Université Mohamed Premier
Faculté Pluridisciplinaire
Nador

Analyse Numérique

Exercices Corrigés

Filière SMI+SMA (S4)

Professeur : Zakaria El Allali et Abdelaziz Chetouani

Table des matières

Chapitre 1

Calcul Approché des Zéros d'une fonction

Exercice 1 *Parmi les fonctions suivantes lesquelles sont contractantes et sur quel intervalles si celui-ci n'est pas indiqué :*

(a) $g(x) = 5 - \frac{1}{4}\cos(3x),\ 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$;

(b) $g(x) = 2 + \frac{1}{2}|x|,\ -1 \leq x \leq 1$;

(c) $g(x) = \frac{1}{x},\ x \in [2, 3]$;

(d) $g(x) = \sqrt{x+2}$.

Exercice 2 *Voir si chacune des fonctions suivantes admet zero, un ou plusieurs points fixes, puis donner pour chacun un intervalle de separation :*

(a) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

(b) $g(x) = e^{-x}$.

(c) $g(x) = (x-2)^2 + x - \frac{e^x}{\pi}$.

(d) $g(x) = x + (x-2)^3$.

Exercice 3 *On considère le problème de calculer* $\sqrt{2}$*. Cela revient à trouver le zéro positif* $\alpha = \sqrt{2}$ *de la fonction* $f(x) = x^2 - 2$*, c'est-à-dire à résoudre une équation non linéaire.*
Vérifier que $\alpha = \sqrt{2}$ *est un point fixe de la fonction*

$$g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{2}$$

Ensuite, prouver que pour $x^{(0)} \in [1, 2]$*, il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$|x^{(k)} - \alpha| \leq C^k |x^{(0)} - \alpha| \qquad \forall k > 0$$

Quel est le comportement de la suite $\{x^{(k)}\}$ *lorsque* $k \to \infty$ *? Combien d'itérations de la méthode de point fixe sont nécessaires pour trouver une valeur approchée de* $\sqrt{2}$ *qui soit exacte jusqu'au dixième chiffre après la virgule ? (Suggestion : il faut avoir une estimation de la constante* C.

Exercice 4 *Soit la fonction* $F(x) = 2x^3 - x - 2$, *on se propose de trouver les racines réelles de* F *par la méthode des approximations successives.*
Montrer que F *possède une seule racine réelle* $\overline{x} \in [1, 2]$.
Etudier la convergence des trois méthodes itératives suivantes : $x_0 \in [1, 2]$ *donné et*

- **(a)** $x_{n+1} = 2x_n^3 - 2$.
- **(b)** $x_{n+1} = \dfrac{2}{2x_n^2 - 1}$.
- **(c)** $x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + \dfrac{x_n}{2}}$.

Si l'une de ces méthodes converge l'utiliser pour déterminer $\overline{x}$ *à* 10^{-3} *près.*

Exercice 5 *Soit l'équation* $x = \ln(1 + x) + 0.2$ *dans* $\mathbb{R}^+$.
Montrer que la méthode itérative définie par g(x) = ln(1+x)+0.2 est convergente (vérifier les hypothèses du théorème du point fixe). Choisir x_0, *condition initiale de l'itération, dans l'intervalle de convergence puis trouver* x *limite de la suite. Donner l'ordre de la méthode.*

Exercice 6 *On veut calculer les solutions de l'équation*

$$f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x) + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

dans l'intervalle $[\frac{-\pi}{2}, \pi]$. *D'après le graphe de* f, *on a deux zéros* $\alpha_1 \in I_1 = [\frac{-\pi}{2}, 0]$ *et* $\alpha_1 \in I_2 = [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

1. *Peut-on appliquer la méthode de la bissection pour calculer les deux racines ? Pourquoi ? Dans le cas où cela est possible, estimer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour calculer le(s) zéro(s) avec une tolérance* 10^{-10} *sur les intervalles* I_1 *et* I_2.
2. *Ecrire la méthode de Newton pour la fonction* f. *A l'aide du graphe de la fonction* f, *trouver pour quel zéro l'ordre de convergence de la méthode est égal à 2.*
3. *On considère maintenant la méthode de point fixe* $x_{k+1} = g(x_k)$, *avec*

$$g(x_k) = \sin(x_k) + \frac{x_k}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

pour calculer le zéro $\alpha_2 \in I_2$. *Etablir si cette méthode de point fixe est*

- *localement convergente, c.-à-d. la méthode converge vers α_2 pourvu que x_0 soit assez proche de α_2 ;*
- *globalement convergente sur I_2, c.-à-d. la méthode converge pour tout $x_0 \in I_2$. Pour ce faire, considérer le graphe de la fonction $g(x)$ sur l'intervalle I_2.*

4. *On considère le zéro α_2 la méthode de point fixe précédente. Montrer qu'il existe une constante positive $0 < C < 1$ telle que*

$$|x_{k+1} - \alpha_2| \leq C|x_k - \alpha_2|$$

et calculer cette constante.

5. *On considère les itérations x_k de la méthode de point fixe , initialisée avec $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Montrer que, à partir de l'inégalité du point précédent, on a*

$$|x_k - \alpha_2| \leq C^k|x_0 - \alpha_2|.$$

puis utiliser ce résultat pour trouver le nombre d'itérations nécessaire pour que l'erreur $|x_k - \alpha_2|$ soit plus petite que 2^{-20}.

Exercice 7 *Soit α une racine double de la fonction f, c-à-d $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$*

1. *En tenant compte du fait qu'on peut écrire la fonction f comme*

$$f(x) = (x - \alpha)^2 h(x) \quad \text{où} \quad h(\alpha) \neq 0,$$

vérifier que la méthode de Newton pour l'approximation de la racine α est seulement d'ordre 1.

2. *On considère la méthode de Newton modifiée suivante :*

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - 2\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

Vérifier que cette méthode est d'ordre deux si l'on veut approcher α.

Exercice 8 **1.** *Déterminer la suite des premiers 3 itérés des méthodes de dichotomie dans l'intervalle $[1, 3]$ et de Newton avec $x_0 = 2$ pour l'approximation du zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$.*

2. *Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = exp(x^2) - 4x^2$. On se propose de trouver les racines réelles de f.*

2.1. *Situer les 4 racines de f (i.e. indiquer 4 intervalles disjoints qui contiennent chacun une et une seule racine).*

2.2. *Montrer qu'il y a une racine α comprise entre 0 et 1.*

2.3 *Soit la méthode de point fixe*

$$x_{k+1} = \phi(x_k),\ x_0 \in]0,1[,$$

avec ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \dfrac{\sqrt{\exp(x^2)}}{2}$. Examiner la convergence de cette méthode et en préciser l'ordre de convergence.

2.4 *Écrire la méthode de Newton pour la recherche des zéros de la fonction f.*

2.5 *Entre la méthode de Newton et la méthode de point fixe (1), quelle est la plus efficace ? Justifier la réponse.*

3. *Combien de pas de dichotomie on doit effectuer pour améliorer d'un ordre de grandeur la précision de l'approximation de la racine ?*

Solutions

Exercice 1

(a) $g(x) = 1 - \frac{1}{5}\sin(4x), x \in \mathbb{R}$.
Montrons que g est contractante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) = -\frac{4}{5}\cos(4x) \quad \text{et} \quad |g'(x)| \leq \frac{4}{5},$$

donc, d'après le cours, g est contractante de rapport de contraction inférieur ou égal à $\frac{4}{5}$.

(b) $g(x) = 2 + \frac{1}{2}|x|, x \in [-1,1]$.
Soient $x, y \in [-1,1]$, montrons que $|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$ et le rapport de contraction est $k = \frac{1}{2}$.

(c) $g(x) = \dfrac{1}{x},\ x \in [2,3]$.
On a :

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad 4 < x^2 < 9 \Leftrightarrow \frac{1}{9} < |-\frac{1}{x^2}| < \frac{1}{4}$$

donc, $\forall x \in [2,3] \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{4}$.
Ainsi, g est contractante de rapport $k < \frac{1}{4}$.

(d) $g(x) = \sqrt{x+2}$.
g est définie sur $I = [-2, +\infty[$ mais n'y est pas lipschitzienne.
En effet, g est lipschitzienne sur I s'il existe une constante réelle $L > 0$, telle que $\forall (x,y) \in I^2, |g(x) - g(y)| \leq L|x-y|$, c'est à dire que le rapport

$|\dfrac{g(x)-g(y)}{x-y}|$, pour $x \neq y$, est borné.
Posons $y=-2$. Ce rapport vaut

$$|\frac{g(x)-g(-2)}{x+2}| = \frac{\sqrt{x+2}}{x+2} = \frac{1}{\sqrt{x+2}} \to +\infty \quad \text{quand} \quad x \to -2,$$

donc non bornable sur tout intervalle contenant -2 ; ainsi g ne peut être lipschitzienne sur $[-2,+\infty[$.
En fait, on montre que g est lipschitzienne sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > -2$. Sur cette intervalle, $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{a+2}}$. Donc g est lipschitzienne de constatnte $L \leq \dfrac{1}{2\sqrt{a+2}}$.
En outre, g est contractante si $L<1$, donc si $\dfrac{1}{2\sqrt{a+2}} < 1$, c'est à dire pour $a > -\dfrac{7}{4}$.
En conclusion, g est contractante sur $]-\dfrac{7}{4},+\infty[$.

Exercice 2

(a) Points fixes de $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Rappelons qu'un point fixe de g est un point d'abscisse $\overline{x}$ vérifiant $g(x)=x$. Par abus de langage, et dans tous les exercices qui suivent, on dira que x est le point fixe g (au lieu de l'abscisse du point fixe de g).
Ici g est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a

$$g(x) = x \Rightarrow x\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1.$$

$x=1$ est clairement la seule solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de cette équation et est par conséquent le seul point fixe de g.
Démontrons le autrement :

$$g(x) = x \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - x = 0 \Rightarrow x\sqrt{x} - 1 = 0 \text{ et } x > 0.$$

Posons $F(x) = x\sqrt{x}-1$; F est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $F'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} > 0$, donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. D'autre part, $F(0,1) < 0$ et $F(2) \geq 0$, donc $F(0,1)F(2) < 0$. Ainsi, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un et un seul réel $c \in [0.1, 2]$ tel que $F(c) = 0$; celui-ci est donc le seul point fixe de g sur $[0.1, 2]$. Le lecteur pourra aisément démontrer que cela reste vrai sur tout $\mathbb{R}^{+*}$

(b) Points fixes de $g(x) = e^{-x}$.
Posons $F(x) = e^{-x} - x$. F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $F'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$, donc F est strictement décroissante. D'autre part, $F(0) = 1 > 0$ et $F(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$. D'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un et un seul réel $c \in [0, 1]$ tel que $F(c) = 0$ ce réel est donc l'unique point fixe de g sur $[0, 1]$. De même, on peut aisément démontrer que cela reste vrai sur tout $\mathbb{R}$.

(c) Points fixes de $g(x) = (x-2)^2 + x - \frac{e^x}{\pi}$.

$$g(x) = x \Rightarrow (x-2)^2 = \frac{e^x}{\pi}.$$

Appliquons le théorème de la valeur intermédiaire à

$$F'(x) = (x-2)^2 - \frac{e^x}{\pi}$$

F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$F"(x) = 2(x-2) - \frac{e^x}{\pi}.$$

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}\ F'(x) < 0$.
Pour cela, on étudie le signe de $F"$, on a

$$F"(x) = 2 - \frac{e^x}{\pi} > 0 \Rightarrow e^x < 2\pi \Rightarrow x < \ln(2\pi).$$

En conséquence, $F"$ est strictement croissante sur $]-\infty, \ln(2\pi)[$ et $F'(\ln(2\pi)) < 0$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}\ F'(x) < 0$, donc F est strictement décroissante . D'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un et un seul réel $c \in [A, \ln(2\pi)]$ tel que $F(c) = 0$. Ce dernier est l'unique point fixe de g.

(d) Points fixes de $g(x) = x + (x-2)^3$.

$$g(x) = x \Rightarrow (x-2)^3 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Donc 2 est l'unique point fixe de g sur $\mathbb{R}$; ce point fixe est dit triple à cause de la puissance 3 du terme $(x-2)$.

Exercice 3

Il faut utiliser la proprieté suivante, qui a été prouvée au cours.

Proposition 1.0.1 *Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1([a,b])$, et soit $\alpha \in [a,b]$ un point fixe de g(c-à-d. $g(\alpha) = \alpha$). Une fois $x^{(0)} \in [a,b]$ assigné, on considère les itérations de point fixe*

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}).$$

On suppose que les hypothèses suivantes soient satisfaites :
H.1 *L'image de $[a,b]$ selon g est un sous-ensemble de $[a,b]$ (c-à-d. $g : [a,b] \to [a,b]$;*
H.2 *Il existe une constante C telle que $0 < C < 1$ et que*

$$|g'(x)| < C \quad \forall x \in [a,b].$$

Alors on a

$$|x^{(k+1)} - \alpha| \leq C|x^{(k)} - \alpha| \qquad \forall k > 0$$

Les points fixes de $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{2}$ sont les racines de

$$x = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 2,$$

donc $\alpha = \sqrt{2}$ est bien un point fixe de g.
Or, le graphe de la fonction $-\dfrac{1}{4}x^2 + x + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}(x-2)^2 + \dfrac{3}{2}$ c'est une parabole, qui atteint son maximum en $x = 2$. Cette parabole est donc croissante sur $[1,2]$, ce qui peut être vérifiée aussi en calculant la dérivée $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{2-x}{2} \quad \text{si} \quad x \in [1,2]$$

Donc on aura

$$g(1) = \frac{5}{4} \leq g(x) \leq g(2) = \frac{3}{2} \quad \forall x \in [1,2],$$

ce qui montre que l'hypothèse H1 est satisfaite (l'image de $[1,2]$ selon g est $[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$ qui est un sous-ensemble de $[1,2]$).
De plus, on a que :

$$x \in [1,2] \Rightarrow |g'(x)| \leq \frac{1}{2},$$

donc H.2 est satisfaite avec $C = \frac{1}{2}$.
Il est clair que l'on peut appliquer l'inégalité $|x^{(k)} - \alpha| \leq C|x^{(k-1)} - \alpha|$ en récurrence. On obtient

$$|x^{(k)} - \alpha| \leq C|x^{(k-1)} - \alpha| \leq C^2|x^{(k-2)} - \alpha| \leq \ldots \leq C^k|x^{(0)} - \alpha|.$$

Comme $0 < C < 1$, on a $C^k \to 0$ quand $k \to \infty$, donc

$$\lim_{k\to\infty} |x^{(k)} - \alpha| = 0.$$

c'est-à-dire

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \alpha.$$

En d'autres mots, la suite $\{x^{(k)}\}$ converge vers le point fixe $\alpha = \sqrt{2}$. On remarque que l'opération d'extraction de racine carrée n'est pas nécessaire pour calculer les valeurs approchées $x^{(k)}$; on a donc trouvée une méthode pour implementer l'opération $\sqrt{.}$ à partir des opérations fondamentales (l'ordinateur aussi fait la même chose, mais en utilisant un algorithme optimisé beaucoup plus performant).
Comme $|x^{(0)} - \alpha| \leq 1$, on a

$$|x^{(k)} - \alpha| \leq C^k = 2^{-k}.$$

Alors on aura que $|x^{(k)} - \alpha| <$ tolérance pourvu que $2^{-k} <$ tolérance, voir $k > -\log_2(\text{tolérance})$. La tolérance à demander si l'on veut que l'approximation soit exacte jusq'au après la virgule est clairement 10ème chiffre après la virgule est clairement 10^{-10}. Ceci nous permet de trouver le nombre d'itérations nécessaires : c'est le plus petit naturel k tel que $k > -\log_2(10^{-10}) = 10\log_2(10)$, donc $k = 34$.

Exercice 4

Soit l'equation $F(x) = 2x^3 - x - 2$. Il est clair que F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a $F(1) = -1, F(2) = 12$, donc $F(1)F(2) < 0$. D'autre part $F'(x) = 6x^2 - 1 \geq 0$ sur $[1, 2]$. Donc, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe une seule solution $\overline{x} \in [1, 2]$ telle que $F(\overline{x}) = 0$.

(a) Etudions la convergence de la suite $x_{n+1} = g(x_n) = 2x_n^3 - 2$. Tout d'abord , cette suite, si elle converge, conduit bien à une racine de $F(x) = 0$ car si $\overline{x}$ est la limite de la suite (x_n), alors

$$\overline{x} = 2\overline{x}^3 - 2 \quad \text{donc} \quad F(\overline{x}) = 2\overline{x}^3 - \overline{x} - 2 = 0.$$

Par ailleurs, $g_1'(x) = 6x^2 \geq 6$ sur $[1, 2]$. Par conséquent, grâce au théorème des accroissements finis, il existe ξ_n compris entre x_n et x_{n+1} tel que

$$|g_1(x_{n+1}) - g_1(x_n)| = g_1'(\xi_n)|x_{n+1} - x_n|.$$

Donc

$$\begin{aligned} |g_1(x_{n+1}) - g_1(x_n)| &\geq 6|x_{n+1} - x_n| \\ &\geq 6^2|x_n - x_{n-1}| \\ &\vdots \\ &\geq 6^n|x_1 - x_0| \end{aligned}$$

Ainsi, cette suite diverge et la méthode est à rejeter.

(b) Etudions la convergence de $x_{n+1} = g_2(x_n) = \dfrac{2}{2x_n^2 - 1}$. Cette méthode, si elle converge conduit vers la racine $\overline{x}$ de $F(x)$ dans $[1, 2]$, car si $\overline{x}$ est la limite de la suite (x_n) ,alors

$$\overline{x} = \frac{2}{2\overline{x}^2 - 1} \quad \text{donc} \quad F(\overline{x}) = 2\overline{x}^3 - \overline{x} - 2 = 0.$$

$$g_2'(x) = \frac{-8x}{(2x^2 - 1)^2}$$

$$g_2''(x) = \frac{8(6x^2 + 1)}{(2x^2 - 1)^3}$$

En conséquence, on ne peut conclure sur la monotonie de g_2.Ce pendant on a

$$g_2'(\overline{x}) = -\frac{8\overline{x}}{(2\overline{x}^2 - 1)^2}.$$

Or $\overline{x}$ le point fixe de F vérifie

$$\frac{2}{2\overline{x}^2 - 1} = \overline{x}.$$

Donc $g_2'(\overline{x}) = -2\overline{x}^3$, et comme g_2' est continue, il existe un voisinage V de $\overline{x}$ tel que $V \subset [1, 2]$, et $\forall x \in V, |g_2'(x)| > 2$. Donc cette méthode ne peut pas converger.

(c) Etudions la convergence de $x_{n+1} = g_3(x_n) = \sqrt[3]{1 + \dfrac{x_n}{2}}$. . Si elle converge, cette méthode conduit à la racine de $F(x) = 0$ dans $[1, 2]$ car si $\overline{x}$ est la limite de la suite (x_n), alors

$$\overline{x} = \sqrt[3]{1 + \frac{\overline{x}}{2}} \quad \text{donc} \quad \overline{x}^3 = 1 + \frac{\overline{x}}{2} \quad \text{donc} \quad F(\overline{x}) = 2\overline{x}^3 - \overline{x} - 2 = 0.$$

0n a

$$0 < g_3'(x) = \frac{1}{6\sqrt[3]{(1 + \frac{x}{2})^2}} < 1.$$

donc est strictement contractante. D'autre part, $g_3(1) = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}} > 1$, $g_3(2) = \sqrt[3]{2} < 2$, or g_3 est monotone donc $g_3([1, 2]) \subset [1, 2]$. Donc d'après le théorème du point fixe , la suite $x_0 \in [1, 2], x_{n+1} = g_3(x_n)$converge vers l'unique racine $\overline{x} \in [1, 2]$ de l'équation $g_3(x) = x$.

Calcul numérique de cette racine à 10^{-3} près, à partir de $x_0 = 1$.

n	0	1	2	3	4
x_n	1	1,144	1.162	**1,165**	**1,165**

Donc $\overline{x} = 1,165$ est solution de l'équation à 10^{-3} près.

Exercice 5

Soit l'équation $x = \ln(1+x) + 0,2$ dans $\mathbb{R}^+$.
Considérons la méthode itérative définie par :

$$x_{n+1} = g(x_n) = \ln(1+x_n) + 0.2$$

Montrons d'abord l'existence d'une solution pour cette équation.
Soit $F(x) = \ln(1+x) + 0.2 - x$, on a $F'(x) = \dfrac{-x}{1+x} < 0$ sur $\mathbb{R}^+$, donc l'équation $F(x) = 0$ admet au plus une racine. D'autre part on a $F(0) = 0,2 > 0$ et $F(1) = \ln(2) - 0,8 < 0$, donc $F(0)F(1) < 0$; ainsi d'après le théorème de la valeur intermédiare, il existe une unique racie $\overline{x} \in [1,2]$ solution de l'équation $F(x) = 0$.
Appliquons la Méthode du point fixe pour $g(x) = \ln(1+x) + 0.2$.
g est contractante sur $I = [a,b] \subset]0,1]$ car

$$\forall x \in I, 0 < g'(x) = \frac{1}{1+x} < 1.$$

Donc, si $g([a,b]) \subset [a,b]$, d'après le théorème du point fixe, il existe une unique racine $\overline{x} \in [a,b]$ solution de l'équation $F(x) = 0$. Par exemple, on vérifie que $g([0.7, 0.8]) \subset [0,7; 0,8]$. En effet $g(0,7) = 0,73\ldots > 0,7$ et $g(0,8) = 0,78\ldots < 0.8$. Calcul numérique de cette racine à 10^{-2} et 10^{-3} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_n	0,7	0,730	0,748	0,758	0,**76**4	0,**76**7	0,769	0,770	0,**771**	0,**771**

Ainsi la racine cherchée est $\overline{x} = 0,76$ à 10^{-2} près, et $\overline{x} = 0,771$ à 10^{-3} près.

Exercice 6

1. On peut bien appliquer la méthode de la bissection pour calculer le zéro $\alpha_2 \in I_2$, mais on ne peut pas utiliser cette méthode pour calculer α_1, car la condition $f(a).f(b) < 0$ n'est pas satisfaite pour tout $a, b \in [-\frac{\pi}{2}, \alpha_2], a < b$.
On considère donc le deuxième zéro $\alpha_2 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$), et on applique la méthode de la bissection pour trouver une valeur approchée, avec une tolérance $tol =$

10^{-10}. Pour estimer le nombre d'itérations nécessaires, il suffit d'appliquer la formule vue au cours.

$$|e_k| \leq |x_k - \alpha_2| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}},$$

avec $a = \pi/2$ et $b = \pi$, et imposer la condition $\dfrac{b-a}{2^{k+1}} \leq 10^{-10}$. Donc $k = 30$.

2. Dans ce cas la méthode de Newton s'écrit :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\frac{x_k}{2} - \sin(x_k) + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - \cos(x_k)}.$$

On a vu au cours que l'ordre de convergence de la méthode de Newton est 2, pourvu que f' ne s'annule pas au zéro de f. En particulier dans notre cas :
- zéro α_2 : f étant deux fois différentiable, avec $f(\alpha_2) = 0$ et $f'(\alpha_2) \neq 0$, la convergence est quadratique ($p = 2$) ;
- zéro α_1 : f étant deux fois différentiable, avec $f(\alpha_1) = 0$ mais $f'(\alpha_1) = 0$, (on voit sur le graphe que α_1 est un maximum local pour la fonction f), la convergence sera seulement linéaire ($p = 1$).

3. Pour que l'on ait une convergence locale de la méthode de point fixe vers α_2, il faut que α_2 soit effectivement un point fixe de g, et que $|g'(\alpha_2)| < 1$.
D'abord on vérifie que α_2 est un point fixe de $g(x)$. En effet :

$$\begin{aligned}
g(\alpha_2) &= \sin(\alpha_2) + \frac{\alpha_2}{2} - (\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \sin(\alpha_2) + \frac{\alpha_2}{2} - (\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_2}{2} \\
&= -\frac{\alpha_2}{2} + \sin(\alpha_2) - (\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}) + \alpha_2 \\
&= -f(\alpha_2) + \alpha_2 = \alpha_2,
\end{aligned}$$

où à la dernière ligne on a utilisé le fait que $f(\alpha_2) = 0$.
Puis, on considère la dérivée $g'(x) = \cos(x) + 1/2$; comme $-1 \leq \cos(x) \leq 0 \quad \forall x \in [\pi/2, \pi]$, on a que

$$-\frac{1}{2} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2} \qquad \forall x \in [\pi/2, \pi] = I_2. \tag{1.1}$$

En particulier, comme $\alpha_2 \in I_2$, on a $|g'(\alpha_2)| < 1/2$: la méthode est donc localement convergente.
- Pour que la méthode soit globalement convergente sur I_2, il faut que
a) g soit une fonction de I_2 en soit même ($g : I_2 \rightarrow I_2$).
b) on ait

$$\max_{x \in I_2} |g'(x)| < 1.$$

D'après le graphe de $g(x)$ on voit tout de suite que la condition a) est vérifiée ; la b) est satisfaite aussi, grâce à (1.1) ; en particulier on a

$$\max_{x \in I_2} |g'(x)| = \frac{1}{2}.$$

4. Grâce au développement de Taylor de g, on trouve que

$$|x_{k+1} - \alpha_2| \leq \max_{x \in I_2} |g'(x)||x_k - \alpha_2|,$$

donc on a la formule suivante pour la constante C :

$$C = \max_{x \in I_2} |g'(x)| = \frac{1}{2}.$$

5. Si l'on applique l'inégalité du point 4) en récurrence on trouve :

$$|x_k - \alpha_2| \leq C^k |x_0 - \alpha_2|.$$

Dans notre cas, $C = 1/2$; l'inégalité que l'on vient de vérifier nous dit que, pour que l'erreur soit plus petite que 2^{-20}, il suffit de trouver k tel que

$$(\frac{1}{2})^k |x_0 - \alpha_2| < 2^{-20}.$$

Comme $\pi/2 < \alpha_2 < \pi$, on a $|x_0 - \alpha_2| = |\pi/2 - \alpha_2| < \pi/2 < 2$; donc il suffit que k soit assez grand pour que

$$2^{-k}.2 < 2^{-20}.$$

c'est-à-dire $k \geq 21$ itérations sont nécessaires.

Exercice 7

1. On regarde la méthode de Newton comme une méthode de point fixe :

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) = x^{(k)} - 2\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}.$$

Si $0 < |g'(\alpha)| < 1$ la méthode est d'ordre 2, tandis que si $g'(\alpha) = 0$ elle est d'ordre 2.
On a

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f"(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f"(x)}{f'(x)^2}$$

où

$$f(x) = (x-\alpha)^2 h(x)$$
$$f'(x) = (x-\alpha)[2h(x) + (x-\alpha)h'(x)]$$
$$f"(x) = 2h(x) + 4(x-\alpha)h'(x) + (x-\alpha)^2 h"(x).$$

Donc

$$\begin{aligned} g'(x) = \frac{f(x)f"(x)}{f'(x)^2} &= \frac{(x-\alpha)^2 h(x)[2h(x) + 4(x-\alpha)h'(x) + (x-\alpha)^2 h"(x)]}{(x-\alpha)^2[2h(x) + (x-\alpha)h'(x)]^2} \\ &= \frac{h(x)[2h(x) + 4(x-\alpha)h'(x) + (x-\alpha)^2 h"(x)]}{[2h(x) + (x-\alpha)h'(x)]^2}. \end{aligned}$$

On voit que $g'(\alpha) = 1/2$ et la méthode est donc d'ordre 1.

2. Pour la méthode de Newton modifiée, on a

$$g(x) = x - 2\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$g'(x) = -1 + 2\frac{f(x)f"(x)}{f'(x)^2}$$

On vient de calculer le terme $\dfrac{f(x)f"(x)}{f'(x)^2}$ et on a vu qu'il converge vers 1/2 si $x \to \alpha$; on a finalement

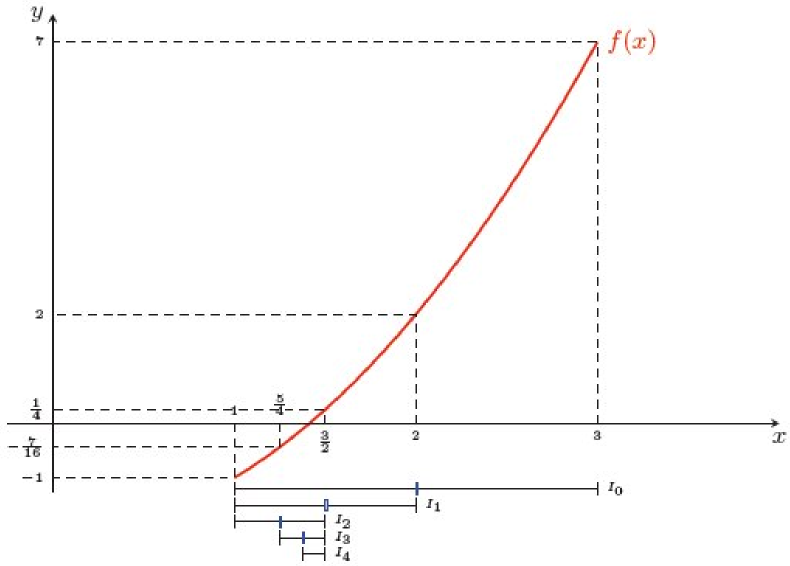
$$g'(\alpha) = -1 + 2.\frac{1}{2} = 0$$

La méthode est donc d'ordre 2.

Exercice 8

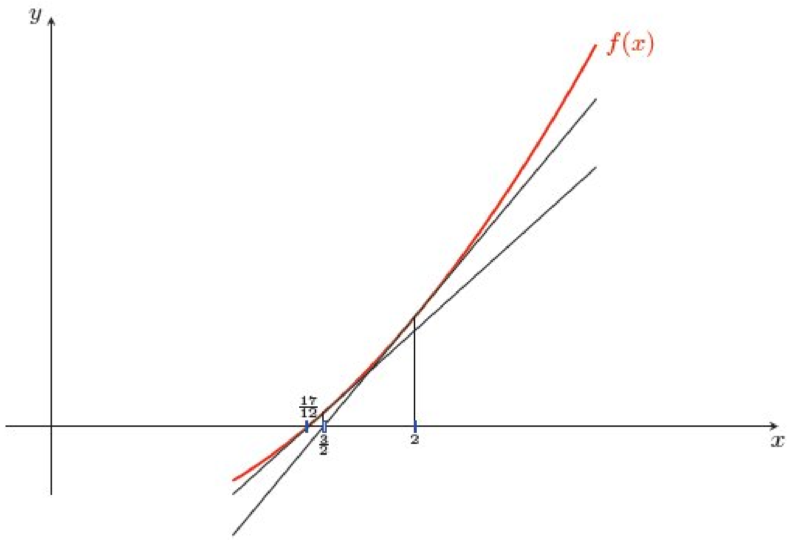
1. On cherche les zéros de la fonction $f(x) = x^2 - 2$.
Méthode de la dichotomie : en partant de $I_0 = [a, b]$, la méthode de la dichotomie produit une suite de sous-intervalles $I_k = [a_k, b_k]$ avec $I_{k+1} \subset I_k$ et tels que $f(a_k)f(b_k) < 0$. Plus précisément

- on pose $a_0 = a, b_0 = b, x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$,
- pour $k \geq 0$
  - Si $f(a_k)f(x_k) < 0$ on pose $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k$ sinon on pose $a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k$.
  - et on pose $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$



Méthode de Newton :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{x_k}.$$



Donc on a le tableau suivant

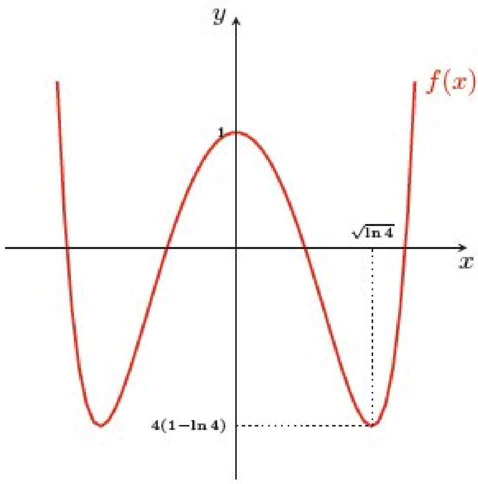
	Dichotomie	Newton
x_0	2	2
x_1	$\frac{3}{2} = 1{,}5$	$\frac{3}{2} = 1{,}5$
x_2	$\frac{5}{4} = 1{,}25$	$\frac{17}{12} = 1{,}41\bar{6}$
x_3	$\frac{11}{8} = 1{,}375$	$\frac{17}{24} + \frac{12}{17} \simeq 1{,}4142156$

2. On cherche les zéros de la fonction $f(x) = \exp(x^2) - 4x^2$.

2.1. On remarque que $f(-x) = f(x)$: la fonction est paire. On fait donc une brève étude sur $[0; +\infty[$:

- $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,
- $f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = \sqrt{\ln 4}$ et $f(\sqrt{\ln 4}) = 4(1 - \sqrt{\ln 4}) < 0$; f est croissante pour $x > \sqrt{\ln 4}$ et décroissante pour $0 < x < \sqrt{\ln 4}$.

  Le graphe de f sur $\mathbb{R}$ est donc le suivant

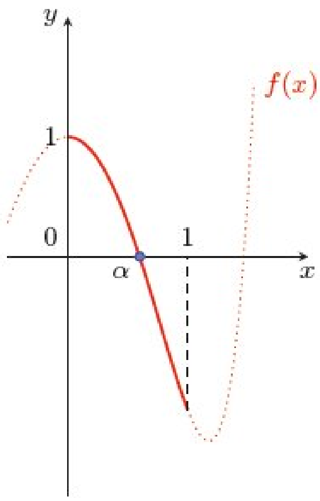


On a

- une racine dans l'intervalle $]-\infty, -\sqrt{\ln 4}[$,
- une racine dans l'intervalle $]-\sqrt{\ln 4}, 0[$,
- une racine dans l'intervalle $]0, \sqrt{\ln 4}[$,
- une racine dans l'intervalle $]\sqrt{\ln 4}, +\infty[$.

2.2. Puisque $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = e - 4 < 0$, pour le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins un $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$. Puisque $f'(x) = 2x\exp(x^2) - 8x = 2x(\exp(x^2) - 2^2) < 2x(e - 4) < 0$ pour tout

$x \in]0,1[$, ce α est unique.



2.3. Étude de la convergence de la méthode (1) :

2.3.1. On vérifie d'abord la CN pour tout $\alpha \in]0,1[$:

$$\alpha = \phi(\alpha) \Leftrightarrow 2\alpha = \sqrt{\exp(\alpha^2)} \Leftrightarrow 4\alpha^2 = \exp(\alpha^2) \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha.$$

2.3.2. vérifions maintenant les CS :

2.3.2.1. pour tout x dans $]0,\ 1[$ on a

$$0 < \sqrt{\frac{\exp(x^2)}{4}} < \sqrt{\frac{e}{4}} < 1$$

donc $\phi :]0,1[\rightarrow]0,1[$;

2.3.2.2. $\phi \in \mathcal{C}^1(]0,1[)$;

2.3.2.3. pour tout x dans $]0,1[$ on a

$$|\phi'(x)| = |\frac{x\sqrt{\exp(x^2)}}{2}| = |x\phi(x)| < |x| < 1$$

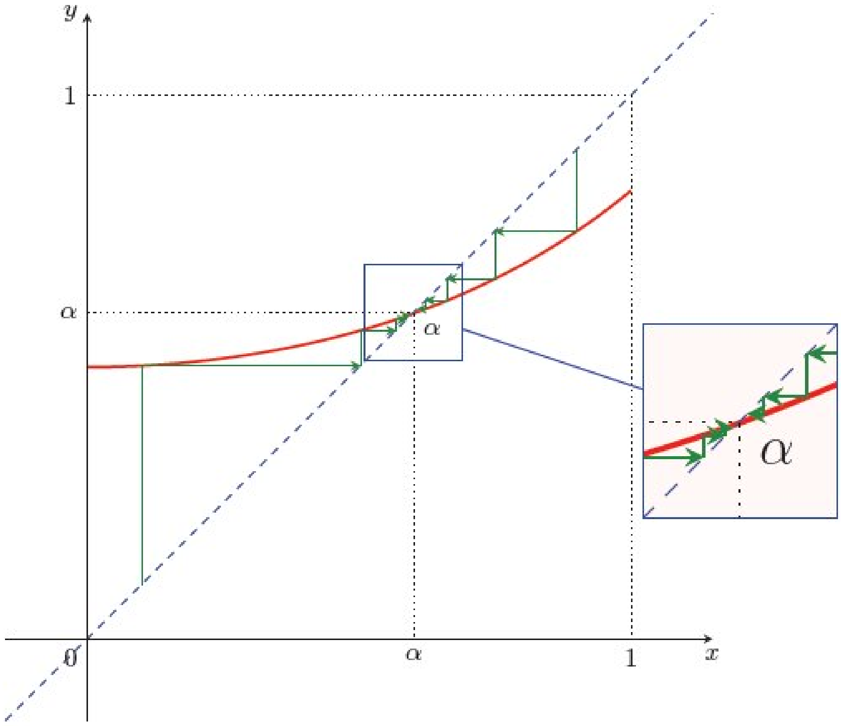
donc ϕ est contractante.

Alors la méthode (1) converge vers α point fixe de ϕ et zéro de f.

De plus, étant donné que

$$\phi'(\alpha) = \alpha\phi(\alpha) = \alpha^2 \neq 0.$$

La méthode de point fixe (1) converge seulement à l'ordre 1.



2.4. La méthode de Newton est une méthode de point fixe avec $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Ici donc elle s'écrit

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{\exp(x_k^2) - 4x_k^2}{2x_k \exp(x_k^2) - 8x_k} = \frac{\exp(x_k^2) - 4x_k^2}{2x_k(\exp(x_k^2) - 4)}.$$

2.5. Puisque α est une racine simple de f, la méthode de Newton converge à l'ordre 2 tandis que la méthode de point fixe (1) converge seulement à l'ordre 1 : la méthode de Newton est donc plus efficace.
On rappelle qu'avec la méthode de la dichotomie, les itérations s'achèvent à la m-ème étape quand $|x_m - \alpha| \leq |I_m| < \varepsilon$, où ε est une tolérance fixée et $|I_m|$ désigne la longueur de l'intervalle I_m. Clairement $I_k = \frac{b-a}{2^k}$, donc pour avoir $|x_m - \alpha| < \varepsilon$ on doit prendre

$$m \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} - 1.$$

Améliorer d'un ordre de grandeur la précision de l'approximation de la racine signifie avoir

$$|x_k - \alpha| = \frac{|x_j - \alpha|}{10}$$

donc on doit effectuer $k - j = \log_2(10) \simeq 3,3$ itérations de dichotomie.

Chapitre 2

Résolution numérique des systèmes linéaires

Exercice 9 *Soit le système linéaire suivant*

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 7 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = & 4 \end{cases}$$

1. *Résoudre ce système par la méthode de Gauss.*
2. *Factoriser la matrice A du système en produit LU où L est une matrice triangulaire inférieure (avec des 1 sur la diagonale principale) et U triangulaire supérieure, puis résoudre ce système.*

Exercice 10 *On considère le système linéaire $Ax = b$ où :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer la factorisation LU de la matrice A.*
2. *Résoudre le système linéaire $Ax = b$ en utilisant la factorisation trouvée au point précédent.*
3. *Calculer le déterminant de la matrice A en utilisant sa factorisation LU (Sugg. on sait que $det(A) = det(LU) = det(L).det(U)$).*

Exercice 11 *On veut résoudre le système linéaire $Ax = b$, où*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad et \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

par la méthode d'élimination de Gauss.

1. *Vérifier que l'algorithme de Gauss ne peut pas être exécuté jusqu'au bout.*
2. *Trouver une matrice de permutation P telle que la matrice PA soit factorisable. Ecrire le système linéaire équivalent à $Ax = b$ (c.-à-d. ayant la même solution x) qui a PAcomme matrice associée.*
3. *Appliquer l'algorithme de Gauss à la matrice PA, et calculer la factorisation LU de PA.*
4. *Calculer x en résolvant le système linéaire équivalent du point 2., à partir de la factori- sation trouvée et en utilisant les algorithmes de substitution progressive et rétrograde.*

Exercice 12 *Soit $A(a)$ où $a \in \mathbb{R}$, la matrice suivante :*

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$$

1. *Déterminez les matrices $L(a)$ et $U(a)$ telles que $A(a) = L(a)U(a)$. Pour quelles valeurs de a, $A(a)$ admet-elle une factorisation LU ?*
2. *Pour ces valeurs de a déterminez le rang de $A(a)$, une base de l'image et du noyau de $A(a)$. Pour quelles valeurs de $b \in \mathbb{R}^3$, le système $(A(a)x = b)$ admet t-il une solution (que vous préciserez) ?*
3. *Lorsque $A(a)$ n'admet pas de factorisation LU, déterminez la matrice échelonnée réduite $R(a)$ Gauss-équivalente à $A(a)$.*
*(***Rappel :** *Une matrice appelée matrice échelonnée réduite si elle a les propriétés suivantes :*
- Dans toute ligne non-nulle, le premier élément non-nul vaut 1. Il est appelé le 1 directeur .
-Les lignes dont tous les éléments sont nuls sont regroupées en bas de la matrice.
- Dans deux lignes successives ayant des éléments non nuls, le 1 directeur de la ligne inférieure se trouve à droite du 1 directeur de la ligne supérieure.
-Toute colonne contenant un 1 directeur à des zéros partout ailleurs. Exemple : matrice identité.)
4. *Déterminez alors le rang de $A(a)$, une base de l'image et du noyau de $A(a)$.*

Exercice 13 *Soient a et b deux nombres réeels, et soit $A(a, b)$ la matrice :*

$$A(a,b) = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b & b \\ a & 0 & b & 1 \end{bmatrix}$$

1. *Appliquez l'algorithme de Gauss sans échange à $A(a,b)$. Pour quelles valeurs de a et b, $A(a,b)$ admet-elle une factorisation LU ?*
2. *Pour ces valeurs de a et b, déeterminez le rang de $A(a,b)$, une base de l'image et du noyau de $A(a,b)$. Vous préciserez chacune des étapes de votre raisonnement.*
3. *Lorsque $A(a,b)$ n'admet pas de factorisation LU, pour quelles valeurs de a et b, existe-t-il une matrice échelonnée réduite $R(a,b)$ gauss-équivalente à $A(a,b)$?*
4. *Déterminez alors le rang de $A(a,b)$, une base de l' image et du noyau de $A(a,b)$.*

Solutions

Exercice 9

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 7 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = & 4 \end{cases}$$

Ce système s'écrit sous la forme $AX = B$, où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Posons $A^{(1)} = A$, on calcule $A^{(2)} = M^{(1)}A^{(1)}$, où

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

on calcule $A^{(3)} = M^{(2)}A^{(2)}$, où

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

La matrice $A^{(3)}$ est ainsi triangulaire supèrieure, c'estla matrice U recherchée. D'autre part, ona $A^{(3)} = M^{(2)}M^{(1)}A^{(1)}$, on en déduit donc que

$$A^{(1)} = \underbrace{(M^{(1)})^{-1}(M^{(2)})^{-1}}\underbrace{A^{(3)}} = LU.$$

Ainsi $A = A^{(1)} = LU$, avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

Ona ainsi factorisé sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

Présantation de la méthode d'identification
Résoudre $AX = B$ revient à résoudre $LUX = B$. On pose alors $Y = UX$, la résolution du système initial revient à resoudre successivement les deux systèmes triangulaires :$LY = B$ et $UX = Y$

$$LY = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{17}{3} \\ \frac{15}{7} \end{pmatrix}$$

Finalement, on résout

$$UX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{17}{3} \\ \frac{15}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

On résout d'abord $Ly = b$ ensuite $Ux = y$, on obtient $x_1 = 3, x_2 = -2$ et $x_3 = 1$. On utilise la relation $\det(A) = \det(L)\det(U)$ en remarquant que le déterminant d'une matrice triangulaire est donné par le produit des éléments diagonaux. Donc

$$\det(A) = 1.10 = 10.$$

Exercice 11

1. On considère la matrice de la premièere étape de la méthode de Gauss (factorisation LU) :

$$A^{(1)} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{31}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix}$$

On calcule les multiplicateurs :

$$l_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 2 \quad \text{et} \quad l_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 4.$$

et on définit

$$\begin{aligned} a_{22}^{(2)} &= a_{22}^{(1)} - l_{21}a_{12}^{(1)} = 0 \\ a_{23}^{(2)} &= a_{23}^{(1)} - l_{21}a_{13}^{(1)} = 3 \\ a_{32}^{(2)} &= a_{32}^{(1)} - l_{31}a_{12}^{(1)} = 2 \\ a_{33}^{(2)} &= a_{33}^{(1)} - l_{31}a_{13}^{(1)} = 4. \end{aligned}$$

On parvient donc à la matrice suivante :

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

On voit que le pivot $a_{22}^{(2)} = 0$. Donc on ne peut pas continuer la méthode d'élimination de Gauss.

2. Si l'on multiplie la matrice A à gauche par la matrice de permutation

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

l'effet est de permuter la deuxième et la troisième ligne de la matrice A :

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Le système linéaire équivalent devient $PAx = \widetilde{b}$, avec $\widetilde{b} = Pb = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. On applique l'algorithme de Gauss à la matrice $\widetilde{A}^{(1)} = PA$:

$$\widetilde{A}^{(1)} = PA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{l}_{21} = \frac{\widetilde{a}^{(1)}_{21}}{\widetilde{a}^{(1)}_{11}} = 4 \quad \text{et} \quad \widetilde{l}_{31} = \frac{\widetilde{a}^{(1)}_{31}}{\widetilde{a}^{(1)}_{11}} = 2,$$

et on trouve

$$\begin{aligned} \widetilde{a}^{(2)}_{22} &= \widetilde{a}^{(1)}_{22} - \widetilde{l}_{21}\widetilde{a}^{(1)}_{12} = 2 \\ \widetilde{a}^{(2)}_{23} &= \widetilde{a}^{(1)}_{23} - l_{21}\widetilde{a}^{(1)}_{13} = 4 \\ \widetilde{a}^{(2)}_{32} &= \widetilde{a}^{(1)}_{32} - l_{31}\widetilde{a}^{(1)}_{12} = 0 \\ \widetilde{a}^{(2)}_{33} &= \widetilde{a}^{(1)}_{33} - l_{31}\widetilde{a}^{(1)}_{13} = 3. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\widetilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice triangulaire supérieure : en particulier la dernière étape de la méthode se réduit tout simplement à $\widetilde{A}^{(3)} = \widetilde{A}^{(2)}$, le dernier multiplicateur $\widetilde{l}_{32} = \widetilde{a}^{(2)}_{32}/\widetilde{a}^{(2)}_{22}$, étant égal à zéro. On peut donc réecrire la matrice PA du départ sous la forme $PA = LU$, où U est la matrice triangulaire supérieure $\widetilde{A}^{(3)}$,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

et L est la matrice triangulaire inférieure qui contient au dessous de la diagonale principale les multiplicateurs que l'on a utilisés :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. On résout le système $LUx = \widetilde{b}$ de la façon suivante :

$$Ly = \widetilde{b} \qquad \text{et} \qquad Ux = y$$

Puisque L est une matrice triangulaire inférieure, on applique l'algorithme de substitution progressive et on trouve $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Puis, on utilise l'algorithme de substitution rétrograde pour résoudre le système $Ux = y$ et on obtient la solution du système : $x = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 12

1. On applique l'algorithme de Gauss sans échange :

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \to A(a)^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$$

$$\to A(a)^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 1$, $A(a)$ admet une factorisation LU avec

$$U(a) = A(a)^{(2)} \quad \texttt{et} \quad L(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Supposons $a \neq 1$, alors $A(a)$ est inversible et :
- $\texttt{rg}A(a) = 3$.
- une base de l'image de $A(a)$ est constituée des colonnes $1, 2, 3$ de $A(a)$.
- $N(A(a)) = \{O\}$.
- $\forall b$, le système $A(a)x = b$ admet une solution unique $x = A^{-1}b$.

3. Cas $a = 1$

Ici on cherche la matrice échelonnée réduite associée à $A(1)$. Elle est unique , toutes les transformations de Gauss sont bonnes pour l'obtenir , en particulier on peut utiliser les calculs précédents ...

$$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où

$$R(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.
- $A(1)$ n'admet pas de factorisation LU
- $\texttt{rg}$(R(1))=$\texttt{rg}$(A(1))=2
- Une base de l'image de $R(1)$ (resp. de $A(1)$) est constituée des colonnes 1 et 2 de $R(1)$ (resp. de A(1)),

- Une base de N(R(1)) = N(A(1)) est $\overrightarrow{n}_1 = (0, -\frac{1}{2}, 1)$.
- Le système $(A(1)x = b)$ a une solution si et seulement si b appartient à l'image de $A(1)$, c'est à dire si $c_1 A_1 + c_2 A_2 = b$. Matriciellement ce système s'écrit :
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 3 & 4 & b_2 \\ 4 & 2 & b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -2 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 2 & b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -2 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & b_3 + b_2 - 3b_1 \end{pmatrix}$$
Ce dernier système, Gauss-équivalent au système initial a une solution si et seulement si $b_3 + b_2 - 3b_1 = 0$.
- Si les coordonnées de $b = (b_1, b_2, b_3)$ vérifient la condition $b_3 + b_2 - 3b_1 = 0$ la solution générale du système $(A(1)x = b)$ est :

$$x = (2b_1 + b_2, \frac{3}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2, 0) + c(0, -\frac{1}{2}, 1) \quad \texttt{où} \quad c \quad \texttt{est un paramétre réel.}$$

Exercice 13

1. Si $a \neq 0$ on peut appliquer l'algorithme de Gauss :

$$A(a,b) = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b & b \\ a & 0 & b & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ l_2 \rightarrow l_2 - l_1 \\ l_3 \rightarrow l_3 - l_1 \\ l_4 \rightarrow l_4 - l_1 \end{matrix}$$

$$\text{Si} \quad a \neq 0, \quad A(a,b)^{(1)} = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & -a & -a & -a \\ 0 & -a & b-a & b-a \\ 0 & -a & b-a & 1-a \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ l_3 \rightarrow l_3 - l_2 \\ l_4 \rightarrow l_4 - l_2 \end{matrix}$$

$$\text{Si} \quad a \neq 0, \quad A(a,b)^{(2)} = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & -a & -a & -a \\ 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & b & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ l_4 \rightarrow l_4 - l_3 \end{matrix}$$

$$\text{Si} \quad a \neq 0 \quad \text{et} \quad b \neq 0, \quad A(a,b)^{(3)} = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & -a & -a & -a \\ 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 1-b \end{bmatrix}$$

En conclusion si $a \neq 0, b \neq 0, b \neq 1$, $A(a,b)$ admet une factorisation LU :

$$U(a,b) = A(a,b)^{(3)} \qquad \text{et} \qquad L(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Lorsque $a \neq 0, b \neq 0, b \neq 1$ $A(a,b)$ est inversible donc :
- $\mathtt{rg}(A(a,b)) = 4$
- une base de l'image de $A(a,b)$ est constituée des colonnes de $A(a,b)$,
- $N(A(a,b)) = \{O\}$

3. Cas particuliers : Ici on cherche la matrice échelonnée réduite associée à $A(a,b)$. Elle est unique , toutes les transformations de Gauss sont bonnes pour l'obtenir , en particulier on peut utiliser les calculs précédents ...
- **Cas** $a \neq 0, b = 1$

$$A(a,1) = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & -a & -a & -a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'où

$$A(a,1) \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R(a,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - $A(a,1), a \neq 0$ n'admet pas de factorisation LU.
  - rg(R(a, 1)) = rg(A(a, 1)) = 3,
  - une base de l'image de $R(a,1)$ (resp. de $A(a,1)$) est constituée des colonnes $1,2,3$ de $R(a,1)$ (resp. de $A(a,1)$),
  - une base de $N(R(a,1)) = N(A(a,1)) = \{0,0,-1,1\}$
- **Cas** $a \neq 0, b = 0$

$$A(a,1) = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & -a & -a & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & -a & -a & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'où

$$A(a,0) \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R(a,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - $A(a,0), a \neq 0$ n'admet pas de factorisation LU.
  - rg(R(a, 0)) = rg(A(a, 0)) = 3,
  - une base de l'image de $R(a,0)$ (resp. de $A(a,0)$) est constituée des colonnes $1,2,4$ de $R(a,0)$ (resp. de $A(a,0)$),
  - une base de $N(R(a,0)) = N(A(a,0)) = \{(1,-1,0,0)\}$
- **Cas** $a = 0, b \neq 0, b \neq 1$

$$A(0,b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & b & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'où

$$A(0,b) \simeq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R(0,b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - $A(0,b)$ n'admet pas de factorisation LU.
  - rg(R(0, b)) = rg(A(0, b)) = 2,
  - une base de l'image de $R(0,b)$ (resp. de $A(0,b)$) est constituée des colonnes $3,4$ de $R(0,b)$ (resp. de $A(0,b)$),
  - une base de $N(R(0,b)) = N(A(0,b))$ est $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$.
- **Cas** $a = 0, b = 1$

$$A(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'où

$$R(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - $A(0,1)$ n'admet pas de factorisation LU.
  - rg(R(0, 1)) = rg(A(0, 1)) = 1,
  - une base de l'image de $R(0,1)$ (resp. de $A(0,1)$) est formée de la colonne 3 de $R(0,1)$ (resp. de $A(0,1)$),
  - une base de $N(R(0,1)) = N(A(0,1))$ est $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$.
- **Cas** $a = 0, b = 0$

$$A(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } R(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - $A(0,0)$ n'admet pas de factorisation LU.
  - rg(R(0, 0)) = rg(A(0, 0)) = 1,
  - une base de l'image de $R(0,0)$ (resp. de $A(0,0)$) est formée de la colonne 4 de $R(0,0)$ (resp. de $A(0,0)$),
  - une base de $N(R(0,0)) = N(A(0,0))$ est $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$.

Chapitre 3

Interpolation Polynômiale

Exercice 14 *Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange satisfaisant au tableau ci-dessous*

x	*0*	*2*	*3*	*5*
$f(x)$	*-1*	*2*	*9*	*87*

Exercice 15 *Soit* $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange pour les points d'appui d'abscisses : -2, -1, 0,1, 2 .
Discuter l'erreur d'interpolation.

Exercice 16 *On veut déterminer le polynôme d'interpolation* P *interpolant la fonction* $f(x) = e^{-x}$ *aux points* $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

1. *Déterminez les polynômes de Newton associés à la subdivision* $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

2. *Déterminez les coefficients du polynôme en utilisant la méthode des* ***différences divisées****.*

3. *En utilisant des résultats du cours, montrez que pour tout* $x \in [0, 3]$,

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{4!}$$

Vous pourrez admettre que

$$\max_{x\in[0,3]} |x(x-1)(x-2)(x-3)| \leq 1.$$

Exercice 17 *Soit* $f(x) = \ln(x)$ *estimer la valeur de* $\ln(0.60)$ *avec*

x	*0,40*	*0,50*	*0,70*	*0,80*
$f(x)$	*-0,916291*	*-0,6993147*	*-0,356675*	*-0,223144*

Comparer avec la valeur exacte obtenue grâce à votre calculatrice.

Exercice 18 *Calculer le polynôme d'Hermite Q tel que :*
$Q(0) = f(0), Q'(0) = f'(0), Q(5) = f(5), Q'(5) = f'(5)$, *pour* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
En déduire la valeur de $Q(4)$, *comparer* $f(4)$ *à* $Q(4)$.

Solutions

Exercice 14

Rappelons que le polynôme de Lagrange basé sur les points d'appui d'abscisses $x_0, x_1, \ldots, x_n$ est d'ordre n et s'écrit

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x),$$

avec

$$L_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

ici les points d'appui donnés par :

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0 & f(x_0) = -1 \\ x_1 = 2 & f(x_1) = 2 \\ x_2 = 3 & f(x_2) = 9 \\ x_3 = 5 & f(x_3) = 87 \end{array}$$

détermineront donc un pôlynome de Lagrange d'ordre 3, celui-ci s'écrit

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} f(x_k) L_k(x),$$

avec

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \\ &= \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)} \\ &= -\frac{1}{30}(x-2)(x-3)(x-5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
&= \frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)} \\
&= \frac{1}{6}x(x-3)(x-5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\
&= \frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)} \\
&= -\frac{1}{6}x(x-2)(x-5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= \frac{1}{30}x(x-2)(x-3)
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) \\
&= \frac{53}{30}x^3 - 7x^2 + \frac{253}{30}x - 1.
\end{aligned}$$

Exercice 15

Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Les points d'appui sont :

$$\begin{array}{ll}
x_0 = -2 & f(x_0) = \frac{1}{5} \\
x_1 = -1 & f(x_1) = \frac{1}{2} \\
x_2 = 0 & f(x_2) = 1 \\
x_3 = 1 & f(x_3) = \frac{1}{2} \\
x_4 = 2 & f(x_4) = \frac{1}{5}
\end{array}$$

Le polynôme de Lagrange est donc d'ordre 4. Il s'écrit

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^{4} f(x_k)L_k(x),$$

avec

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{1}{24}x(x+1)(x-1)(x-2)\\
L_1(x) &= -\frac{1}{8}x(x+2)(x-1)(x-2)\\
L_2(x) &= \frac{1}{4}(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)\\
L_3(x) &= -\frac{1}{6}x(x+2)(x+1)(x-2)\\
L_4(x) &= \frac{1}{24}x(x+2)(x+1)(x-1).
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) + f(x_4)L_4(x)\\
&= \frac{1}{10}x^4 - \frac{3}{5}x^2 + 1.
\end{aligned}$$

Calculons l'erreur théorique sur cette interpolation. celle-ci est donnée ou point x par :

$$E(x) = f(x) - P_n(x) = N_{n+1}(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!},$$

où, $\xi_x \in [\min x_i, \max x_i] = I$. Elle vérifie

$$|E(x)| \leq |N_{n+1}(x)|\frac{1}{(n+1)!}M_{n+1}$$

où

$$N_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$$

$$M_{n+1} = \max_{t\in I}|f^{(n+1)}(t)|.$$

Comme ici on a 5 points d'appui, cette erreur est majorée par :

$$|E(x)| \leq |N_5(x)|\frac{1}{5!}M_5.$$

On a clairement $N_5(x) = \prod_{k=0}^{4}(x - x_k) = x(x^2-1)(x^2-4)$. Il reste à calculer $M_5 = \max_{t\in I} |f^{(5)}(t)|$. Un calcul assez long donne :

$$f^{(5)}(x) = \frac{-240x(3-10x^2+3x^4)}{(1+x^2)^6}.$$

(Ceci peut être par exemple obtenu en décomposant f de la façon suivante,

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1+ix} + \frac{1}{2}.\frac{1}{1-ix}.$$

On calcule alors la dérivée d'ordre p de $\left(\frac{1}{1+\alpha x}\right)^{(p)}$, ce qui est plus simpl,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{1+\alpha x}\right)' &= -\frac{\alpha}{(1+\alpha x)^2} \\
\left(\frac{1}{1+\alpha x}\right)'' &= \frac{(-1)^2 2\alpha^2}{(1+\alpha x)^3} \\
&\vdots \\
\left(\frac{1}{1+\alpha x}\right)^{(p)} &= \frac{(-1)^p \alpha^p p!}{(1+\alpha x)^{p+1}}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
f^{(5)}(x) = &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+ix}\right)^{(5)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ix}\right)^{(5)} \\
&= \frac{1}{2}.\frac{-120i}{(1+ix)^6} + \frac{1}{2}.\frac{120i}{(1-ix)^6} \\
&= \frac{-240x(3-10x^2+3x^4)}{(1+x^2)^6},
\end{aligned}$$

de même, on trouve

$$f^{(6)}(x) = -\frac{240}{(1+x^2)^7}(-21x^6+105x^3-63x^2+3).$$

Ainsi l'étude de $f^{(5)}$ donne $M_5 = 100$, (pour trouver les extremas de $f^{(5)}$, c'est à dire les racines de l'équation $\frac{240}{(1+x^2)^7}(-21x^6+105x^3-63x^2+3) = 0$, on a recours au chapitre 1 sur la résolution des équations non linéaire dans $\mathbb{R}$).
Finalement,

$$|E(x)| \leq |N_5(x)|\frac{1}{5!}M_5 = |x(x^2-1)(x^2-4)|\frac{100}{5!},$$

$$|E(x)| \leq |N_5(x)|\frac{1}{5!}M_5 = |x(x^2-1)(x^2-4)|\frac{5}{6}.$$

Application à $x = \frac{1}{2}$. On a $f(\frac{1}{2}) = 0.8$, $P(\frac{1}{2}) = -0,86$, donc l'erreur effective est $E_e(\frac{1}{2}) = |f(\frac{1}{2}) - P(\frac{1}{2})| = 0.06$. Or

$$|E(\frac{1}{2})| \leq |N_5(\frac{1}{2})|\frac{1}{5!}M_5 = 0,29.$$

Par conséquent $|E_e(\frac{1}{2})| < |E(\frac{1}{2})|$, l'interpolation de Lagrange, dans ce cas, donne une bonne approximation de $f(\frac{1}{2})$.

Exercice 16

1. Polynômes de Newton :
$N_0(x) = 1$
$N_1(x) = x$
$N_2(x) = x(x-1)$
$N_3(x) = x(x-1)(x-2)$
2. $P(x) = 1 + \frac{1-e}{e}x + \frac{(1-e)^2}{2e^2}x(x-1) + \frac{(1-e)^3}{6e^3}x(x-1)(x-2)$.
3. On sait que pour tout $x \in [0,3]$, il existe un $\zeta \in [0,3]$ tel que

$$f(x) - P(x) \leq \frac{e^{-\zeta}}{4!}\pi(x) \quad \text{où} \quad \pi(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$$

On en déduit que :

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{4!}$$

Exercice 17

Soit $f(x) = \ln(x)$. Estimons la valeur de $\ln(0,6)$ grâce à une interpolation de Lagrange basée sur les points d'appui donés dans l'exercice. Le polynôme de Lagrange s'écrit

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} f(x_k)L_k(x).$$

On cherche donc

$$P_3(0,6) = \sum_{k=0}^{3} f(x_k)L_k(0,6),$$

on trouve $P_3(0,6) = -0,509975$.
Estimation de l'erreur théorique dans ce cas. Elle est majorée par

$$|E(x)| \leq \frac{N_4(x)}{4!}M_4$$

où $M_4 = \max|f^{(4)}(x)|$, donc

$$|E(x)| \leq |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)|\frac{1}{4!}M_4$$

Cherchons M_4. On a $f(x) = \ln(x)$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc $f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$ et $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$. Ainsi,

$$M_4 = |f^{(4)}(0,4)| = \frac{6}{(0,4)^4} = \frac{6}{256}.10^4.$$

Donc

$$E(x) \leq |(x-0,4)(x-0,5)(x-0.7)(x-0,8)|\frac{1}{24}\frac{6}{256}.10^4.$$

Ainsi, $E(0,6) \leq \frac{1}{256}$.Or, la valeur exacte de $\ln(0,6) = -0,510826$. L'erreur effectivement commise lors de l'approximation de $\ln(0,6)$ par $P_3(0,6)$ est donc $|P_3(0,6) - (-0,510826)| = 8,51 \times 10^{-4} < \frac{1}{256}$.
Donc, dans ce cas, l'interpolation de Lagrange donne un bon résultat.

Exercice 18

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Le polynôme d'Hermite Q_n s'écrit

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} H_k(x)f(x_k) + \sum_{k=0}^{n} K_k(x)f'(x_k)$$

avec

$$H_k(x) = [1 - 2(x-x_k)L'_k(x_k)]L_k^2(x), \quad K_k(x) = (x-x_k)L_k^2(x).$$

Calculons les polynômes L_k, H_k et K_k, sachant que les abscisses des points d'appui sont $x_0 = 0$ et $x_1 = 5$.

$$L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = 1 - \frac{x}{5} \texttt{ et } L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{x}{5}$$

$$L'_0(x) = \frac{-1}{5} \texttt{ et } L'_1(x) = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} H_0(x) &= (1-2(x-x_0)L'_0(x_0))L_0^2(x) \\ &= (1-2(x-0)(\frac{-1}{5}))(1-\frac{x}{5})^2 \\ &= \frac{2}{125}x^3 + \frac{3}{25}x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1(x) &= (1 - 2(x - x_1)L_1'(x_1))L_1^2(x) \\ &= (1 - 2(x - 5)(\frac{1}{5}))(\frac{x}{5})^2 \\ &= \frac{-2}{125}x^3 + \frac{3}{25}x^2 \end{aligned}$$

D'autre part

$$K_0(x) = (x - x_0)L_0^2(x) = (x - 0)(1 - \frac{x}{5})^2 = \frac{x^3}{25} - \frac{2}{5}x^2 + x$$

$$K_1(x) = (x - x_1)L_1^2(x) = (x - 5)(\frac{x}{5})^2 = \frac{x^3}{25} - \frac{x^2}{5}.$$

$$\begin{aligned} Q_3(x) &= \sum_{k=0}^{1} H_k(x)f(x_k) + \sum_{k=0}^{1} K_k(x)f'(x_k) \\ &= H_0(x)f(x_0) + H_1(x)f(x_1) + K_0(x)f'(x_0) + K_1(x)f'(x_1) \\ &= \frac{10}{262}x^3 - \frac{76}{262}x^2 + 1 \end{aligned}$$

Ainsi on a $Q_3(4) \approx 0.147$ et pour comparaison $f(4) \approx 0.0588$.
L'écart peut sembler important, mais un calcul de l'erreur théorique sur l'interpolation d'Hermite montre que l'erreur effectivement commise est plus petite que cette erreur théorique, (laissé en exercice). En outre, la valeur $x = 4$ est relativement proche du bord de l'intervalle d'interpolation qui est $[0, 5]$, et en général, pour l'interpolation de Lagrange ainsi que celle d'Hermite, l'erreur s'amplifie au bord de l'intervalle d'interpolation (ce phénomène est dit de Runge).

Chapitre 4

Calcul Numérique approché des intégrales

Exercice 19 *Donner une approximation de*

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^3}$$

avec une erreur inférieure à 10^{-2}.

Exercice 20 *Déterminer par la méthode des trapèzes* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ *sur la base du tableau suivant :*

x	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
$f(x)$	0	0,382683	0,707107	0,923880	1

Ces points d'appui sont ceux donnant $\sin(x)$*, comparer alors les résultats obtenus avec la valeur exacte.*

Exercice 21 *Calculer à l'aide de la méthode des Trapèzes l'integrale* $I = \int_0^{\pi} \sin(x^2)dx$ *(avec* $n = 5$ *puis* $n = 10$ *points d'appui).*

Exercice 22 *Evaluer à l'aide de la méthode des Trapèzes, l'integrale :* $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx$*, avec une erreur inférieure à* 10^{-4}.

Exercice 23 *On lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure pendant les premières* 80 *secondes l'accéleration* γ *:*

$t(ens)$	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$\gamma(enm/s^2)$	30	31,63	33,44	35,47	37,75	40,33	43,29	46,70	50,67

Calculer la vitesse V de la fusée à l'instant $t = 80s$, par les Trapèzes puis par Simpson.

Exercice 24 *Soit $f \in C^1([0;1]$. On considère la formule de quadrature élémentaire :*

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq \omega_0 f(0) + \omega_1 f'(0) + \omega_2 f'(\xi)$$

où $\xi \in]0;1[$ et $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ sont des réels.

1. *Déterminer les paramètres $\xi, \omega_0, \omega_1, \omega_2$ pour que la formule de quadrature soit exacte si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.*

2. *A l'aide d'un changement de variable, construire une méthode de quadrature élémentaire sur un intervalle $[a;b]$.*

Solutions

Exercice 19

On appliquera la méthode du point milieu composite . Déterminons d'abord en combien d'intervalle on doit découper l'intervalle de départ pour obtenir la précision demandée. D'après un théorème du cours, si on utilise n sous-intervalles, pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, l'erreur est contrôlée par la formule

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+(2k+1)\frac{b-a}{2n}) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{a\leq t\leq b} |f^{(2)}(t)|.$$

Ici $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$, $f'(x) = \frac{-3x^2}{(1+x^3)^2}$, et

$$f''(x) = \frac{-6x(1+x^3)^2 + (3x^2)(2)(3x^2)(1+x^3)}{(1+x^3)^4}.$$

En majorant en tenant compte que $x \in [0, 1/2]$, on obtient

$$|f''(x)| \leq 3(9/8)^2 + (3/4)(2)(3/4)(9/8) \leq 6.$$

Nous cherchons n satisfaisant

$$\frac{1}{2^3}.\frac{1}{24n^2}.6 < \frac{1}{100}.$$

On doit avoir $32n^2 > 100$. Il suffit de prendre $n = 2$. Appliquant maintenant la formule du point milieu avec $n = 2$. On trouve

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^3} \approx \frac{\frac{1}{2}}{2}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{8})^3} + \frac{1}{1+(\frac{3}{8})^3}\right) = 0,4869\ldots$$

Exercice 20

a) Soit T l'approximation de I par la méthode des trapèzes, le pas h est donné par $h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{\pi}{8}$.

$$\begin{aligned} T &= \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_4) + 2\sum_{k=1}^{3} f(x_k)) \\ &= 0,987116 \end{aligned}$$

b) Soit S l'approximation de I par la méthode de Simpson. Celle-ci s'écrit,

$$\begin{aligned} S &= \frac{h}{3}(y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) \\ &= 1,000135. \end{aligned}$$

Les points d'appui donnés dans cet exercice correspond à la fonction $\sin x$ et $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$. On constate donc que l'approximation de I par Simpson est meilleurs que celle par les trapèzes, puisque $|S - I| = 0,000135$ et $|T - I| = 0,012884$.

Exercice 21

a) Pour $n = 5$ donc le pas d'intégration est $h = \frac{\pi}{5}$. Calculons par la méthode des trapèzes

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_5) + 2\sum_{k=1}^{4} f(x_k)) \\ &= \frac{\pi}{10}\left(\sin(\pi^2) + \sin(0) + (\sin(\frac{\pi}{5})^2 + \sin(\frac{2\pi}{5})^2 + \sin(\frac{3\pi}{5})^2 + \sin(\frac{4\pi}{5})^2)\right) \\ &= 0,504431 \end{aligned}$$

b) Pour $n = 10$ donc le pas d'intégration est $h = \frac{\pi}{10}$.

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_{10}) + 2\sum_{k=1}^{9} f(x_k)) \\ &= \frac{\pi}{20}\left(\sin(\pi^2) + \sin(0) + (\sin(\frac{\pi}{10})^2 + \sin(\frac{2\pi}{10})^2 + \sin(\frac{3\pi}{10})^2 + \ldots + \sin(\frac{9\pi}{10})^2)\right) \\ &= 0,72238 \end{aligned}$$

alors que la valeur exacte est approximativement $0,772651$. Avec ce pas plus petit l'approximation numérique est meilleure.

Exercice 22

Soit

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

L'erreur de la méthode des trapèzes vérifie la formule suivante

$$E(h) \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \quad \text{où} \quad M_2 = \max_{t \in [a,b]} |f''(t)|.$$

Ainsi, pour avoir $E(h) \leq \varepsilon$, où ε est l'erreur permise, il suffit de prendre n subdivisions de l'intervalle d'intégration telles que

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \leq \varepsilon,$$

Donc, il suffit que n vérifie,

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon} M_2}.$$

Cherchons M_2. On a $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ et

$$f''(x) = -\frac{\sin x}{x} - \frac{2\cos x}{x^2} + \frac{2\sin x}{x^3}$$

Pour déterminer les extremas de f'', on cherche alors les racines de $f^{(3)}(x) = 0$. Un calcul simple donne

$$f^{(3)}(x) = \frac{1}{x^4}(-x^3 \cos x + 6x \cos x + 3x^2 \sin x - 6 \sin x).$$

On cherche donc les racines de l'équation,

$$-x^3 \cos x + 6x \cos x + 3x^2 \sin x - 6 \sin x = 0.$$

D'où

$$(-x^3 + 6x) \cos x = (6 - 3x^2) \sin x.$$

En supposant $\cos x \neq 0$ et $6 - 3x^2 \neq 0$, c'est à dire $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, (k \in \{0, 1, \ldots\}$, et $x \neq \pm\sqrt{2}$, on obtient

$$\tan x = \frac{6x - x^3}{6 - 3x^2}.$$

Ainsi les racines cherchées sont $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ où $x = \pm\sqrt{2}$ où celles de l'équaton

$$\tan x = \frac{6x - x^3}{6 - 3x^2}.$$

Etudions alors cette équation : Graphiquement, en tracant les courbes représentatives dans $[0, \pi]$ de $\tan x$ et de $\frac{6x-x^3}{6-3x^2}$, on voit rapidement(à faire) que le seul point d'intersection de $\tan x$ et de $\frac{6x-x^3}{6-3x^2}$ est d'abscisse $x = 0$.
On en déduit que f'' atteint ses extremas sur $[0, \pi]$ en $x = 0$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = \frac{\pi}{2}$.
Cherchons $\lim\limits_{x \to 0^+} f''(x)$, le développement limité en $x = 0$ de $f''(x)$ donne :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x^3}\left(-x^2\left(x - \frac{x^3}{6} + \ldots\right) - 2x\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) + 2\left(-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) + 0(x^5)\right) \\ &= \frac{1}{x^3}(-\frac{x^3}{3} + 0(x^5)). \end{aligned}$$

Donc, $\lim_{x\to 0^+} f''(x) = -\dfrac{1}{3}$. Parailleurs, on vérifie facilement que, $|f''(\sqrt{2})| \leq \frac{1}{3}$ et $|f''(\frac{\pi}{2})| \leq \frac{1}{3}$. On a donc $M_2 = \frac{1}{3}$,et par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} n &\geq \sqrt{\frac{\pi^3}{12} 10^2 \frac{1}{3}} \\ &\geq 10. \end{aligned}$$

Application :
Prenons alors, $n = 10$, d'où $h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{10}$, et donnons une approximation de l'intégrale par la méthode des trapèzes :

$$I \approx 1,845.$$

Exercice 23

On sait que l'acceleration γ est la dérivée de la vitesse V donc,

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \gamma(s)ds$$

$$V(t) = 0 + \underbrace{\int_0^{80} \gamma(s)ds}_{I}.$$

a) Calculons I par la méthode des trapèzes. Ici, d'après le tableau des valeurs, $h = 10$.

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{2}\left(\gamma(x_0) + \gamma(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \gamma(x_i)\right) \\ &= \frac{1}{2}.10(30 + 50,67 + 2 \times (31,63 + \ldots + 46,70)) \\ &= 3089 m.s^{-1} \end{aligned}$$

b) Calculons I par la méthode de Simpson.

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{3}(\gamma(x_0) + \gamma(x_n) + 4(\gamma(x_1) + \gamma(x_3) + \ldots)) + 2(\gamma(x_2) + \gamma(x_4) + \ldots)) \\ &= \frac{10}{3}(30 + 50,67 + 4(31,63 + 35,47 + \ldots) + 2(33,44 + 37,75 + \ldots)) \\ &= 3087 m.s^{-1} \end{aligned}$$

Exercice 24

1. la formule de quadrature est exacte pour tout polynôme de $\mathcal{P}_3$ si et seulement si elle est exacte pour les polynômes de la base canonique $\{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathcal{P}_3$, c'est-à-dire $E(1) = E(x) = E(x^2) = E(x^3) = 0$. Ceci implique que :

$$\int_0^1 1dx = \omega_0 = 1, \qquad \int_0^1 xdx = \omega_1 + \omega_2 = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 x^2dx = 2\xi\omega_2 = \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 x^3dx = 3\xi^2\omega_2 = \frac{1}{4}.$$

Les coefficients sont donc :

$$\xi = \frac{1}{2}, \quad \omega_0 = 1, \quad \omega_1 = \frac{1}{6}, \quad \omega_2 = \frac{1}{3}.$$

et la formule de quadrature s'écrit comme :

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq f(0) + \frac{1}{6}f'(0) + \frac{1}{3}f'(\frac{1}{2}).$$

2. On fait le changement de variable $x = a + u(b-a)$, $u \in [0; 1]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f(a + u(b-a))(b-a)du,$$

En posant $g(u) = (b-a)f(a+u(b-a))$,$u \in [0; 1]$ on en déduit la formule de quadrature :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 g(u)du \simeq g(0) + \frac{1}{6}g'(0) + \frac{1}{3}g'(\frac{1}{2}).$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)f(a) + \frac{(b-a)}{6}f'(a) + \frac{(b-a)}{3}f'(\frac{a+b}{2}).$$

Chapitre 5

Métodes itératives

Exercice 25 *On considère les deux matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Chercher les matrices de Jacobi et de Gauss-Seidel associées aux matrices A et B et comparer les rayons spectraux.

Exercice 26 *Soit A une matrice symétrique définie positive et T la matrice définie par : $T = 2D^{-1} - D^{-1}AD^{-1}$. On suppose que $2D - A$ est définie positive.*

1. *Montrer que la méthode de Jacobi appliquée au système $Ax = b$ converge.*
2. *Soit la méthode itérative suivante :*

$$\begin{cases} x^{(0)} \quad donné \\ x^{(n+1)} = x^{(n)} + T\left(b - Ax^{(n)}\right) \end{cases}$$

Montrer que cette méthode converge et comparer sa vitesse de convergence à celle de la la méthode de Jacobi.

Exercice 27 *Soit A une matrice carrée hermitienne et définie positive, pour résoudre le systéme $Ax = b$, on pose $A = D - E - F$, $L = D^{-1}E$ et $U = D^{-1}F$ et on considère le procédé itératif $B(\omega)x^{(k+1)} = (B(\omega) - A)x^{(k)} + b$ avec $B(\omega) = \dfrac{1}{\omega}D(I - \omega L)$.*

1. *Ecrire l'itération sous la forme $x^{(k+1)} = T(\omega)x^{(k)} + c \quad (*)$ et montrer que $T(\omega) = (I - \omega L)^{-1}((1 - \omega)I + \omega U)$.*
2. *Montrer que la matrice $B(\omega) + B^H(\omega) - A$ est définie positive pour $0 < \omega < 2$.*
3. *Montrer que si λ est valeur propre de $Q(\omega) = A^{-1}(2B(\omega) - A)$ alors $Re\lambda > 0$.*

4. *Vérifier que $Q(\omega)+I$ est inversible et que $(Q(\omega)-I)(Q(\omega)+I)^{-1}=T(\omega)$.*
5. *Trouver une relation entre les valeurs propres μ de $T(\omega)$ et les λ.*
6. *En écrivant μ en fonction de λ, prouver que le carré du module de μ peut s'écrire $|\mu|^2 = \dfrac{|\lambda|^2+\delta-2Re\lambda}{|\lambda|^2+\delta+2Re\lambda}$ où δ est un nombre strictement positif à exprimer.*
7. *En déduire que l'itération $(*)$ converge pour $0<\omega<2$.*

Exercice 28 *Soit $A=(a_{ij})$ une matrice carrée inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. A est écrite sous la forme $A=D-L-U$ où D est une matrice diagonale et L (respectivement U) est triangulaire inférieure (respectivement supérieure). Pour résoudre le système $Ax=b$, on utilise la méthode itérative suivante :*

$$\begin{aligned} a_{ii}x_i^{(k+1)} &= a_{ii}x_i^{(k)} - \theta\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - (1-\theta)\omega\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} \\ &+ (1-\omega)\theta\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \omega\sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + \omega b_i \end{aligned}$$

où θ et ω sont des réels fixés (ω non nul) et $k=0,1,\cdots$

1. (a) *Montrer que la méthode proposée peut s'écrire sous la forme matricielle :*

   $$x^{(k+1)} = M(\theta,\omega)x^{(k)} + \mathbf{c}(\theta,\omega) \qquad (*)$$

   (b) *Pour quelles valeurs de θ et ω obtient-on les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel ?*
2. *On prend $\theta=1$*
   (a) *Trouver une relation entre les valeurs propres de $M(\theta,\omega)$ et celles de la matrice de Gauss-Seidel associée à A.*
   (b) *Peut-on comparer la vitesse de convergence de la méthode $(*)$ à celle de Gauss-Seidel ?*
3. *On prend $U=L^t$ et $\theta=0$*
   (a) *Trouver une relation entre les valeurs propres de $M(\theta,\omega)$ et celles de la matrice de Jacobi associée à A.*
   (b) *En supposant que la méthode de Jacobi converge, montrer que la méthode $(*)$ avec $\theta=0$ converge pour $0<\omega<\dfrac{2}{1-\mu_1}$ où $\mu_1$est la plus petite valeur propre de la matrice de Jacobi associée à A.*

4. *En supposant que A est une matrice tridiagonale, trouver une relation entre les valeurs propres $M(0,\omega)$ et celles de $M(1,\omega)$.*
5. *En supposant que A est définie positive et symétrique peut-on comparer les vitesses de convergences des méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel, $M(0,\omega)$ et $M(1,\omega)$.*

Exercice 29 *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. A est écrite sous la forme $A = D - L - U$ où D est une matrice diagonale et L (respectivement U) est triangulaire inférieure (respectivement supérieure). Pour résoudre le système $Ax = b$, on utilise la méthode itérative suivante :* $a_{ii}x_i^{(k+1)} = a_{ii}x_i^{(k)} + \omega \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \right) + r \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \left(x_j^{(k)} - x_j^{(k+1)} \right)$, *où r et ω sont des réels fixés (ω non nul) et $k = 0, 1, \cdots$*

1. *Montrer que la méthode proposée peut s'écrire sous la forme matricielle :* $x^{(k+1)} = M(r,\omega)x^{(k)} + c$ *avec :* $M(r,\omega) = (D - rL)^{-1}(aD + bL + eU)$ *où a , b sont des réels qu'on exprimera en fonction de r et/ou de ω.*
2. *Vérifier que cette méthode permet d'obtenir les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation pour des choix appropriés de r et ω.*
3. *Montrer que les valeurs propres de $M(r,\omega)$ sont les racines de l'équation :* $\det(\alpha D - \beta L - \omega U)$ *avec $\alpha = \lambda + \omega - 1$ et $\beta = (\lambda - 1)r + \ \omega$.*
4. *En supposant que A est une matrice tridiagonale, montrer que les valeurs propres μ de $M(0,1)$ sont liées aux valeurs propres λ de la matrice générale $M(r,\omega)$ par la relation* $(\lambda + \omega - 1)^2 = \omega\mu^2((\lambda - 1)r + \omega)$.
5. *Comparer la vitesse de convergence des méthodes classiques en discutant selon les valeurs des paramètres.*

Solutions

Exercice 25

Exemples de matrices dont les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel ne convergent pas ou ne divergent pas simultanément.

Exercice 26

1. Utiliser le cours .
2. Posons $T_S = T_J^2$ où $x^{(n+1)} = T_S x^{(n-1)} - Tb$.
   Si λ est valeur propre de T_J alors λ^2 est valeur propre de T_S donc $\varrho(T_S) < 1$ et la convergence en résulte. La méthode converge plus rapidement que la méthode de Jacobi.

Exercice 27

1. Utiliser le cours.
2. Soit λ une valeur propre de $Q(\omega)$ associée à un vecteur propre x donc
$$(2B(\omega) - A)x = \lambda Ax,$$
par suite
$$x^H(2B(\omega) - A)x = \lambda x^H Ax.$$
ainsi
$$Re\lambda x^H Ax = x^H(B(\omega) + B^H(\omega) - A)x.$$
Par ailleurs d'après 2, $B(\omega) + B^H(\omega) - A$ est définie positive donc $Re\lambda > 0$.
3. $Q(\omega) + I = 2A^{-1}B(\omega)$.
4. $\lambda = \dfrac{1+\mu}{1-\mu}$.
5. Si $\lambda = a + ib$ alors $|\mu|^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - 2a + 1}{a^2 + b^2 + 2a + 1}$.
6. Si $0 < \omega < 1$ alors $a > 0$ par suite $|\mu| < 1$.

Exercice 28

1. (a) $M(\theta, \omega) = (D - \theta L)^{-1}\left((1-\omega)D + (\omega - \theta)L + \omega U\right)$.
   (b) $\theta = 0$ et $\omega = 1$ donnent Jacobi.
   $\theta = \omega = 1$ donnent Gauss-Seidel.
2. (a) $\theta = 1$, si μ est valeur propre de $M(1, \omega)$ et μ est valeur propre de $M(1, 1)$ alors $\mu = 1 - \omega + \omega\lambda$.
   (b) Affirmatif.
3. (a) Si μ est valeur propre de $M(0, 1)$ et λ est valeur propre de $M(0, \omega)$ alors $\lambda = 1 - \omega + \omega\mu$.
   (b) Si la méthode de Jacobi converge alors $|\mu_i| < 1$ pour tout i, A étant symetrique on peut ranger ses valeurs propres par ordre croissant $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n$, donc $\dfrac{1}{1-\mu_1} \leq \dfrac{1}{1-\mu_i} \quad \forall i$.
   La méthode $(*)$ converge si $-1 < 1 - \omega + \omega\mu_i < 1$ et ceci est vérifié si $0 < \omega < \dfrac{2}{1-\mu_1}$.

Exercice 29

1. $M(r, \omega) = (D - rL)^{-1}\left((1-\omega)D + (\omega - r)L + \omega U\right)$.
2. $\theta = 0$ et $\omega = 1$ donnent Jacobi.
   $r = \omega = 1$ donnent Gauss-Seidel.
   $r = \omega$ donne relaxation.
3. il suffit d'écrire.
4. Comme il s'agit de matrices tridiagonales, on utilise la propriété

$$\det(\alpha D - \beta L - U) = \det(\alpha D - \beta\mu L - \mu^{-1}U).$$