Université Mohammed Premier
Faculté Pluridisciplinaire
Nador

Chapitre 4 : MATRICES

Prof. Kaoutar LAMRINI UAHABI

Département de Mathématiques et Informatique

Filières : Sciences Mathématiques et Applications (SMA)

Sciences Mathématiques et Informatique (SMI)

Semestre : S2

Module : ALGEBRE 3

Année universitaire : 2019-2020

CHAPITRE 4. MATRICES

1. Matrices associées aux applications linéaires

Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, tels que $\dim E = p$ et $\dim E' = n$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ une base de E' et $f : E \longrightarrow E'$ une application linéaire. Supposons que les images par f des vecteurs $e_1, e_2, ..., e_p$ se décomposent sur la base $\mathcal{B}'$ comme suit :

$$\begin{array}{l} f(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + ... + a_{n1}e'_n \\ f(e_2) = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + ... + a_{n2}e'_n \\ \vdots \\ \vdots \\ f(e_p) = a_{1p}e'_1 + a_{2p}e'_2 + ... + a_{np}e'_n. \end{array}$$

Definitions.

- On appelle *matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$* le tableau rectangulaire de nombres, noté $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$, ..., $f(e_p)$ dans la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$.

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

- Une *matrice A de type (n,p)*, ou *de dimension $n \times p$*, est un tableau de nombres comportant n lignes et p colonnes. Ces nombres sont appelés *coefficients* de la matrice. On peut aussi noter $A(n,p)$.

- L'élément $a_{ij} \in \mathbb{K}$ de la matrice se trouve à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne.

- La matrice A s'écrit également $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n,\\ 1\leq j\leq p}}$, ou plus simplement $A = (a_{ij})$.
- L'ensemble des matrices de type (n, p) sur $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Le vecteur $u_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ip})$ est le $i^{ème}$ *vecteur ligne* de la matrice A.
- Le vecteur $v_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj})$ est le $j^{ème}$ *vecteur colonne* de la matrice A.
- Une matrice de type $(n, 1)$ est une *matrice colonne.*
- Une matrice de type $(1, p)$ est une *matrice ligne.*

Remarque. La matrice associée à l'application linéaire $f : E \longrightarrow E'$ dépend du choix des bases de E et de E'.

Exemples.

1) La matrice associée à l'application nulle $f : x \in E \longmapsto 0_{E'}$ est *la matrice nulle*, notée 0. C'est la matrice dont tous les coefficients sont des zéros.

2) Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, qui à tout vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ associe l'image $(x - y, z - y)$. Notons par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et par $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. En calculant $f(e_i)$, $i = 1, 2, 3$ dans la base $\mathcal{B}'$, on obtient $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition. L'application

$$\begin{aligned} M : \mathcal{L}(E, E') &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \end{aligned}$$

est bijective.

Autrement dit,

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \exists! f \in \mathcal{L}(E, E') \text{ telle que } M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = A.$$

f est l'application linéaire associée à la matrice A relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Corollaire. Deux applications f et g de $\mathcal{L}(E, E')$ sont égales si et seulement si $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$.

Expression matricielle d'une application linéaire.

Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, tels que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ est une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ est une base de E'. Soient $f \in \mathcal{L}(E, E')$,

$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ et $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_pe_p$ un vecteur de E. f étant linéaire, il s'ensuit que

$$f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \ldots + x_p f(e_p). \qquad (1)$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est le vecteur des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ est le vecteur des coordonnées de $f(x)$ dans $\mathcal{B}'$.

La relation (1) s'écrit matriciellement sous la forme $Y = AX$.

2. Opérations sur les matrices

2.1. Addition de matrices

Définition. Soient deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ toutes deux de type (n, p). On additionne terme à terme pour obtenir la matrice somme :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

La matrice $A + B$ est une matrice de type (n, p).

Remarque. La somme $A + B$ n'est définie que si les matrices A et B sont du même type.

Exemples.

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Les matrices A et B étant du même type $(3, 2)$, la somme $A + B$ est donc possible et elle est de type $(3, 2)$. On a $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. La somme $A + B$ n'est pas définie.

Définition. La matrice de type (n, p) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée *la matrice nulle*. Elle est notée 0_{np} ou tout simplement 0; c'est l'élément neutre pour l'addition.

Propriétés. Soient A, B et C trois matrices de type (n, p) et 0 la matrice nulle du même type. On a :

i) $(A+B)+C = A+(B+C)$. *(Associativité)*
ii) $A+B = B+A$. *(Commutativité)*
iii) $A+0 = 0+A = A$. *(Élément neutre)*
iv) $A+(-A) = (-A)+A = 0$. *(Opposé)*

Remarque. La matrice opposée de $A = (a_{ij})$ est $-A = (-a_{ij})$. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

2.2. Multiplication d'une matrice par un scalaire

Définition. Soient $A = (a_{ij})$ une matrice de type (n,p) et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit la matrice $\lambda.A$ comme matrice dont tous les coefficients sont multipliés par le scalaire λ :

$$\lambda.A = (\lambda.a_{ij}).$$

La matrice $\lambda.A$ est aussi de type (n,p).

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 3$. Alors $\lambda.A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 18 \\ -6 & 15 & 9 \end{pmatrix}$.

Remarque. $-A = (-1).A$, c.à.d. $\lambda = -1$.

Propriétés. Soient A et B deux matrices de type (n,p) et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a :
i) $\lambda.(A+B) = \lambda.A + \lambda.B$.
ii) $(\lambda+\mu).A = \lambda.A + \mu.A$.
iii) $(\lambda\mu).A = \lambda(\mu.A)$.
iv) $1.A = A$ et $0.A = 0_{np}$.

Proposition.

i) L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de type (n,p), muni de la loi de composition interne $+$ (addition de matrices) et de la loi de composition externe $.$ (multiplication d'une matrice par un scalaire) est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

ii) La bijection

$$\begin{aligned} M : \mathcal{L}(E,E') &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Preuve.

i) Elle découle immédiatement des propriétés ci-dessus de l'addition de matrices et de la multiplication par un scalaire définies précédemment.

ii) On vérifie facilement que pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E,E')$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$$
$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda.f) = \lambda.M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

2.3. Multiplication de matrices

Remarque. Le produit AB de deux matrices A et B n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Définition. Soient $A = (a_{ik})$ une matrice de type (n,p) et $B = (b_{kj})$ une matrice de type (p,q). Le produit $C = AB$ des deux matrices est une matrice de type (n,q) définie par :

$$C = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n,\\ 1\leq j\leq q}} \quad \text{avec} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}.$$

Règle de calcul. Le terme c_{ij} de la matrice produit AB est obtenu en multipliant terme à terme et en sommant la $i^{ème}$ ligne de A, c.à.d. $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix}$ par la $j^{ème}$ colonne de B, c.à.d. $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix}$.

Application. Cas de deux matrices A et B de type $(2,2)$:
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. La matrice produit $C = AB$ est

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Exemples.

1) $\underset{\text{type } (2,3)}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\text{type } (3,2)}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}} = \underset{\text{type } (2,2)}{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}}.$

2) $\underset{\text{type } (2,1)}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \underset{\text{type } (1,3)}{\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}} = \underset{\text{type } (2,3)}{\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}}.$

$$\textbf{3)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = (12).$$

type $(1,5)$ type $(5,1)$ type $(1,1)$

Remarque. En général, la multiplication de deux matrices n'est pas commutative, en effet,

- Si AB existe, BA n'existe pas forcément.
- Si BA existe, alors, généralement $AB \neq BA$.

Exemple. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propriétés. Soient les matrices suivantes $A(n,p)$, $B(p,q)$, $C(q,s)$, $D(p,q)$ et $E(q,n)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

i) $(AB)C = A(BC)$. (*Associativité*)

ii) $A(B+D) = AB + AD$. (*Distributivité à gauche*)

iii) $(B+D)E = BE + DE$. (*Distributivité à droite*)

iv) $\lambda.(AB) = (\lambda.A)B = A(\lambda.B)$.

2.4. Transposition d'une matrice

Définition. Pour toute matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle *matrice transposée de* A, la matrice notée ${}^tA$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A, c.à.d. ${}^tA = (a_{ji})_{\substack{1\leq j\leq p \\ 1\leq i\leq n}}$.

En particulier, la transposée d'une matrice ligne est une matrice colonne et réciproquement, c.à.d.

$${}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

Exemple. La transposée de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice ${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriétés. Soient les matrices $A\,(n,p)$, $B\,(n,p)$ et $C\,(p,q)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

i) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.

ii) ${}^t({}^tA) = A$.

iii) ${}^t(\lambda A) = \lambda.\,{}^tA$.

iv) ${}^t(AC) = {}^tC\,{}^tA$.

Exemples.

1) La somme des deux matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ est la matrice $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. Sa transposée est ${}^t(A+B) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

D'autre part,

$${}^tA + {}^tB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = {}^t(A+B).$$

2) Le produit des deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice $AC = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$. Sa transposée est ${}^t(AC) = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. D'un autre côté, ${}^tC.{}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = {}^t(AC)$.

3. Matrices carrées, matrices remarquables

3.1. Matrices carrées

Définition. Une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes, c'est à dire de type (n,n), est appelée *matrice carrée*, on dit qu'elle est d'ordre n. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque. Rappelons que l'addition et la multiplication de matrices ne sont

pas définies pour des matrices quelconques. Or, si on considère uniquement des matrices carrées d'ordre donné n, alors les opérations d'addition, de multiplication, de multiplication par un scalaire et de transposition sont définies et leurs résultats sont encore des matrices d'ordre n.

Exercice. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre 3 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que : $A + B$, $-2A$, ${}^tA$ et AB sont des matrices carrées d'ordre 3.

3.2. Matrices diagonales

Définition. On appelle *diagonale* (ou *digonale principale*) d'une matrice carrée d'ordre n, les éléments a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} de la matrice. Ces éléments sont appelés *éléments diagonaux.*

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Les coefficients a_{11}, a_{22}, a_{33} sont les éléments de la diagonale de A.

Définition. Une matrice carrée $D = (d_{ij})$ d'ordre n est dite *diagonale* si tous ses éléments non diagonaux sont nuls, elle est notée $D = diag\,(d_{11}, d_{22}, ..., d_{nn})$.

Exemples. $D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $D_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ sont des matrices diagonales.

3.3. Matrice Identité

Définition. On appelle *matrice Identité*, ou *matrice unité*, notée I_n, la matrice $(\delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

désigne le symbôle de Kronecker.

Autrement dit, la matrice Identité I_n est une matrice carrée d'ordre n ne comportant que des 1 sur sa diagonale principale et des 0 partout ailleurs.

Exemples. $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ... etc.

Propriété. Pour toute matrice carrée A d'ordre n, on a

$$A.I_n = I_n.A = A.$$

De façon générale, on a :

Propriété. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a

$$A.I_p = I_n.A = A.$$

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$. On a $A.I_2 = I_3.A = A$.

Remarque. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E. On considère $id_E : E \longrightarrow E$ l'application qui à x associe x. On a :

$$M_{\mathcal{B}}(id_E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

La matrice associée à l'application identique de E est exactement la matrice Identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition. La matrice $\lambda.I_n$, pour tout scalaire λ de $\mathbb{K}$, est appelée *matrice scalaire*. C'est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont tous égaux à λ.

Exemple. $\lambda.I_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ est une matrice scalaire d'ordre 3.

3.4. Matrices inversibles

Définition. Une matrice carrée A d'ordre n est dite *inversible* s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $AB = BA = I_n$.

Une telle matrice B est unique, d'ordre n, on la note $B = A^{-1}$, appelée *matrice inverse de A*.

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, appelé *groupe linéaire d'ordre n*.

Remarque. La relation précédente est symétrique, c.à.d. si B est l'inverse de A, alors A est l'inverse de B.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3.

$B = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de A. En effet, $A.B = B.A = I_3$.

3.5. Matrices carrées remarquables

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) A est dite matrice *symétrique* si et seulement si ${}^tA = A$, c'est à dire $\forall i \neq j$, $a_{ij} = a_{ji}$.

Exemple. La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 5 & 1 & 8 \\ -1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique.

b) A est dite matrice *antisymétrique* si et seulement si ${}^tA = -A$, c'est à dire $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$, $a_{ij} = -a_{ji}$.

Exemple. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont des matrices antisymétriques.

Remarque. Les éléments diagonaux a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} d'une matrice $A = (a_{ij})$ antisymétrique sont tous nuls.

c) A est dite matrice *triangulaire* si tous ses éléments au-dessous (ou au-dessus) de sa diagonale sont nuls.

Exemples. **1)** La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

2) La matrice $N = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

3.6. Trace d'une matrice carrée.

Définition. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit *la trace de* A, notée $tr(A)$, par $\quad tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -4 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & -8 \end{pmatrix}$. La trace de A est

$$tr(A) = 1 + 5 - 8 = -2.$$

Propriétés. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

i) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

ii) $tr(\lambda A) = \lambda . tr(A)$.

iii) $tr({}^tA) = tr(A)$.

iv) $tr(AB) = tr(BA)$.

4. Changement de bases

4.1. Matrice de l'inverse d'une application linéaire

Proposition. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, de bases respectives $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On a :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) . M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

Proposition. Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension n et de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On a :

$f \in \mathcal{L}(E, E')$ est bijective si et seulement si $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible.

De plus, $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = (M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f))^{-1}$.

Preuve. Comme $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$, alors

$$M_{\mathcal{B}'}(f \circ f^{-1}) = M_{\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = I_n.$$

Par suite, $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}).M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = I_n$.
Il en résulte que $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = (M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f))^{-1}$.

4.2. Changement de bases

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ deux bases de E.

Définition. On appelle *matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$*, la matrice P carrée d'ordre n dont les colonnes sont formées des composantes des vecteurs $e'_1, ..., e'_n$ de $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$. La matrice P se note aussi $Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Exemple. On considère l'e.v. $E = \mathbb{R}^2$, muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et de la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$, avec $e'_1 = (4, -2)$ et $e'_2 = (5, -1)$. On a $e'_1 = 4e_1 - 2e_2$ et $e'_2 = 5e_1 - e_2$. Alors, la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Proposition. Pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de l'espace vectoriel E, la matrice da passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E)$, où id_E est l'application identité de E.

Interprétation. Pour tout $i = 1, ..., n$, la $i^{ème}$ colonne de P est l'expression du vecteur e'_i dans la base $\mathcal{B}$. P est donc la matrice de l'application identité de E, quand on munit au départ E de la base $\mathcal{B}'$ et à l'arrivée de la base $\mathcal{B}$.

Propriétés. soient E un espace vectoriel et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ des bases de E.

i) $Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}'') = PassPass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \,.\, Pass(\mathcal{B}', \mathcal{B}'')$.

ii) $Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = I_n$.

iii) $Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est une matrice inversible et $(Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}'))^{-1} = Pass(\mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Proposition. Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, $x \in E$, $X = M_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = M_{\mathcal{B}'}(x)$. Alors

$$X = PX' \qquad \text{et} \qquad X' = P^{-1}X.$$

Exemple. Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et de la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$, avec $e'_1 = (-2, 5)$ et $e'_2 = (1, -7)$. Soient $x \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(x)$, $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}'}(x)$. On a $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x'_1 + x'_2 \\ 5x'_1 - 7x'_2 \end{pmatrix}$.

Théorème. (Formule de changement de bases pour une application linéaire)
Soient E et E' deux espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, E')$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de E' et $Q = Pass(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$.
Si $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $A' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$, alors $\mathbf{A'} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AP}$.

Définition. Deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites *équivalentes* s'il existe deux matrices $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles telles que $A' = Q^{-1}AP$.

Proposition. (Formule de changement de bases pour un endomorphisme)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.
Si $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = M_{\mathcal{B}'}(f)$, alors $\mathbf{A'} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$.

Définition. Deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $A' = P^{-1}AP$.

5. Rang d'une matrice

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *rang de la matrice* A et on note $rg(A)$, le rang de la famille des vecteurs lignes de A.
Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(L_1, L_2, ..., L_n)$ la famille des vecteurs lignes de A et $(C_1, C_2, ..., C_p)$ la famille des vecteurs colonnes de A.
- On appelle *rang ligne de la matrice* A l'entier naturel défini par :

$$rg(L_1, L_2, ..., L_n) = \dim[vect(L_1, L_2, ..., L_n)].$$

- On appelle *rang colonne de la matrice* A l'entier naturel suivant :

$$rg(C_1, C_2, ..., C_p) = \dim[vect(C_1, C_2, ..., C_p)].$$

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
i) Le rang ligne et le rang colonne de la matrice A sont égaux.
ii) Le rang $rg(A)$ de la matrice A est la valeur commune du rang ligne et du rang colonne de A.

Remarque. Le rang d'une matrice est le nombre maximum de ses vecteurs lignes linéairement indépendants. C'est aussi le nombre maximum de ses vecteurs colonnes linéairement indépendants.

Propriétés.

i) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $rg(A) \leq \min(n,p)$.

ii) Pour toute matrice A, on a $rg(A) = rg({}^tA)$.

iii) Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Proposition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. On a :

$$rg(A) = rg(f).$$

Remarques.

• Le rang d'une application linéaire f est le rang de n'importe quelle matrice représentant f.

• Le rang d'une matrice A est le rang de n'importe quelle application linéaire représentée par A.

Méthode pratique de calcul du rang d'une matrice.

L'une des méthodes pratiques pour calculer le rang d'une matrice est la méthode d'échelonnement de Gauss. En effectuant les opérations élémentaires sur les lignes (ou bien sur les colonnes) d'une matrice A, on aboutit finalement à une matrice B échelonnée équivalente à A. Les deux matrices A et B sont de même rang, qui est égal au nombre de pivots de la matrice B (Voir chapitre 1 des systèmes d'équations linéaires).

Exemples. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$\textbf{1)}\ A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & 17 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \\ L_4 + L_1 \\ L_5 - 3L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + 5L_2 \\ L_4 + 8L_2 \\ L_5 + 11L_2 \end{array} . \quad \text{Donc} \quad rg(A) = 2.$$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 + L_1 \end{matrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + L_2 \\ L_4 + L_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 - 2L_3 \end{matrix}.$$

D'où $rg\,(B) = 3$.

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Sur cet exemple, essayons d'appliquer la propriété $rg\,(C) = rg\,({}^tC)$. Effectuons alors les opérations élémentaires (o.e.) sur les lignes de ${}^tC$.

$${}^tC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 \\ L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ -L_2 \\ L_3 \\ L_4/2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \\ L_4 + L_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 + \frac{1}{2}L_3 \end{matrix}.$$ Alors $rg\,(C) = 3$.