)dx \quad (y \neq 0) \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int a(x)dx + C.$

Donc $\log|y| = A(x)+C \Longrightarrow |y(x)| = e^{A(x)+C} \Longrightarrow y(x) = \pm e^C e^{A(x)} \Longrightarrow y(x) = Ke^{A(x)}$ *avec* $K = \pm e^C$.

$y = 0$ est aussi une solution, donc la solution générale de l'ESSM est $y = Ke^{A(x)}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Théorème 5.4. *Soit y_0 une solution particulière de (E) définie sur I. Les solutions de (E) sont exactement les fonctions $y_0 + y$ où y est une solution de l'ESSM.*
C-à-d :

$$y_{(E)} = y_0 + y$$

Donc $y_{(E)} = y_0 + Kexp(A(x))$, $K \in \mathbb{R}$

Preuve. *Soit y une solution de L'ESSM et y_0 une solution particulière de (E)*

$$\begin{aligned} (y_0 + y)' - a(x)(y_0 + y) &= y_0' + y' - a(x)y_0 - a(x)y \\ &= y_0' - a(x)y_0 + y' - a(x)y \\ &= b(x) + 0 = b(x) \end{aligned}$$

Inversement, soit z une solution de (E), on va montrer que $z - y_0$ est une solution de L'ESSM :

$$\begin{aligned} (z - y_0)' - a(x)(z - y_0) &= z' - a(x)z - y_0' + a(x)y_0 \\ &= b(x) - (y_0' - a(x)y_0) = b(x) - b(x) = 0 \end{aligned}$$

Le problème se ramène donc à déterminer une solution particulière de l'équation (E). La méthode de variation de la constante permet d'en déterminer une dans tous les cas.

Solution particulière par variation de la constante.
$y = Ke^{A(x)}$ est la solution générale de L'ESSM, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_0 = K(x)e^{A(x)}$.
y_0 est une solution de (E) ssi $y_0' - a(x)y_0 = b(x)$
ssi $K'(x)e^{A(x)} + K(x)A'(x)e^{A(x)} - a(x)K(x)e^{A(x)} = b(x)$
ssi $K'(x)e^{A(x)} + K(x)a(x)e^{A(x)} - a(x)K(x)e^{A(x)} = b(x)$
ssi $K'(x)e^{A(x)} = b(x)$ ssi $K'(x) = \dfrac{b(x)}{e^{A(x)}}$
On en déduit $K(x)$ en intégrant $K(x) = \displaystyle\int \frac{b(x)}{e^{A(x)}}dx$ d'où $y_0 = e^{A(x)} \displaystyle\int \frac{b(x)}{e^{A(x)}}dx$

Exemple 5.5. *Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle*

$$xy' = 2y + x^3e^x \quad (E)$$

Sur $]0, +\infty[$ $(E) \Longleftrightarrow y' = \dfrac{2y}{x} + x^2e^x$
$\longrightarrow$ *ESSM :*

$$y' = \frac{2y}{x} \Longrightarrow y = K\exp(\int \frac{2}{x}dx) = K\exp(2\log x) = K\exp(\log x^2) = Kx^2$$

Donc $y = Kx^2$.
$\longrightarrow$ *On cherche une solution particulière sous la forme* $y_p = K(x)x^2$

$$y_p' = K'(x)x^2 + 2xK(x)$$

$$y_p' = \frac{2y}{x} + x^2e^x \Longleftrightarrow K'(x)x^2 + 2xK(x) = 2K(x)x + x^2e^x$$
$$\Longleftrightarrow K'(x)x^2 = x^2e^x \Longleftrightarrow K'(x) = e^x \Longleftrightarrow K(x) = e^x$$

Donc $y_p = x^2e^x$. *La solution générale de (E) est* $y = Kx^2 + x^2e^x$, *avec* $K \in \mathbb{R}$

Proposition 5.6. *(Superposition des solutions)*
Soit l'équation

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (E)$$

avec $b(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k(x)$. *Soient*

$$y' = a(x)y + b_k(x) \quad (E_k)$$

si y_k *est une solution particulière de* (E_k) *alors* $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k$ *est une solution particulière de (E).*

Preuve.

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{k=1}^{n} y'_k = \sum_{k=1}^{n}(a(x)y_k + b_k(x)) = a(x)\sum_{k=1}^{n} y_k + \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \\ &= a(x)y + b(x) \end{aligned}$$

$\boxed{5.2}$ Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (E)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et g est une fonction continue sur un intervalle I. L'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (E_0)$$

est appelée l'équation sans second membre associée à (E).
$\longrightarrow$ L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelé l'équation caractéristique de (E_0).
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E_0).

Résolution de L'ESSM.

Théorème 5.7. *Soit l' ESSM suivante* $ay'' + by' + cy = 0 \qquad (E_0)$.
$\longrightarrow$*Si* $\Delta > 0$, *l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes* $r_1 \neq r_2$ *et les solutions de* (E_0) *sont les*

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$\longrightarrow$ *Si* $\Delta = 0$, *l'équation caractéristique possède une racine double* r_0 *et les solutions de* (E_0) *sont les*

$$y(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x} \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$\longrightarrow$ *Si* $\Delta < 0$, *l'équation caractéristique possède deux racines complexes* $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ *et les solutions de* (E_0) *sont* $y(x) = e^{\alpha x}\Big(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)\Big) \qquad$ *où* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Exemple 5.8. *1) Résoudre* $y'' - y' - 2y = 0$. *L'équation caractéristique est* $r^2 - r - 2 = 0$, $\Delta > 0$, $r_1 = -1$, $r_2 = 2$. *D'où* $y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{2x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2) Résoudre $y''-4y'+4y=0$*. L'équation caractéristique est* $r^2-4r+4=0$, $\Delta=0$, $r_0=2$*.*
D'où $y(x)=(\lambda x+\mu)e^{2x}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$*.*

3) Résoudre $y''-2y'+5y=0$*. L'équation caractéristique est* $r^2-2r+5=0$, $\Delta<0$, $r_1=1+2i$, $r_2=1-2i$*. D'où* $y(x)=e^x(\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x))$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

Résolution de L'équation complète (E)

$$(E)\quad : ay''+by'+cy=f(x)$$

Proposition 5.9. *Pour tout* $x_0\in I$ *et* $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$*, l'équation (E) admet une solution unique* y *telle que* $y(x_0)=\alpha$ *et* $y'(x_0)=\beta$*.*

Remarque 5.10. *(Principe de superposition des solutions)*
Si $f(x)$ *est somme de plusieurs fonctions* $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)$*. On cherche une solution particulière* z_i *de chaque équation* $ay''+by'+cy=f_i(x)$*, et la fonction* $z=z_1+z_2+....+z_n$ *est une solution particulière de* (E)*.*

Théorème 5.11. *Soit* y_1 *une solution particulière de* (E) *définie sur* I*. Les solutions de* (E) *sont exactement les fonctions* y_1+y *où* y *est une solution de l'ESSM. C-à-d*

$$y_{(E)}=y_1+y_{(ESSM)}$$

Preuve. *On a,* $ay_1''+by_1'+cy_1=f(x),\forall x\in I$*.* z *est une solution de* $(E)\iff az''+bz'+cz=ay_1''+by_1'+cy_1$
$\iff a(z-y_1)''+b(z-y_1)'+c(z-y_1)=0$
$\iff z-y_1=y$ *est une solution de l'ESSM*
$\iff z=y_1+y$ *avec* y *est une solution de l'ESSM*

La résolution de (E) se ramène donc à la détermination d'une solution particulière de (E).
$\longrightarrow$ **Cas général** : S'il n'y a pas de solution particulière évidente, on fait la méthode de la variation de la constante :

Proposition 5.12. *(Méthode de variation de la constante : Méthode de Lagrange)*
On cherche une solution particulière sous la forme $y=A(x)y_1+B(x)y_2$ *avec la condition de Lagrange*

$$A'(x)y_1+B'(x)y_2=0$$

où y_1 *et* y_2 *sont donnés par :*

$$\begin{cases} y_1=e^{r_1x} \text{ et } y_2=e^{r_2x} \text{ si } \Delta>0\,; \\ y_1=xe^{rx} \text{ et } y_2=e^{rx} \text{ si } \Delta=0\,; \\ y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ et } y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x \text{ si } \Delta<0. \end{cases}$$

$A'(x)$ et $B'(x)$ vérifiant le système
$\begin{cases} A'(x)y_1 + B'(x)y_2 = 0\,; \\ A'(x)y_1' + B'(x)y_2' = \frac{1}{a}f(x). \end{cases}$ *on trouve A' et B' et par intégration on trouve A et B.*

$\longrightarrow$ **Cas particuliers**
1) Cas où $f(x) = e^{\lambda x}P(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P(x)$ un polynôme.
On cherche une solution particulière sous la forme :

— $y = e^{\lambda x}Q(x)$, si λ n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$

— $y = xe^{\lambda x}Q(x)$, si λ est une racine simple de $ar^2 + br + c = 0$

— $y = x^2e^{\lambda x}Q(x)$, si λ est une racine double de $ar^2 + br + c = 0$

avec $Q(x)$ un polynôme tel que $d^\circ Q = d^\circ P$.

2) Cas où $f(x) = P(x)$, où P est un polynôme.
On applique le cas précédent avec $\lambda = 0$

— $y = Q(x)$, si 0 n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$

— $y = xQ(x)$, si 0 est une racine simple de $ar^2 + br + c = 0$

— $y = x^2Q(x)$, si 0 est une racine double de $ar^2 + br + c = 0$

où $Q(x)$ un polynôme tel que $d^\circ Q = d^\circ P$.

3) Cas où $f(x) = e^{\alpha x}P(x)\cos\beta x$ ou bien $f(x) = e^{\alpha x}P(x)\sin\beta x$ avec $P(x)$ un polynôme, $\alpha \in \mathbb{R}$,$\beta \in \mathbb{R}^*$
On cherche une solution particulière sous la forme :

— $y = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x)$, si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$

— $y = e^{\alpha x}(xP_1(x)\cos\beta x + xP_2(x)\sin\beta x)$, si $\alpha + i\beta$ est une racine de $ar^2 + br + c = 0$

avec $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont deux polynôme tels que $d^\circ P = d^\circ P_1 = d^\circ P_2$.

Exemple 5.13. *1) Résoudre l'équation différentielle*

$$y'' + 4y' + 4y = x + e^{-2x} \quad (E)$$

$\longrightarrow$ *ESSM : $y''+4y'+4y = 0$ l'équation caractéristique : $r^2+4r+4 = 0 \Longleftrightarrow (r+2)^2 = 0\ (*)$*
$r = -2$
La solution générale de L'ESSM est $y = (Ax + B)e^{-2x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
$\longrightarrow$ *Soient les équations :*

$$y'' + 4y' + 4y = x \quad (E_1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \quad (E_2)$$

Puisque 0 *n'est pas racine de (*), on cherche une solution particulière de* (E_1) *sous la forme* $y_1 = ax + b$

On a : $y_1' = a$ *et* $y_1'' = 0$

$y_1'' + 4y_1' + 4y_1 = x \Longleftrightarrow 4a + 4ax + 4b = x \Longleftrightarrow \begin{cases} 4a=1\,; \\ 4a+4b=0. \end{cases}$

$\Longleftrightarrow a = \frac{1}{4}$ *et* $b = \frac{-1}{4}$ *donc* $y_1 = \frac{x-1}{4}$.

Puisque -2 *est une solution double de l'équation caractéristique, on chereche une solution particulière de* (E_2) *sous la forme* $y_2 = \alpha x^2 e^{-2x}$

$y_2' = 2\alpha x e^{-2x} - 2\alpha x^2 e^{-2x}$, $y_2'' = 2\alpha e^{-2x} - 4\alpha x e^{-2x} - 4\alpha x e^{-2x} + 4\alpha x^2 e^{-2x}$.

$y_2''+4y_2'+4y_2 = e^{-2x} \Longleftrightarrow e^{-2x}(2\alpha-8\alpha x+4\alpha x^2+8\alpha x-8\alpha x^2+4\alpha x^2) = e^{-2x} \Longleftrightarrow 2\alpha e^{-2x} = e^{-2x} \Longleftrightarrow 2\alpha = 1 \Longleftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$

$y_2 = \dfrac{x^2}{2} e^{-2x}$.

Donc une solution particulière de (E) *est* $y_p = y_1 + y_2 = \frac{x-1}{4} + \frac{x^2}{2}e^{-2x}$.

La solution générale de (E) *est alors*

$$y = (Ax + B)e^{-2x} + \frac{x-1}{4} + \frac{x^2}{2}e^{-2x}$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

2) Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{2x}} \quad (E)$$

L' ESSM : $y'' + 3y' + 2y = 0$.

L'équation caractéristique : $r^2 + 3r + 2 = 0 \Longleftrightarrow r = -1$ *et* $r = -2$. *La solution générale de l'ESSM est*

$$y = Ae^{-x} + Be^{-2x}, \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

On cherche une solution particulière de (E) *sous la forme* $y = A(x)e^{-x} + B(x)e^{-2x}$ *avec la condition de Lagrange* $A'(x)e^{-x} + B'(x)e^{-2x} = 0$ *et* $A'(x)$ *et* $B'(x)$ *vérifient le système :*

$$\begin{cases} A'(x)e^{-x} + B'(x)e^{-2x} = 0 \text{ (1)}\,; \\ -A'(x)e^{-x} - 2B'(x)e^{-2x} = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \text{ (2)}. \end{cases}$$

$(1) + (2) \longrightarrow -B'(x)e^{-2x} = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \Longrightarrow B'(x) = -\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$.

$B(x) = -\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = -\frac{1}{2}\log(1+e^{2x})$

$2 \times (1) + (2)$ *implique* $A'(x)e^{-x} = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \Longrightarrow A'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$

Posons $t = e^x$, $dt = e^x dx$. *Donc* $A(x) = \displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t) = \arctan(e^x)$

Une solution particulière est

$$y_p = \arctan(e^x)e^{-x} - \frac{1}{2}\log(1+e^{2x})e^{-2x}$$

La solution générale de (E) est

$$y = Ae^{-x} + Be^{-2x} + \arctan(e^x)e^{-x} - \frac{1}{2}\log(1+e^{2x})e^{-2x}$$

Exercice : Résoudre les équations différentielles suivantes :
$y'' + y = x + e^x \cos 2x$
$y'' + y = \dfrac{1}{\sin^3 x}$.