TD d'Algèbre 6

Correction de la Série 1

Exercice 1

1. Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$. Déduire qu'un groupe ne peut jamais être la réunion de deux de ses sous-groupes propres.

2. Déduire que $a\mathbb{Z} \cup b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ si et seulement si a divise b ou b divise a, où a et b sont dans $\mathbb{N}^*$. Que dire de $5\mathbb{Z} \cup 8\mathbb{Z}$?

Exercice 2

Soient G un groupe et H une partie non vide de G, finie et stable pour la loi de G. Montrer que H est un sous-groupe de G. Donner un contre-exemple à la propriété précédente dans le cas d'une partie H infinie.

Exercice 3

Soit G un groupe d'élément neutre e tel pour tout $x \in G$, $x^2 = e$. Montrer que G est abélien, et que si G est fini, son ordre n est une puissance de 2.

Exercice 4

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G.

1. Montrer que si H est un sous-groupe de G d'indice 2, alors H est distingué de G.

2. Montrer que si H est un sous-groupe de $Z(G)$, alors il distingué dans G.

3. Supposons que G est un groupe fini et que H est un sous-groupe distingué d'ordre 2 de G. Montrer que $H \subset Z(G)$.

4. Supposons que G est fini d'ordre n, alors montrer que pour tout $a \in G$, $a^n = e$.

Exercice 5

Désignons par S_3 le groupe des permutations de l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$, la loi de groupe étant la composition $(\sigma, \tau) \longmapsto \sigma\tau$. Soit la transposition (12), il est simple de voir que $H = \{id_E, (12)\}$ est un sous-groupe de S_3. Montrer que H n'est pas un sous-groupe normal de S_3.

Exercice 6

Soit un groupe $(G, \cdot)$ d'élément neutre e, on note par a^{-1} le symétrique d'un élément $a \in G$.

1. Soient H un sous-groupe de G et g un élément de G. Montrer que l'ensemble $H_g = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$ est un sous-groupe de G.

2. Soit l'application $f : \ G \longrightarrow G; a \longmapsto a^{-1}$. Montrer que f est un automorphisme si et seulement si $(G, \cdot)$ est abélien.

Exercice 7

Soient G et G' deux groupes finis d'ordres m et n respectifement. On suppose que $m \wedge n = 1$, démontrer que le seul morphisme de groupes f de G vers G' est le morphisme trivial.

Exercice 8

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G. Rappelons que $HK = \{hk \mid h \in h \text{ et } k \in K\}$.

1. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

2. Montrer que si H est un sous-groupe normal de G alors HK est un sous-groupe de G.

3. Montrer que si H est un sous-groupe normal de G alors $H \cap K$ est normal de K.

4. Montrer que si H, K sont normaux, alors le sous-groupe engendré par $H \cup K$ est normal de G.

Exercice 9

Soient G un groupe et $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de G. On désigne par H le sous-groupe de G engendré par les H_i. Montrer que $\bigcap_{i\in I} N_G(H_i) \subseteq N_G(H)$, et que l'inclusion réciproque n'est pas forcément vraie.

Exercice 10
Soient G_1 et G_2 deux groupes, f un homomorphisme surjectif de G_1 sur G_2. Soit A une partie de G_1. Désignons par $Dist(A)$ le sous-groupe distingué de G_1 engendré par A. Prouver que $f(Dist(A))$ est le sous-groupe distingué de G_2 engendré par $f(A)$.

Exercice 11
Soient $(G, .)$ un groupe fini d'ordre $n \geqslant 2$ et H un sous-groupe distingué de G. Montrer que l'ordre de g dans G est un multiple de l'ordre de $\overline{g}$ dans G/H.

Exercice 12
Soit G un groupe.

1. Démontrer que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe normal de $\mathrm{Aut}(G)$.

2. Soit $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Int}(G)$ défini par $\varphi(g) = \varphi_g$ tel que $\varphi_g : G \longrightarrow G$, $x \longmapsto gxg^{-1}$. Démontrer que φ est un morphisme de groupes. Quel est son noyau ?

3. En déduire que $G/Z(G)$ est isomorphe à $\mathrm{Int}(G)$.

Exercice 13
Soient G un groupe et $D = \{(x, x)|\ x \in G\}$. Montrer que D est un sous-groupe distingué de $G \times G$ si et seulement si G est abélien.

Exercice 14
Soit A une partie non vide d'un groupe G. On appelle normalisateur de A dans G l'ensemble $N(A) = \{g \in G|\ gA = Ag\}$ et on appelle centralisateur de A dans G l'ensemble $Z(A) = \{g \in G \mid \forall a \in A, ga = ag\}$.

1. Montrer que $N(A)$ est un sous-groupe de G.

2. Montrer que $Z(A)$ est un sous-groupe distingué de $N(A)$.

Exercice 15
1. Soit $f : \ G \longrightarrow G'$ un homomorphisme de groupes surjectif, montrer qu'il existe une bijection entre les sous-groupes distingués de G contenant $\ker f$ et les sous-groupes distingués de G'.

2. Étudier le cas où G est un groupe, $H \lhd G$, $G' = G/H$ et $f = \pi$ la surjection canonique.

Exercice 16
Soient H, K deux sous-groupes d'un groupe fini G. Montrer que
$\mathrm{card}(HK) = \dfrac{|H||K|}{|H \cap K|}$, rappelons que $HK = \{hk \mid h \in H \text{ et } k \in K\}$.

Corrections

Correction de l'exercice 1

1. Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G. Montrons que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.
   Supposons que $H \cup K$ est un sous-groupe de G, alors montrons que $H \subset K$ ou $K \subset H$. Si par exemple $H \not\subset K$, alors il existe $h \in H$ et $h \notin K$; pour tout $k \in K$, $hk \in H \cup K$, donc $hk \in H$ ou K. Remarquons que $hk \notin K$, sinon on aura $hk \in K$, ce qui implique $h \in Kk^{-1} \subset K$, ce qui est faux. D'où $hk \in H$, ce qui donne que $k \in h^{-1}H \subset H$. Par suite $K \subset H$? D'où le résultat.
   La réciproquement est simple, la condition $H \subset K$ ou $K \subset H$ implique que $H \cup K = H$ ou K ; d'où le résultat.
   Un groupe G ne peut jamais être la réunion de deux de ses sous-groupes propres (On entendra ici par «sous-groupe propre de G» un sous-groupe de G distinct de G), sinon il existera deux sous-groupes propres H et K de G tels que $G = H \cup K$, alors $H \cup K$ est sous-groupe de G, d'où $H \subset K$ ou $K \subset H$; on aura donc $G = H \cup K = H$ ou K, ce qui est absurde.

2. Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a\mathbb{Z} \cup b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, ceci est équivaut à $a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}$ ou $b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$ ce qui est équivaut aussi à a divise b ou b divise a. Que dire de $5\mathbb{Z} \cup 8\mathbb{Z}$? Comme 5 ne divise pas 8 et 8 ne divise pas 5, alors $5\mathbb{Z} \cup 8\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 2

Soient G un groupe et H une partie non vide de G, finie et stable pour la loi de G.

- Pour montrer que H est un sous-groupe de G, il suffit de montrer qu'il est stable par symmetrisation.
  - Si $H = \{e\}$, alors il est sous-groupe de G.
  - Supposons qu'il existe $a \neq e$ dans H. Comme H est stable pour la loi du groupe G, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a^k \in H$. D'autre part, comme la partie H est finie, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ $(n \geqslant 1)$ tel que $a^n = e$, donc $e \in H$ et $a^{n-1}a = e = aa^{n-1}$, d'où a admet un symétrique dans H qui est a^{n-1}.

- Donnons un contre-exemple à la propriété précédente dans le cas d'une partie H infinie. On sait que $\mathbb{N}$ est une partie non vide et stable de $(\mathbb{Z}, +)$, mais $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, car $2 \in \mathbb{N}$ et $-2 \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 3

Soit G un groupe d'élément neutre e tel pour tout $x \in G$, $x^2 = e$.

- Montrons que G est abélien. Comme pour tout $x \in G$, $x^2 = e$, alors pour tout $x \in G$, $x = x^{-1}$. Soient x, y dans G, alors
  $$xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx,$$
  donc G est abélien.

- Supposons que G est un groupe fini d'ordre n tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = e$. Montrons que n est une puissance de 2. Procédons par récurrence.
  - La propriété est vraie pour $n = 1, 2$.
  - Supposons la propriété vraie pour tout groupe d'ordre $\leqslant n$.
  - Soit G un groupe d'ordre $n + 1$ et vérifiant pour tout $x \in G$, $x^2 = e$. Soit donc $a \in G - \{e\}$, alors a est d'ordre 2 (car $a^2 = e$), donc $\langle a \rangle = \{e, a\}$. Or G est abélien, alors $\langle a \rangle$ est sous groupe normal de G, d'où $G/\langle a \rangle$ est groupe d'ordre
  $$|G/\langle a \rangle| = \frac{|G|}{|\langle a \rangle|} = \frac{n+1}{2} < n,$$
  l'hypothèse de récurrence implique que
  $$|G/\langle a \rangle| = \frac{|G|}{|\langle a \rangle|} = 2^k.$$
  Par suite $n + 1 = |G| = 2^k |\langle a \rangle| = 2^{k+1}$. On déduit le résultat par le principe de récurrence.

Correction de l'exercice 4

1. Soit H un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe G. Donc il y a 2 classes à gauche de G modulo H, il est clair alors que ces classes à gauche sont H et la partie complémentaire de H dans G, car les classes d'équivalences modulo la relation d'équivalence à gauche associée à H forment une

partition de G. De même, les classes à droite modulo H sont H et la partie complémentaire de H dans G. Ainsi, les classes à gauche et les classes à droite suivant H sont identiques, donc H est normal.

2. On sait bien que $Z(G)$ est l'ensemble des éléments g de G qui commutent avec tous les autre éléments de G. Comme $H \subset G$, alors $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, on a $gh = hg$; d'où $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, $ghg^{-1} = h \in H$. Par suite H est normal dans G.

3. Comme H est d'ordre 2 de G, alors $H = \{e, a\}$ pour un certain élément a de $G \setminus \{e\}$. Puisque H est normal dans G, donc $gag^{-1} \in H$ pour tout élément g de G. D'où , pour tout élément g de G, gag^{-1} est égal à e ou à a. Or $a \neq e$, alors il est clair que $gag^{-1} \neq e$, par suite forcement on a $gag^{-1} = a$, c'est-à-dire a commute avec g pour tout $g \in G$. Ceci étant vrai pour tout g dans G, d'où $a \in Z(G)$, donc $H \subset Z(G)$.

4. Soit $a \in G$ d'ordre m, donc par le Théorème de Lagrange m divise l'ordre n de G ; soit alors $k \geqslant 1$ l'entier tel que $n = mk$, d'où $a^n = (a^m)^k = e^k = e$ car $a^m = e$.

Correction de l'exercice 5

Posons $\sigma = (13)$ et $\tau = (12)$, soit le sous-groupe $H = \{id_E, \tau\}$ de S_3. Il est simple de voir que $\sigma^{-1} = (13)^{-1} = (13) = \sigma$, donc $\sigma\tau\sigma^{-1} = (13)^{-1}(12)(13) = (13)(12)(13) = (23)$. Or (23) n'appartient pas au sous-groupe H, il en résulte que ce sous-groupe n'est pas normal dans S_3.

Correction de l'exercice 6

Soit un groupe $(G, \cdot)$ d'élément neutre e, on note par a^{-1} le symétrique d'un élément $a \in G$.

1. Soient H un sous-groupe de G et g un élément de G. Montrons que l'ensemble $H_g = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$ est un sous-groupe de G.

   a. $H_g \neq \emptyset$ car $e \in H$ et $e = geg^{-1} \in H_g$.

   b. Soient x et y deux éléments de H_g, alors il existe h_1 et h_2 dans H tels que $x = gh_1g^{-1}$ et $y = gh_2g^{-1}$; donc

   $$xy^{-1} = (gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1})^{-1} = gh_1g^{-1}gh_2^{-1}g^{-1} = gh_1h_2^{-1}g^{-1} = gh'g^{-1} \in H_g.$$

   Par suite H_g est un sous-groupe de G.

2. Soit l'application $f : \ G \longrightarrow G; a \longmapsto a^{-1}$. Montrons que f est un automorphisme si et seulement si $(G, \cdot)$ est abélien.
   Remarquons que f est bijective pour n'importe quel groupe G. En effet, soient a et b dans G tels que $f(a) = f(b)$, alors $a^{-1} = b^{-1}$, d'où $a = b$. D'autre part, pour tout $b \in G$, il existe $a = b^{-1}$ tel que $f(a) = b$. Par suite f est bijective. Donc

   $$f \text{ est un morphisme si et seulement si } (G, \cdot) \text{ est abélien.}$$

   Soient a et b dans G, alors f est un morphisme si et seulement si $f(ab) = f(a)f(b)$, d'où

   $$\begin{aligned} f(ab) = f(a)f(b) \quad &\Longleftrightarrow (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}, \\ &\Longleftrightarrow (ab)^{-1} = (ba)^{-1}, \\ &\Longleftrightarrow ab = ba. \\ &\Longleftrightarrow \ G \text{ est abélien.} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7

Soient G et G' deux groupes finis d'ordres m et n respectivement. On suppose que $m \wedge n = 1$, montrons que le seul morphisme de groupes f de G vers G' est le morphisme trivial. Soit f un morphisme de G vers G', alors $Im(f)$ est un sous-groupe de G', d'où $|Im(f)|$ divise n l'ordre de G'. Or $m = |G| = |\ker(f)||Im(f)|$, alors $|Im(f)|$ divise aussi m. Donc $|Im(f)|$ divise le pgcd de m et n qui est 1, par suite $|Im(f)| = 1$, c'est-à-dire $Im(f) = \{e'\}$, d'où f est trivial.

Correction de l'exercice 8

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G. Rappelons que $HK = \{hk \mid h \in h \text{ et } k \in K\}$.

1. Montrons que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.
   • Supposons que HK est un sous-groupe de G, alors pour tout $x \in HK$, $x^{-1} \in HK$, et pour tout $y \in HK$, il existe $x \in HK$ tel que $y = x^{-1}$. Donc $(HK)^{-1} = HK$. D'autre part

   $$(HK)^{-1} = \{(hk)^{-1} \mid h \in H, k \in K\} = \{k^{-1}h^{-1} \mid h \in H, k \in K\} = \{k'h'/h' \in H, k' \in K\}$$

(car H et K sont des sous-groupes de G), donc $(HK)^{-1} = KH$, et par suite $HK = KH$.

• Inversement, supposons que $HK = KH$, et montrons que HK est un sous-groupe de G.

- Il est simple de voir que HK est non vide car $e \in K$ et $e \in K$ donc $e = ee \in HK$.
- Soient $x, y \in HK$, alors $x = h_1k_1$ et $y = h_2k_2$ avec $h_i \in H$ et $k_i \in K$. Donc $xy^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1}$, or $(k_1k_2^{-1})h_2^{-1} \in KH = HK$, alors il existe $h' \in H$ et $k' \in K$ tels que $(k_1k_2^{-1})h_2^{-1} = h'k'$, d'où $xy^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} = (h_1h')k' \in HK$.

Par suite HK est un sous-groupe de G.

2. Supposons que H est un sous-groupe normal de G, et montrons que HK est un sous-groupe de G. Comme $H \lhd G$, alors $\forall g \in G$, $gH = Hg$, donc $\forall k \in K$, $kH = Hk$. D'où $HK = KH$, et par suite HK est un sous-groupe de G.

3. Soit H un sous-groupe normal de G, montrons que $H \cap K$ est normal de K. Soient $a \in H \cap K$ et $k \in K$, alors $kak^{-1} \in H$ car $a \in H$ et $H \lhd G$. D'autre part, $a \in K$ et $k^{-1} \in K$, alors $ak^{-1} \in K$; d'où $kak^{-1} \in K$, et par suite $kak^{-1} \in H \cap K$. Mais ceci étant pour tous $a \in H \cap K$ et $k \in K$, alors $H \cap K \lhd K$.

4. Soient H et K deux sous-groupes normaux de G, et L le sous-groupe engendré par $H \cup K$. Montrons que L est normal de G, rappelons que L est l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant $H \cup K$. Comme H et K sont normaux de G, alors ils sont stables par les automorphismes intérieurs, σ_g, de G, c'est-à-dire pour tout $g \in G$, $\sigma_g(H) = H$ et $\sigma_g(K) = K$. Soit $x \in L$, alors $x = \prod_{i=1}^{r} h_ik_i$, où $h_i \in H$, $k_i \in K$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Or pour tout $g \in G$, on a $\sigma_g(h_i) \in H$ et $\sigma_g(k_i) \in K$, donc $\sigma_g(x) \in L$. D'où $\forall g \in G$, $gLg^{-1} \subset L$, c'est-à-dire L est normal de G.

Correction de l'exercice 9

Soient G un groupe et $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de G. On désigne par H le sous-groupe de G engendré par les H_i. Montrons que $\bigcap_{i \in I} N_G(H_i) \subseteq N_G(H)$.

Soit g un élément de G tel que $g \in \bigcap_{i \in I} N_G(H_i)$, c'est-à-dire g normalise tous les H_i (ceci est équivaut à $gH_ig^{-1} = H_i$). Il faut prouver que g normalise H. Désignons par σ_g l'automorphisme $x \mapsto gxg^{-1}$ de G. Il s'agit donc de prouver que H est invariant par σ_g. Or $\sigma_g(H)$ est le sous-groupe de G engendré par les $\sigma_g(H_i)$; puisque g normalise tous les H_i, les $\sigma_g(H_i)$ sont les H_i. Donc $\sigma_g(H)$ est le sous-groupe de G engendré par les H_i, c'est-à-dire est égal à H, donc H est bien invariant par σ_g comme voulu.

Montrons maintenant que l'inclusion réciproque n'est pas forcément vraie.

Soit G un groupe admettant un sous-groupe K non distingué (ce cas existe). Posons $H_1 = K$ et $H_2 = G$, alors le sous-groupe H engendré par H_1 et H_2 est égal au sous-groupe engendré par G, d'où le sous-groupe H engendré par G est G tout entier, c-à-d, $H = G$, donc $N_G(H) = G$ tout entier, or G n'est pas inclus dans $N_G(H_1) = N_G(K)$, donc $N_G(H)$ n'est pas contenu dans $N_G(H_1) \cap N_G(H_2)$.

Correction de l'exercice 10

Soient G_1 et G_2 deux groupes, f un homomorphisme surjectif de G_1 sur G_2. Soit A une partie de G_1. Désignons par $Dist(A)$ le sous-groupe distingué de G_1 engendré par A. Alors montrons que $f(Dist(A))$ est le sous-groupe distingué de G_2 engendré par $f(A)$.

- Montrons d'abord que, par un morphisme surjectif, l'image $f(H)$ d'un sous-groupe H distingué de G_1 est un sous-groupe distingué de G_2. Soient $g' \in G_2$ et $y \in f(H)$, alors il existe $g \in G_1$ et $x \in G_1$ tels que $g' = f(g)$ et $y = f(x)$. Comme $gxg^{-1} \in H$ et f est un morphisme, alors $g'yg'^{-1} = f(gxg^{-1}) \in f(H)$, d'où $f(H)$ est distingué dans G_2.

- Par la même méthode, on montre que l'image réciproque d'un sous-groupe distingué de G_2 est un sous-groupe distingué de G_1.

- Du fait que f est surjectif et $Dist(A)$ est distingué de G_1, alors il résulte que $f(Dist(A))$ est un sous-groupe distingué de G_2. Puisque $Dist(A)$ contient A, $f(Dist(A))$ contient $f(A)$. Ainsi, $f(Dist(A))$ est un sous-groupe distingué de G_2 contenant $f(A)$. Il reste à prouver qu'il est contenu dans tout sous-groupe distingué de G_2 contenant $f(A)$. Soit K un sous-groupe distingué de G_2 contenant $f(A)$. Il s'agit de prouver que K contient $f(Dist(A))$. Puisque K contient $f(A)$, A est contenu dans $f^{-1}(K)$, qui est un sous-groupe distingué de G_1. Donc, par minimalité de $Dist(A)$, $Dist(A)$ est contenu dans $f^{-1}(K)$, autrement dit, $f(Dist(A))$ est contenu dans K, comme voulu.

Correction de l'exercice 11
Soient $(G, .)$ un groupe fini d'ordre $n \geqslant 2$ et H un sous-groupe distingué de G. Donc G/H est un groupe. Notons par m l'ordre de g dans G, alors

$$\overline{g}^m = \overline{g^m} = \overline{e} = H,$$

donc l'ordre de $\overline{g}$ dans G/H est un diviseur de celui de g dans G. D'où le résultat.

Correction de l'exercice 12
Soit un groupe G.

1. On sait bien que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$. Montrons que $\mathrm{Int}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$. Soit $g \in G$, et $\sigma_g : G \longrightarrow G,\ a \longmapsto gag^{-1}$ un automorphisme intérieur de G, alors pour tout $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$ et pour tout $a \in G$ on a :

   $$\tau \circ \sigma_g \circ \tau^{-1}(a) = \tau(\sigma_g(\tau^{-1}(a))) = \tau(g(\tau^{-1}(a))g^{-1}) = \tau(g)(\tau(\tau^{-1}(a)))\tau(g)^{-1} = \tau(g)a\tau(g)^{-1} = \sigma_{\tau(g)}(a).$$

   Par suite pour tous automorphisme intérieur σ_g et automorphisme τ de G on a :

   $$\tau \circ \sigma_g \circ \tau^{-1} = \sigma_{\tau(g)} \in \mathrm{Int}(G).$$

   D'où le résultat.

2. Soit $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Int}(G)$ défini par $\varphi(g) = \varphi_g$ tel que $\varphi_g : G \longrightarrow G,\ x \longmapsto gxg^{-1}$.
   • Montrons que φ est un morphisme de groupes. Soient a, b dans G, alors pour tout $x \in G$ on a :

   $$\varphi(ab)(x) = \varphi_{ab}(x) = (ab)x(ab)^{-1} = abxb^{-1}a^{-1} = a(bxb^{-1})a^{-1} = \varphi_a(bxb^{-1}) = \varphi_a(\varphi_b(x)) = \varphi_a \circ \varphi_b(x).$$

   Par suite pour tous a, b dans G, $\varphi(ab) = \varphi_a \circ \varphi_b = \varphi(a) \circ \varphi(b)$. Et c'est le résultat voulu.
   • Quel est le noyau de φ ? Soit $g \in \ker(\varphi)$, alors $\varphi(g) = \varphi_g = id_G$; donc pour tout $x \in G$, on a :

   $$\varphi_g(x) = id_G(x) = x \Longleftrightarrow gxg^{-1} = x \Longleftrightarrow gx = gx \Longleftrightarrow g \in Z(G).$$

   D'où $\ker(\varphi) = Z(G)$.

3. Remarquons d'abord que φ est surjectif, en effet pour tout $f \in \mathrm{Int}(G)$, f est un automorphisme intérieur, donc il existe $a \in G$ tel que pour tout $x \in G$, $f(x) = axa^{-1} = \varphi_a(x) = \varphi(a)(x)$; d'où $\varphi(a) = f$. D'après le cours on déduit que $G/\ker(\varphi) = G/Z(G)$ est isomorphe à $\mathrm{Int}(G)$.

Correction de l'exercice 13
Soient G un groupe et $D = \{(x, x)|\ x \in G\}$. Il est simple de montrer que D est un sous-groupe de $G \times G$. Montrons que D est distingué de $G \times G$ si et seulement si G est abélien.

($\Longrightarrow$) Supposons que D est normal dans $G \times G$, pour tous a, b et x de G on a :

$$\begin{aligned}(a,b)(x,x)(a,b)^{-1} \in D \quad &\Longrightarrow \exists y \in G; (a,b)(x,x)(a,b)^{-1} = (y,y)\\ &\Longrightarrow (a,b)(x,x)(a^{-1},b^{-1}) = (y,y)\\ &\Longrightarrow (axa^{-1}, bxb^{-1}) = (y,y)\\ &\Longrightarrow y = axa^{-1} \text{ et } y = bxb^{-1}.\end{aligned}$$

Donc pour $b = e$, on a pour tous a, x dans G, $axa^{-1} = x \Longleftrightarrow ax = xa$. Par suite G est abélien.

($\Longleftarrow$) Supposons que G est abélien, alors pour tous a, b et x de G on a :

$$(a,b)(x,x)(a,b)^{-1} = (a,b)(x,x)(a^{-1},b^{-1}) = (axa^{-1}, bxb^{-1}) = (x,x) \in D.$$

D'où D est un sous-groupe distingué de $G \times G$

Correction de l'exercice 14
Soit A une partie non vide d'un groupe G d'élément neutre e. Le normalisateur de A dans G est l'ensemble

$$N(A) = \{g \in G|\ gA = Ag\}$$

et le centralisateur de A dans G est l'ensemble

$$Z(A) = \{g \in G \mid \forall a \in A, ga = ag\}.$$

1. Montrons que $N(A)$ est un sous-groupe de G.

   - $N(A)$ est non vide car $eA = Ae$, donc $e \in N(A)$,
   - Soient a et b dans $N(A)$, alors $abA = aAb = Aab$, d'où $ab \in N(A)$,
   - Pour tout $a \in N(A)$, on a $aA = Aa$, alors $Aa^{-1} = a^{-1}A$, donc $a^{-1} \in N(A)$.
     Par suite $N(A)$ est un sous-groupe de G.

2. Montrons que $Z(A)$ est un sous-groupe distingué de $N(A)$.

   - D'abord, pour tout $g \in Z(G)$, on a pour tout $a \in A$, $ga = ag$, donc $gA = Ag$, c'est qui implique $Z(G) \subset N(A)$.
   - $Z(G)$ est un sous-groupe de G et $Z(G) \subset N(A)$, alors $Z(G)$ est un sous-groupe de $N(A)$.
   - Soient $g \in N(A)$ et $b \in N(A)$. Soit $a \in A$, comme $b^{-1}A = Ab^{-1}$, alors il existe $a' \in A$ tel que

     $$b^{-1}a = a'b^{-1} \Longleftrightarrow ba' = ab.$$

     Donc

     $$bgb^{-1}a = bga'b^{-1} = ba'gb^{-1} = abgb^{-1},$$

     d'où $bgb^{-1} \in Z(G)$. Par suite $Z(G)$ est un sous-groupe normale de $N(A)$.

Correction de l'exercice 15

1. Soit $f : \; G \longrightarrow G'$ un homomorphisme de groupes surjectif. Notons par E_{dG} l'ensemble des sous-groupes distingués de G contenant $\ker(f)$, et par $E_{dG'}$ l'ensemble des sous-groupes distingués de G'. Alors montrons qu'il existe une bijection entre E_{dG} et $E_{dG'}$. Soit la correspondance suivante

   $$\begin{array}{rlll} \varphi : & E_{dG} & \longrightarrow & E_{dG'} \\ & H & \longmapsto & f(H) \end{array}$$

   Comme f est surjective, alors nous avons déjà montrer (voir la correction de l'exercice 10) que $f(H)$ est un sous-groupe distingué de G', donc φ est bien définie.

   - Soient H et H' deux éléments de E_{dG} tels que $\varphi(H) = \varphi(H')$, alors $f(H) = f(H')$. Montrons que $H = H'$. Soit $x' \in H'$, comme $f(H) = f(H')$ alors il existe $x \in H$ tel que $f(x) = f(x')$, on a donc

     $$\begin{array}{rl} f(x) = f(x') & \Longrightarrow f(x')f(x)^{-1} = e' \\ & \Longrightarrow f(x'x^{-1}) = e' \\ & \Longrightarrow x'x^{-1} \in \ker(f) \\ & \Longrightarrow x'x^{-1} \in H, \text{ car } \ker(f) \subset H \\ & \Longrightarrow x' \in Hx \subset H. \end{array}$$

     Par suite $H' \subset H$. De la même façon, on montre que $H \subset H'$, d'où $H = H'$.
   - Soit maintenant K un élément de $E_{dG'}$, comme f est surjective, alors $H = f^{-1}(K)$ est un sous-groupe distingué de G. Il reste à montrer que H contient $\ker(f)$. Pour $x \in \ker(f)$, on a $f(x) = e' \in K$, donc $x \in f^{-1}(K) = H$. C'est-à-dire que H contient $\ker(f)$. Par suite φ est surjective, et donc bijective.

2. Soit le cas suivant : G est un groupe, $H \lhd G$, $G' = G/H$ et $f = \pi$ la surjection canonique. On sait bien que $\ker(\pi) = H$, donc par la question précédente, il existe une bijection entre l'ensemble des sous-groupes distingués de G contenant H et l'ensemble des sous-groupes distingués de $G' = G/H$. Si T est un sous-groupe distingué de $G' = G/H$, il existe donc K un sous-groupe distingué de G contenant H tel que $\pi(K) = T$. Or $\pi(K) = \{kH \mid k \in K\} = K/H$, alors $T = K/H$.

Correction de l'exercice 16

Soient H, K deux sous-groupes d'un groupe fini G, montrons que $\text{card}(HK) = \dfrac{|H||K|}{|H \cap K|}$. Rappelons que $HK = \{hk \mid h \in H \text{ et } k \in K\}$.*

Comme H et K sont des sous-groupes de G, alors $I = H \cap K$ est un sous-groupe des groupes H, K et G. Donc $card(K/I)_d = m = \frac{|K|}{|I|} = [K : I]$. Soient $\{Ik_1, Ik_2, \cdots, Ik_m\}$ les classes de K à droite modulo I, il est bien connu que ces classes forment une partition de K, donc

$$K = \coprod_{i=1}^{m}(Ik_i) \quad \text{(la réunion disjointe).}$$

Montrons que la famille $\{Hk_1, Hk_2, \cdots, Hk_m\}$ forme une partition de HK.

- Soit $x \in Hk_i \cap Hk_j$, alors il existe h, h' dans H tels que $x = hk_i = h'k_j$, donc

$$\begin{aligned} hk_i = h'k_j \quad & \Longrightarrow h^{-1}h' = k_i k_j^{-1} \\ & \Longrightarrow h^{-1}h' = k_i k_j^{-1} \in I = H \cap K \text{ car } h^{-1}h' \in H \text{ et } k_i k_j^{-1} \in K \\ & \Longrightarrow Ik_i = Ik_j \\ & \Longrightarrow i = j \text{ car les classes } Ik_i \text{ et } Ik_j \text{ sont disjointes.} \end{aligned}$$

  Par suite les éléments de la famille $\{Hk_1, Hk_2, \cdots, Hk_m\}$ sont disjoints deux à deux.

- Il est simple de voir que $\bigcup_{i=1}^{m} Hk_i \subset HK$; montrons la réciproque. Soit $hk ß HK$, alors puisque $k \in K$, il existe $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ tel que $Ik = Ik_i$. Donc il existe $h' \in I = H \cap K$ vérifiant $k = h'k_i$, d'où $hk = hh'k_i \in Hk_i \subset \bigcup_{i=1}^{m} Hk_i$. Ceci implique que $HK \subset \bigcup_{i=1}^{m} Hk_i$, et par suite

$$HK = \bigcup_{i=1}^{m} Hk_i.$$

Rappelons d'abord que $card(Hk_i) = |H|)$, alors ce que nous venons de montrer implique que

$$card(HK) = \sum_{i=1}^{m} card(Hk_i) = \sum_{i=1}^{m} card(H) = m|H|.$$

Or $m = \frac{|K|}{|I|} = m = \frac{|K|}{|H \cap K|}$, alors

$$card(HK) = m|H| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}.$$