

Filière Licence d'Etudes Fondamentales

SCIENCES DE LA MATIÈRE PHYSIQUE

Département de Physique

Semestre S6

Module M 36

Cours de

Transferts thermiques

Réalisé Par : Moussa AADMI

Année universitaire 2019/2020

Table de matières

Introduction générale

Références Bibliographiques

Chapitre I : Introduction aux transferts thermiques

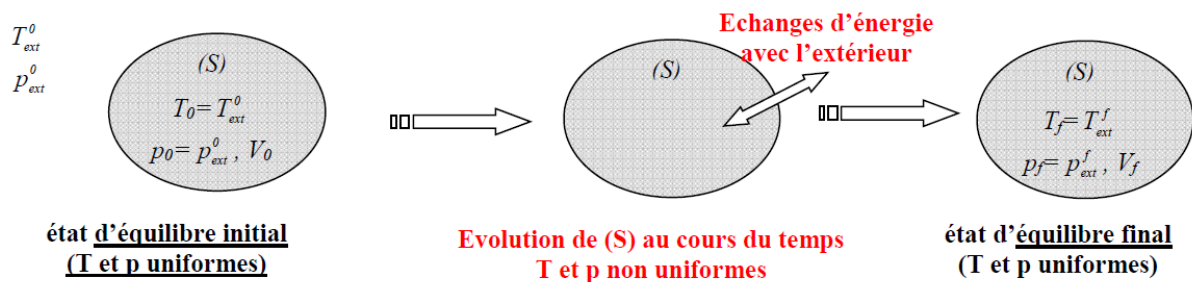
Chapitre II : transfert thermique par conduction

Chapitre III : transfert thermique par rayonnement

Chapitre IV : transfert thermique par convection

Introduction générale

La thermodynamique nous apprend que l'énergie peut être transférée à partir d'interactions entre le système et son environnement, sous forme de chaleur et de travail. Cependant, la thermodynamique ne se préoccupe que de l'état initial et de l'état final du système à l'équilibre, et ne fournit aucune information sur la nature des interactions mises en jeu et sur l'évolution temporelle du système entre les deux états d'équilibre.



Un transfert de chaleur au sein d'un système ne se produit que s'il existe des gradients de température entre les différentes parties du système, ce qui implique que celui-ci n'est alors pas à l'équilibre thermodynamique (la température n'est pas uniforme dans tout le système). Au cours de la transformation du système vers un état d'équilibre final, la température va évoluer à la fois en temps et en espace. Le but de l'analyse des transferts de chaleur est d'identifier quels sont les modes de transfert mis en jeu au cours de la transformation et de déterminer quantitativement comment varie la température en chaque point du système au cours du temps.

Références Bibliographiques

- [1]. Bruno Cheron, "Transfert thermique : Résumé du cours et problèmes corrigés", Ellipse 2009.
- [2]. Jean François Sacadure, "*Transferts thermiques, Initiations et approfondissement*", Tec et Doc Lavoisier, 2014.
- [3]. Jean François Sacadure, "*Initiation aux transferts thermiques*", Tec et Doc Lavoisier, 1993.
- [4]. Jean-Luc Battaglia, "*Inroduction aux transferts thermiques cours et exercice corrigés*" dunod.
- [5]. Dominique Marchio, "*Introduction aux transferts thermiques*", ParisTech.
- [6]. T. Taine " *Transferts thermiques : Applications 18 exercices intégralement corrigés*", Dunod Université.
- [7]. Ana-Maria Bianchi, "*Transferts thermiques* " Agence universitaire de la Francophonie.
- [8]. Jean Taine, "*Transferts thermiques Introduction aux transferts d'énergie Cours et exercices d'application*", Dunod.
- [9]. John H. Lienhard IV , "*A Heat Transfer Textbook*", Phlogiston Press .
- [10]. Ahmed Mezhab, " Cours des transferts thermiques : Conduction", Master de Mécanique et Energétique, Année Universitaire 2006/2007.
- [11]. Ahmed Mezhab, " Cours des transferts thermiques : Rayonnement thermique", Master de Mécanique et Energétique, Année Universitaire 2006/2007.
- [12]. Najim Salhi , " Cours de transferts thermiques", SMP .S5. Faculté des sciences Oujda, 2007/2008.

Chapitre I : Introduction aux transferts thermiques

I. Les trois modes de transfert de chaleur

I.1. Transfert de chaleur par conduction dans les solides (ou les fluides au repos).

Le processus de transfert de chaleur par conduction s'appuie sur un milieu matériel sans mouvement de matière et est dû à des phénomènes physiques microscopiques (agitation des atomes ou des molécules, flux d'électrons libres...). Il peut être vu comme un transfert d'énergie des particules les plus énergétiques (les particules chaudes qui ont une énergie de vibration élevée) vers les particules les moins énergétiques (les particules froides d'énergie de vibration moins élevée), dû aux collisions entre particules. Dans les solides, le transfert d'énergie peut également se produire sous l'effet du déplacement d'électrons libres dans le réseau cristallin (par exemple pour les métaux). Ainsi les bons conducteurs d'électricité sont en général également de bons conducteurs de la chaleur.

I.2. Transfert de chaleur par convection

La convection est un mode de transfert de chaleur qui met en jeu, en plus de la conduction, le mouvement macroscopique de la matière. Ce phénomène se produit au sein des milieux fluides en écoulement ou entre une paroi solide et un fluide en mouvement. On distingue deux types de convection :

- *Convection naturelle* : les mouvements sont dus aux variations de masse volumique dans un fluide soumis au champ de pesanteur. Les variations de masse volumique peuvent être générées par des gradients de température (l'air chaud est plus léger que l'air froid) et/ou par des gradients de composition.
- *Convection forcée* : le mouvement du fluide est provoqué par des actions mécaniques extérieures (pompe, ventilateur...).
- On parlera de *convection mixte* lorsque les deux types de convection coexistent dans un.

I.3. Transfert de chaleur par rayonnement

Tout corps matériel émet et absorbe de l'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique. Le transfert de chaleur par rayonnement entre deux corps séparés par du vide ou un milieu semi-transparent se produit par l'intermédiaire d'ondes électromagnétiques, donc sans support matériel. Le phénomène d'émission d'un corps correspond à la conversion d'énergie matérielle (agitation des électrons constituant la matière dont l'intensité dépend de la température) en énergie radiative. Le phénomène d'absorption est la conversion inverse.

II. Définitions

II.1. Champ de température

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température : $T = f(x,y,z,t)$. La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Nous distinguerons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou transitoire.

II.2. Gradient de température

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température :

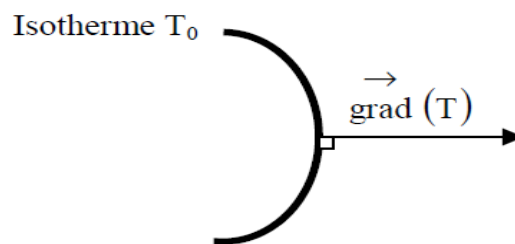


Figure 1.1 : Isotherme et gradient thermique

$$\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n}$$

Avec : \vec{n} vecteur unitaire de la normale
 $\frac{\partial T}{\partial n}$ dérivée de la température le long de la normale.

II.3. Flux de chaleur

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur :

$$\phi = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt}$$

Où S est l'aire de la surface (m^2).

On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface S par unité de temps

$$\varphi = \frac{dQ}{dt}$$

II.3. La résistance thermique

La résistance thermique R_{th} d'une paroi traduit sa capacité à s'opposer au transfert thermique. Elle est définie comme le rapport de la différence de températures entre les faces de la paroi sur le flux thermique. On a alors :

$$R_{th} = \frac{T_2 - T_1}{\varphi}$$

Avec R_{th} résistance thermique en $K \cdot W^{-1}$

T_1 température absolue de la face froide en K ou en °C

T_2 température absolue de la face chaude en K ou en °C

φ flux thermique en W

III. Formulation d'un problème de transfert de chaleur

III.1. Bilan d'énergie

Il faut tout d'abord définir un système (S) par ses limites dans l'espace et il faut ensuite établir l'inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l'état du système et qui peuvent être :

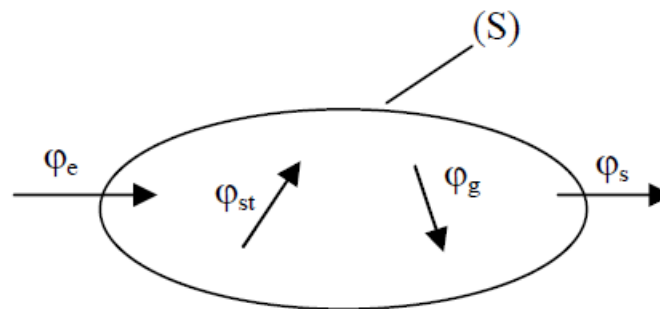


Figure 1.2 : Système et bilan énergétique

φ_{st} flux de chaleur stocké φ_g flux de chaleur généré φ_e flux de chaleur entrant φ_s flux de chaleur sortant	dans le système (S)
---	---------------------

On applique alors le 1er principe de la thermodynamique pour établir le bilan d'énergie du système (S) :

$$\varphi_e + \varphi_g = \varphi_s + \varphi_{st}$$

III.2. Expression des flux d'énergie

Il faut ensuite établir les expressions des différents flux d'énergie. En reportant ces expressions dans le bilan d'énergie, on obtient l'équation différentielle dont la résolution permet de connaître l'évolution de la température en chaque point du système.

III.2.1. Conduction

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres.

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \cdot S \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

Ou sous forme algébrique :

$$\varphi = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$$

Avec : φ Flux de chaleur transmis par conduction (W)

λ Conductivité thermique du milieu ($W m^{-1} \text{ } ^\circ C^{-1}$)

X Variable d'espace dans la direction du flux (m)

S Aire de la section de passage du flux de chaleur (m^2)

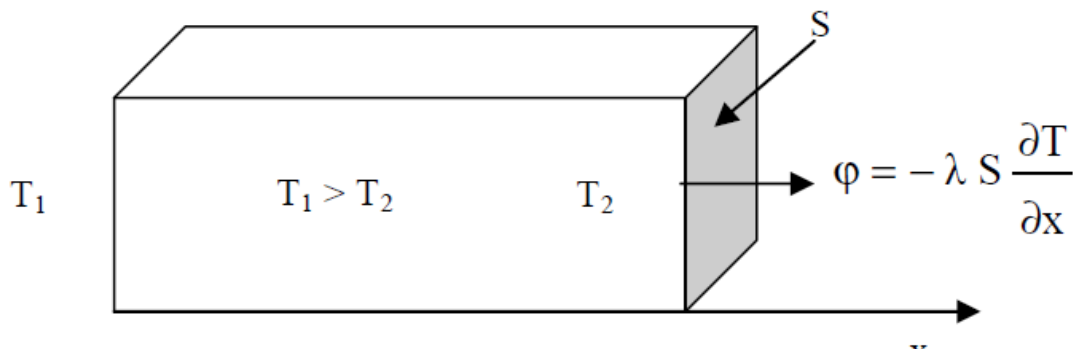


Figure 1.3 : Schéma du transfert de chaleur conductif

On trouvera dans le tableau 1.1 les valeurs de la conductivité thermique λ de certains matériaux parmi les plus courants.

Matériau	λ (W.m-1. °C-1)	Matériau	λ (W.m-1. °C-1)
Argent	419	Aluminium	204
Cuivre	386	Acier doux	45
Plâtre	0,48	Acier inox	15
Polystyrène expansé	0,036-0,047	Glace	1,88
Polyuréthane (mousse)	0,030-0,045	Béton	1,4
Polystyrène extrudé	0,028	Brique terre cuite	1,1
Air	0,026	Verre	1,0
Bois (feuillu-résineux)	0,12-0,23	Eau	0,60

Tableau 1.1 : Conductivité thermique de certains matériaux

Plus la conductivité thermique est élevée, plus les matériaux conduisent facilement la chaleur. Au contraire les matériaux de faible conductivité thermique conduisent difficilement la chaleur et sont donc utilisés comme isolants.

On constate que parmi les solides, les métaux sont beaucoup plus conducteurs que les composés non métalliques à l'exception du graphite (utilisé dans certains échangeurs de chaleur).

Remarque : Mais, la conductivité thermique varie avec la température.

- Pour les solides, on peut admettre, en première approximation, que les variations sont linéaires, soit : $\lambda = \lambda_0 \cdot (1 + a \theta)$
où λ_0 est la conductivité thermique à 0°C et λ la conductivité thermique à θ °C.
 a est une constante appelée coefficient de température du solide considéré.
 - $a > 0$ pour de nombreux matériaux isolants.
 - $a < 0$ pour la plupart des métaux et alliages (à l'exception de l'aluminium et du laiton).
- Pour les liquides, la conductivité thermique diminue quand la température augmente (à l'exception de l'eau et du glycérol).
- Pour les gaz, la conductivité thermique croît avec la température.

III.2.2. Convection

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide. Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton :

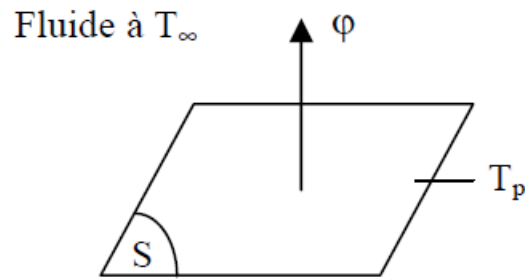


Figure 1.4 : Schéma du transfert de chaleur convectif

$$\varphi = h \cdot S(T_p - T_\infty)$$

Avec : φ Flux de chaleur transmis par convection (W)

h Coefficient de transfert de chaleur par convection ($W m^{-2} \text{ } ^\circ C^{-1}$)

T_p Température de surface du solide ($^\circ C$)

T_∞ Température du fluide loin de la surface du solide ($^\circ C$)

S Aire de la surface de contact solide/fluide (m^2)

Remarque : La valeur du coefficient de transfert de chaleur par convection h est fonction de la nature du fluide, de sa température, de sa vitesse et des caractéristiques géométriques de la surface de contact solide/fluide.

III.2.3. Rayonnement

C'est un transfert d'énergie électromagnétique entre deux surfaces (même dans le vide). Dans les problèmes de conduction, on prend en compte le rayonnement entre un solide et le milieu environnant et dans ce cas nous avons la relation :

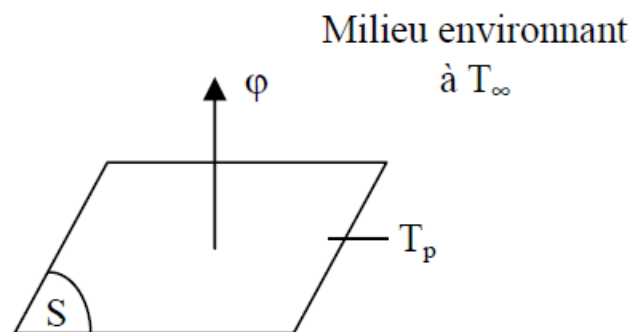


Figure 1.4 : Schéma du transfert de chaleur radiatif

$$\varphi = \sigma \varepsilon_p S(T_p^4 - T_\infty^4)$$

Avec : φ Flux de chaleur transmis par rayonnement (W)

σ Constante de Stefan ($5,67 \cdot 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$)

ε_p Facteur d'émission de la surface

T_p Température de la surface (K)

T_∞ Température du milieu environnant la surface (K)

S Aire de la surface (m²)

III.2.4. Flux de chaleur lié à un débit massique

Lorsqu'un débit massique \dot{m} de matière entre dans le système à la température T_1 et en ressort à la température T_2 , on doit considérer dans le bilan (1.5) un flux de chaleur entrant correspondant :

$$\varphi_e = \dot{m}C_p(T_1 - T_2)$$

Avec : φ_e Flux de chaleur entrant dans le système (W)

\dot{m} Débit massique ($kg \cdot s^{-1}$)

C_p Chaleur spécifique ($J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$)

T_1, T_2 Températures d'entrée et de sortie (K)

III.2.5. Stockage d'énergie

Le stockage d'énergie dans un corps correspond à une augmentation de son énergie interne au cours du temps d'où (à pression constante et en l'absence de changement d'état) :

$$\varphi_{st} = \rho V C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Avec : φ_{st} Flux de chaleur stocké (W)

ρ Masse volumique ($kg \cdot m^{-3}$)

V Volume (m³)

C_p Chaleur spécifique ($J \cdot kg^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$)

T Température ($^\circ C$)

t Temps (s)

Le produit $\rho V C_p$ est appelé la capacitance thermique du corps.

III.2.6. Génération d'énergie

Elle intervient lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) est convertie en énergie thermique. On peut l'écrire sous la forme :

$$\varphi_g = \dot{q}V$$

Avec : φ_g Flux d'énergie thermique générée (W)

\dot{q} Densité volumique d'énergie générée ($W \cdot m^{-3}$)

V Volume (m³)

Chapitre II : Transfert thermique par conduction

I. Equations de la chaleur

Dans sa forme monodimensionnelle, elle décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan :

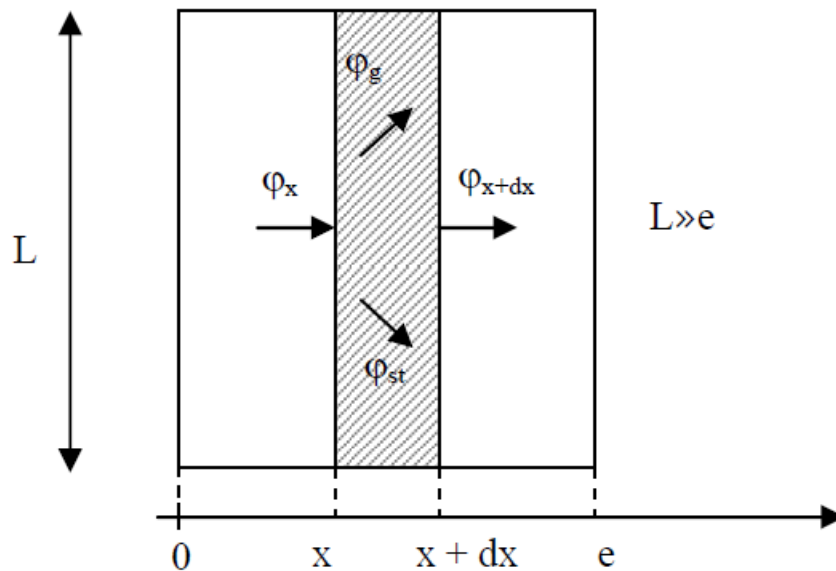


Figure 2.1 : Bilan thermique sur un système élémentaire

Considérons un système d'épaisseur \$dx\$ dans la direction \$x\$ et de section d'aire \$S\$ normalement à la direction \$Ox\$. Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :

$$\varphi_x + \varphi_g = \varphi_{st} + \varphi_{x+dx}$$

Avec : $\varphi_x = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x$, $\varphi_{x+dx} = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx}$; $\varphi_g = S \cdot dx \cdot \dot{q}$ et $\varphi_{st} = \rho \cdot C_p S \cdot dx \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par \$dx\$, nous obtenons :

$$\frac{\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x}{dx} + S \dot{q} = \rho \cdot C_p S \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} = \rho \cdot C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Et dans le cas tridimensionnel, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho \cdot C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

- Si le milieu est isotrope et homogène : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda = cste$
- S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système : $\dot{q} = 0$

Nous obtenons l'équation de **diffusion** :

$$a. \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\text{avec } \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Le rapport $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ est appelé la diffusivité thermique ($m^2 \cdot s^{-1}$) qui caractérise la vitesse de propagation d'un flux de chaleur à travers un matériau.

- Si la conduction est stationnaire ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$)

On retrouve l'**équation de Poisson** :

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0$$

- En régime permanent, en absence de la chaleur générée.

Nous obtenons l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 T = 0$$

I.1. Coordonnées cylindriques

Dans le cas où le transfert de chaleur par conduction a lieu dans des corps de forme cylindrique tel que les tubes ou conduites cylindriques (fig. 2.2), il est nécessaire d'utiliser les coordonnées cylindriques.

Les nouveaux paramètres sont : r , ϕ et z

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques se fait à l'aide des relations suivantes :

$$x = r \cos\phi \text{ et } y = r \sin\phi$$

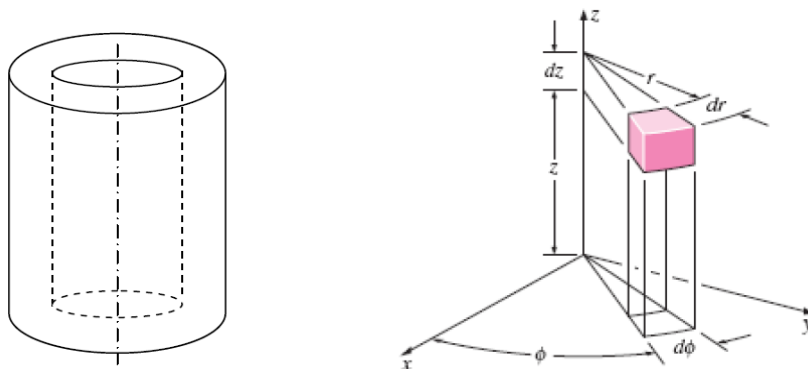


Figure 2.2 : Coordonnées cylindriques

D'après la loi de Fourier, la densité de flux thermique suivant les 3 coordonnées sont :

$$\varphi_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}, \varphi_\phi = -\frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \text{ et } \varphi_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$$

En appliquant le bilan d'énergie au volume de contrôle différentiel, on obtient la forme générale de l'équation de la chaleur en coordonnées cylindrique.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho \cdot C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

I.2. Coordonnées sphériques

Dans le cas de géométries sphériques, il faut utiliser les coordonnées sphériques.

Les nouvelles paramètres sont : r , ϕ et θ

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques se fait à l'aide des relations suivantes :

$$x = r \sin \theta \cos \phi ; y = r \sin \theta \sin \phi \text{ et } z = r \cos \theta$$

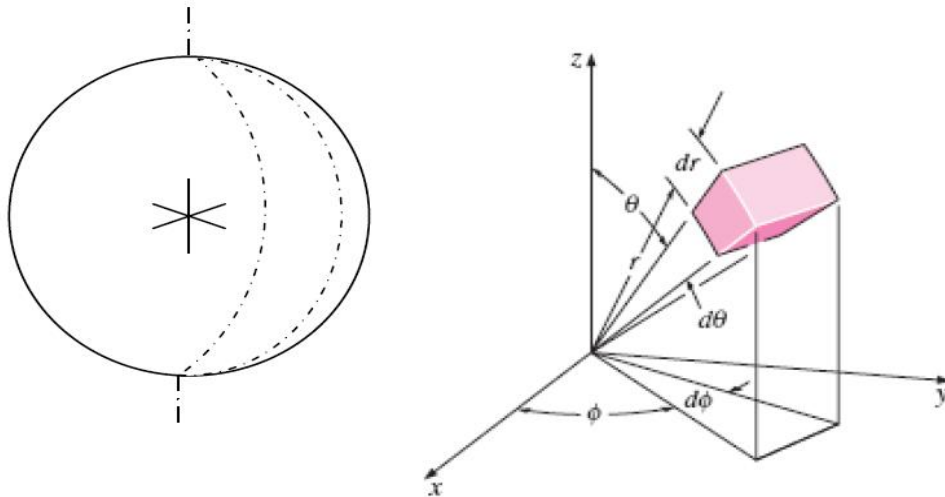


Figure 2.3 : Coordonnées sphériques

D'après la loi de Fourier, la densité de flux thermique suivant les 3 coordonnées sont :

$$\varphi_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}, \varphi_\theta = -\frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \text{ et } \varphi_\phi = -\frac{\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi}$$

En appliquant le bilan d'énergie au volume de contrôle différentiel, on obtient la forme générale de l'équation de la chaleur en coordonnées sphériques.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{q} = \rho \cdot C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

I.3. Conditions aux limites et initiales

Pour résoudre l'équation de la chaleur, il faut préciser la façon dont les échanges de chaleur s'effectuent sur la frontière du corps : ce sont les conditions aux limites. Pour un problème instationnaire, il faut aussi spécifier la valeur de la température en tout point du corps à un instant donné : c'est la condition initiale. L'équation de la chaleur ne peut être résolue (ou n'admet qu'une seule solution) que si toutes ces conditions sont connues.

I.3.1. Conditions initiales

Ces conditions sont indispensables dans le cas de l'étude du transfert de la chaleur en régime instationnaire (transitoire). Dans le cas général, les conditions initiales sont données sous la forme suivante :

$$T(t = 0, x, y, z) = f(x, y, z)$$

Si à l'instant initial, la température est uniforme égale à T_0 , on écrit :

$$T(t = 0, x, y, z) = T_0$$

I.3.2. Conditions aux frontières

Les conditions aux limites sont de trois types :

- **Conditions de 1er ordre (Dirichlet) :** Cette condition correspond au cas où les températures aux surfaces sont connues.

Si les températures sont constantes, égale à T_1 et T_2 , la condition est exprimée par la relation :

$$T(X = 0, Y, Z, t) = T_1 \text{ et } T(X = a, Y, Z, t) = T_2$$

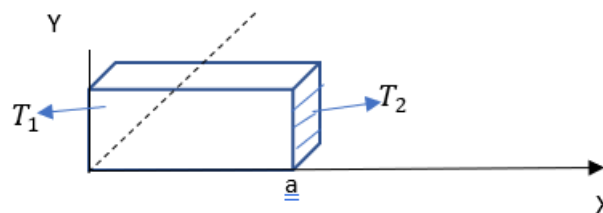


Figure 2.4 : Conditions de 1^{er} ordre (Dirichlet)

- **Conditions de 2^{ème} ordre (Newman) :** Cette seconde condition correspond à l'existence d'un flux de chaleur arrivant à la surface du corps étudié. Elle est exprimée par la relation suivante.

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=a} = q_0$$

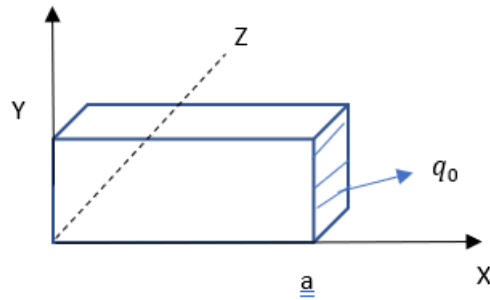


Figure 2.5 : Condition de 2^{ème} ordre (Newman)

- **Cas particulier : Condition d'isolation thermique**

Dans la pratique, on utilise souvent des couches de matériaux isolant (polystyrène, laine de verre, etc.) pour éviter les déperditions de chaleur. Cette condition implique que le flux de chaleur sur cette surface est nul ($q=0$). C'est le cas d'une frontière parfaitement isolée **ou adiabatique**. Cette condition est exprimée par la relation suivante.

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=a} = 0$$

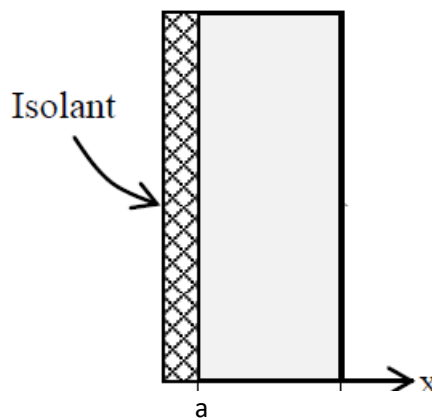


Figure 2.6 : Conditions d'isolation thermique.

- **Conditions de 3^{ème} ordre (Fourier) :** Ce type de condition concerne l'échange de chaleur par convection entre la surface d'un corps et un fluide en mouvement en contact de ce corps ou par rayonnement entre deux corps.

Cette condition aux frontières s'exprime à l'aide de la loi fondamentale de convection par :

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = h(T(x, t) - T_{\infty})$$

Où h est le coefficient d'échange par convection et T_{∞} la température du fluide loin de la surface.

Pour l'échange radiatif s'exprime par :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=a} = \sigma \varepsilon (T^4(x, t) - T_\infty^4)$$

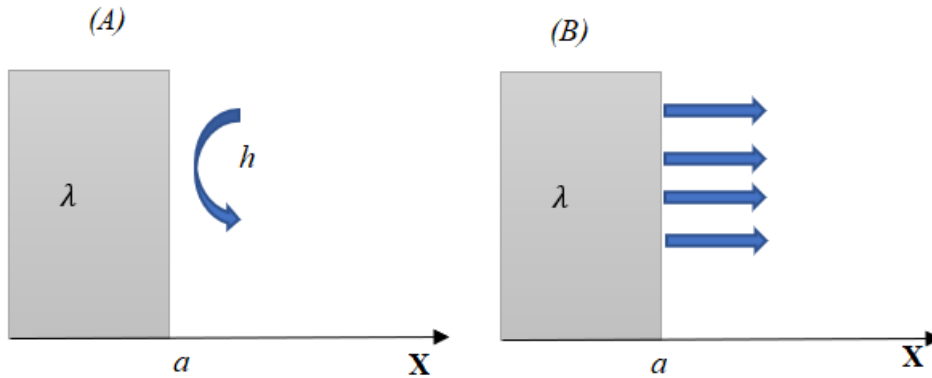


Figure 2.7 : Conditions de 3ème ordre (Fourier) ; (A) type convectif ; (B) type radiatif.

Remarque

Si la géométrie du corps conducteur est très simple et les conditions d'échanges superficiels uniformes, l'équation de la chaleur se simplifie considérablement. Dans un grand nombre d'applications on peut supposer que l'écoulement de la chaleur est unidirectionnel. On utilise alors les modèles du mur, de la barre et de la sphère qui sont décrits dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindrique et sphérique par les équations suivantes :

Mur
$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{q}(x, t) = \rho \cdot C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Cylindre
$$\frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{q}(r, t) = \rho \cdot C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Sphère
$$\frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{q}(r, t) = \rho \cdot C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

II. Conduction de chaleur en Régime Stationnaire Unidimensionnel

II.1. Conduction dans un Mur

Le problème le plus simple à résoudre est celui d'un Mur sans production interne de chaleur lorsque la distribution de température ne dépend pas du temps. L'équation de la chaleur se réduisant à :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \text{ ou } \frac{d\phi}{dx} = 0$$

La répartition de température est linéaire et le flux constant. Soit

$$T(x) = Ax + B$$

Les deux constantes d'intégration A et B sont déterminées par les conditions d'échanges aux limites.

II.1.1. Température imposées sur les deux faces du Mur

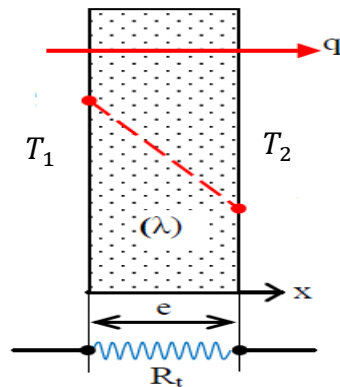


Figure 2.8 : Mur simple

On obtient

$$T(x) = \left(\frac{T_2 - T_1}{e}\right)x + T_1 \text{ et } \phi = -\lambda \left(\frac{T_2 - T_1}{e}\right)$$

Le flux de chaleur qui traverse un Mur de surface S est $\Phi = S\phi$. En écrivant

$$\phi = \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{e}{\lambda \cdot S}\right)} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$$

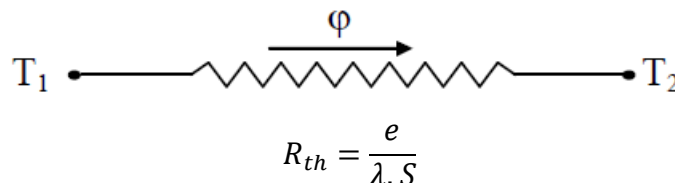


Figure 2.9 : Circuit électrique équivalent

▪ Analogie électrique

On remarque que cette relation est analogue à la loi d'Ohm

$$I = \frac{V_2 - V_1}{R}$$

Dans ces expressions, le flux de chaleur ϕ joue le rôle de l'intensité électrique I de la loi d'Ohm, alors que la chute de température dans le mur ΔT , est analogue à la différence de tension électrique ΔU dans le circuit. L'unité de la résistance thermique est fournie par le rapport d'une température par un flux thermique. Elle s'exprime en conséquence en K/W .

Remarque

L'usage de l'analogie formelle « électro-thermique » est très utile pour discuter le cas des deux configurations classiques, celle où les murs sont montés en série ou bien celle où les murs sont placés à côté les uns des autres, c'est-à-dire qu'ils sont montés en parallèle

II.1.2. Mur multicouches

II.1.2.1. En série

Ce cas d'étude fait référence à des applications pratiques telles que les revêtements des corps par plus d'une couche (fig.3.4). Nous pouvons citer l'exemple du revêtement d'un mur de maçonnerie à l'aide d'un crépissage plus l'enduit d'un côté et d'un simple crépissage de l'autre côté.

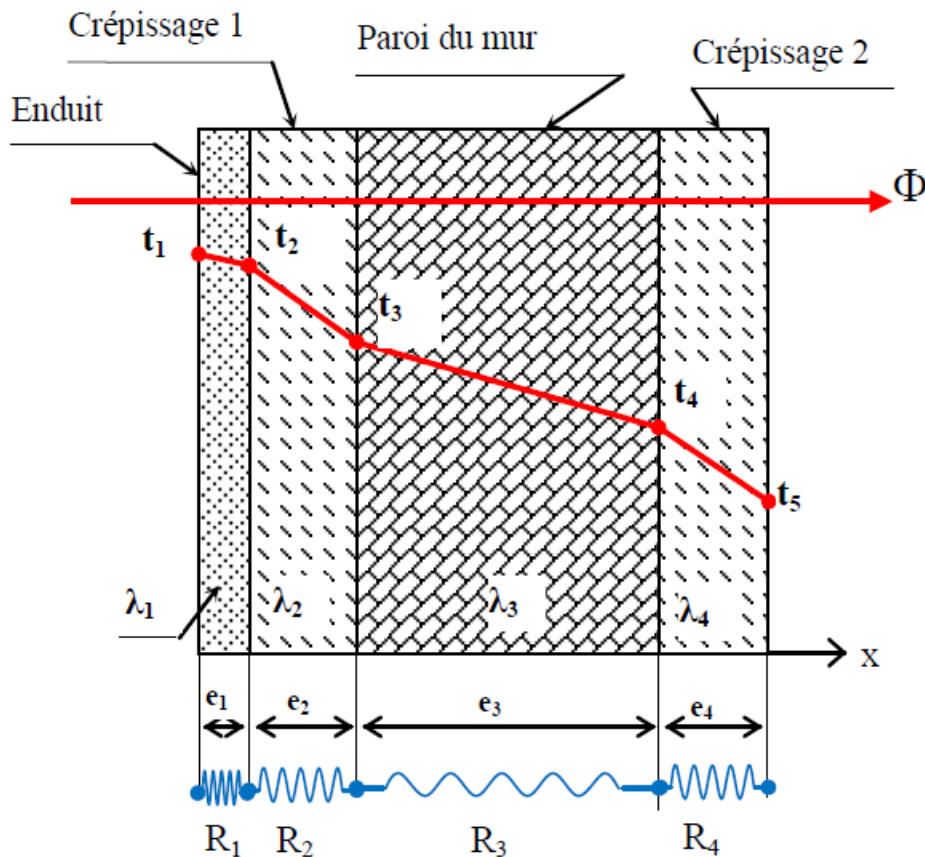


Figure 2.10 : Mur composé de plusieurs résistances thermiques en série et schéma équivalent.

En régime permanent, le flux de chaleur se conserve lors de la traversée du mur et s'écrit :

$$\varphi = \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{e_1}{\lambda_1 \cdot S}\right)} = \frac{T_2 - T_3}{\left(\frac{e_2}{\lambda_2 \cdot S}\right)} = \frac{T_3 - T_4}{\left(\frac{e_3}{\lambda_3 \cdot S}\right)} = \frac{T_4 - T_5}{\left(\frac{e_4}{\lambda_4 \cdot S}\right)}$$

D'où
$$\varphi = \frac{T_1 - T_5}{R_{th1} + R_{th2} + R_{th3} + R_{th4}} = \frac{T_1 - T_5}{R_{eq}}$$

Avec $R_{th1} = \frac{e_1}{\lambda_1 \cdot S}$, $R_{th2} = \frac{e_2}{\lambda_2 \cdot S}$, $R_{th3} = \frac{e_3}{\lambda_3 \cdot S}$ et $R_{th4} = \frac{e_4}{\lambda_4 \cdot S}$

Pour le cas d'un mur à n-couches, nous en déduisons l'expression de flux de chaleur qui est le suivant :

$$\varphi = \frac{T_1 - T_n}{\sum_{i=0}^n \frac{e_i}{\lambda_i \cdot S}} = \frac{T_1 - T_n}{R_{eq}}$$

II.1.2.1. En parallèle

Pour le cas de murs montés en parallèle (c'est-à-dire placés à côté les uns des autres au lieu d'être empilés), il faut écrire des relations analogues. Ici la surface de chaque mur peut être différente, mais par contre les températures pour tous les murs seront identiques sur chaque surface, T_1 d'un côté et T_2 de l'autre pour l'ensemble des murs.

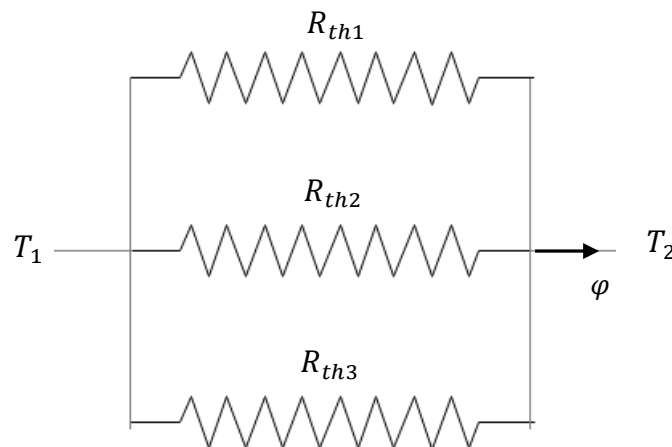
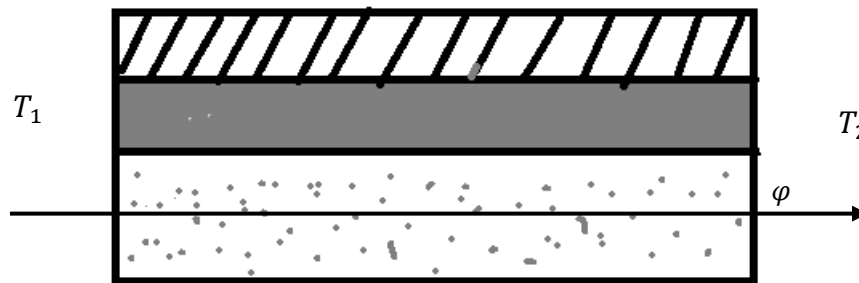


Figure 2.11 : Mur composé de plusieurs résistances thermiques en parallèle et schéma équivalent.

Par ailleurs, il n'y a pas de conservation du flux thermique dans chaque couche, et à la place il faut écrire que le flux total est la somme des différentes contributions transitant dans les différentes couches. Soit pour le cas d'un mur triple :

- La résistance thermique de chaque couche égale :

$$R_{th1} = \frac{e_1}{\lambda_1 \cdot S_1}, R_{th2} = \frac{e_2}{\lambda_2 \cdot S_2} \text{ et } R_{th3} = \frac{e_3}{\lambda_3 \cdot S_3}$$

- Le flux thermique de chaque couche :

$$\varphi_1 = \frac{T_1 - T_2}{R_{th1}} ; \varphi_2 = \frac{T_1 - T_2}{R_{th2}} \text{ et } \varphi_3 = \frac{T_1 - T_2}{R_{th3}}$$

Le fait d'écrire une loi de comportement thermique global sous la forme :

$$\varphi = \frac{T_1 - T_2}{R_{eq}} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{T_1 - T_2}{R_{th1}} + \frac{T_1 - T_2}{R_{th2}} + \frac{T_1 - T_2}{R_{th3}}$$

Par identification :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}} + \frac{1}{R_{th3}}$$

Ce sont bien les inverses des résistances thermiques qui s'ajoutent pour un mur en parallèle, comme c'est le cas aussi en électrocinétique pour un circuit électrique avec des résistances électriques en parallèle.

II.1.3. Échange par convection sur les deux faces du Mur

Lorsque la paroi sépare deux fluides à températures différentes, le mur d'une maison par exemple, les températures des surfaces externes ne sont pas connues. Supposons les fluides, suffisamment loin de la paroi, aux températures uniformes T_i et T_e avec $T_1 > T_2$. Aux voisinages des surfaces, les températures des fluides varient rapidement pour atteindre les valeurs T_1 et T_2 . Soient h_i et h_e les coefficients de transfert de chaleur par convection sur chacune des faces. On a

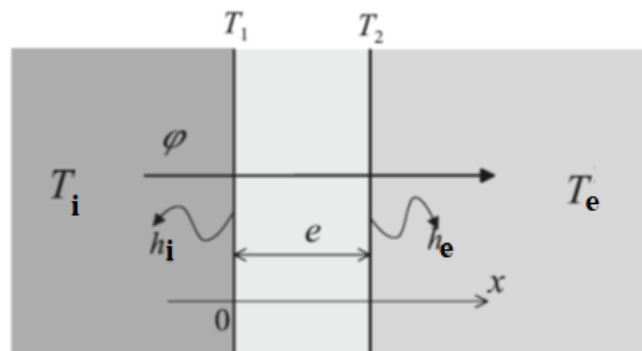


Figure 2.12 : Mur échange de la chaleur par convection sur ses deux faces.

$$\varphi = h_i \cdot S(T_i - T_1) = \frac{(T_i - T_1)}{\left(\frac{1}{h_i \cdot S}\right)}$$

De même sur la face de la paroi de côté du fluide à T_e

$$\varphi = h_e \cdot S(T_2 - T_e) = \frac{(T_2 - T_e)}{\left(\frac{1}{h_e \cdot S}\right)}$$

Le flux étant constant en régime stationnaire, on a par ailleurs

$$\varphi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$$

On obtient donc

$$\varphi = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{h_i S} + R_{th} + \frac{1}{h_e S}}$$

La résistance thermique de l'ensemble ; ou résistance thermique globale, est :

$$R_{tot} = \frac{1}{h_i S} + R_{th} + \frac{1}{h_e S}$$

En utilisant les outils de l'analogie électrique le transfert de chaleur dans la configuration étudiée peut être schématisé de la façon suivante :

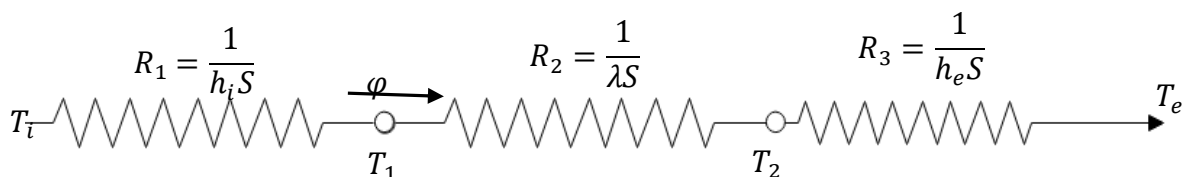


Figure 2.13 : Circuit électrique équivalent.

II.1.4. Mur composite

C'est le cas le plus couramment rencontré dans la réalité où les parois ne sont pas homogènes. Considérons à titre d'exemple un mur de largeur L constitué d'agglomérés creux.

En supposant le transfert unidirectionnel et en tenant compte des axes de symétrie, on peut se ramener au calcul du flux à travers l'élément isolé sur la droite de la figure et calculer la résistance thermique R équivalente d'une portion de mur de largeur L et de hauteur $\ell = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ en utilisant les lois d'association des résistances en série et en parallèle par la relation :

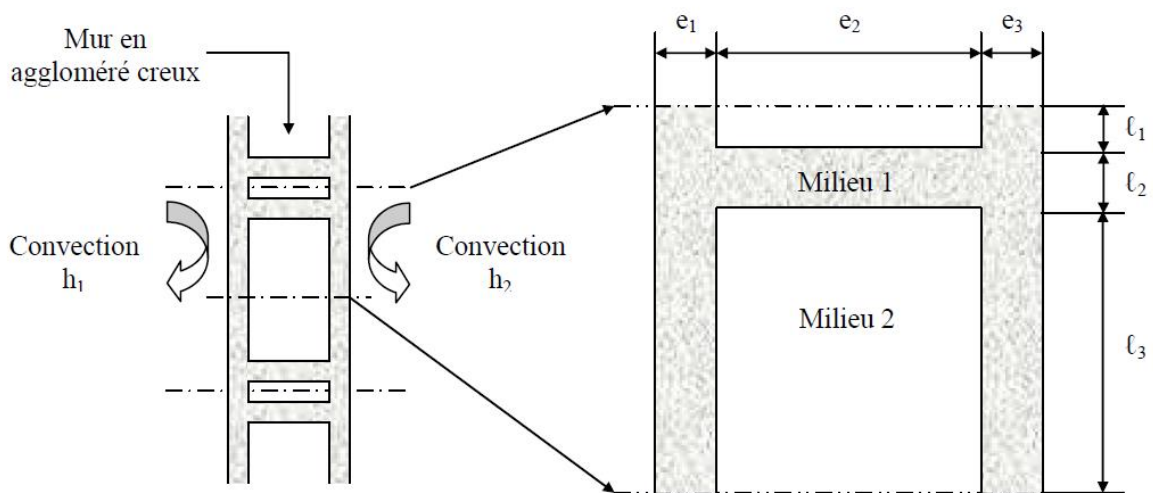


Figure 2.14 : Mur composite.

$$R_{tot} = R_1 + R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} + R_6 + R_7$$

Avec :

$$R_1 = \frac{1}{h_1 l L}, R_2 = \frac{e_1}{\lambda_1 l L}, R_3 = \frac{e_2}{\lambda_2 l_1 L}, R_4 = \frac{e_2}{\lambda_1 l_2 L}, R_5 = \frac{e_2}{\lambda_2 l_3 L}, R_6 = \frac{e_3}{\lambda_1 l L}, R_7 = \frac{1}{h_2 l L}$$

Ce qui peut être schématisé par le schéma électrique équivalent représenté sur la figure suivante :

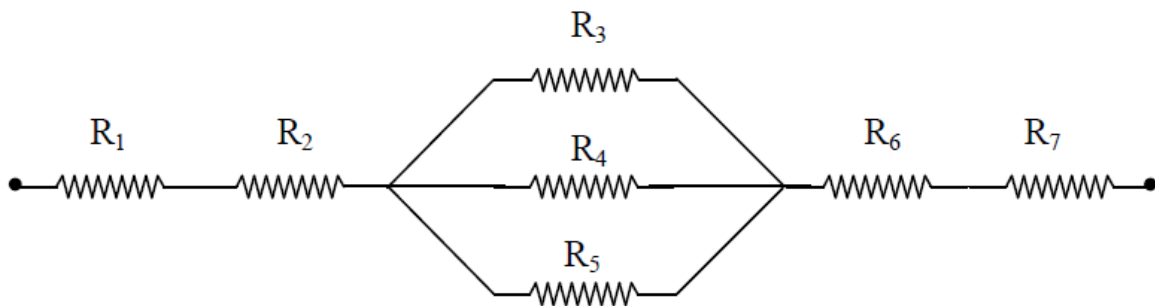


Figure 2.15 : Circuit électrique équivalent.

II.2. Conduction dans un cylindre creux

II.2.1. Les surfaces latérales isothermes

Considérons un cylindre creux de très grande longueur par rapport aux rayons intérieur R_1 et extérieur R_2 ($L \gg R_1$ et $L \gg R_2$) et dont les surfaces cylindriques sont à des températures uniformes et constantes T_1 et T_2 . Les isothermes sont des surfaces cylindriques coaxiales, le gradient de température est radial, le problème à deux dimensions géométriques mais la température n'est fonction que du rayon « r ».

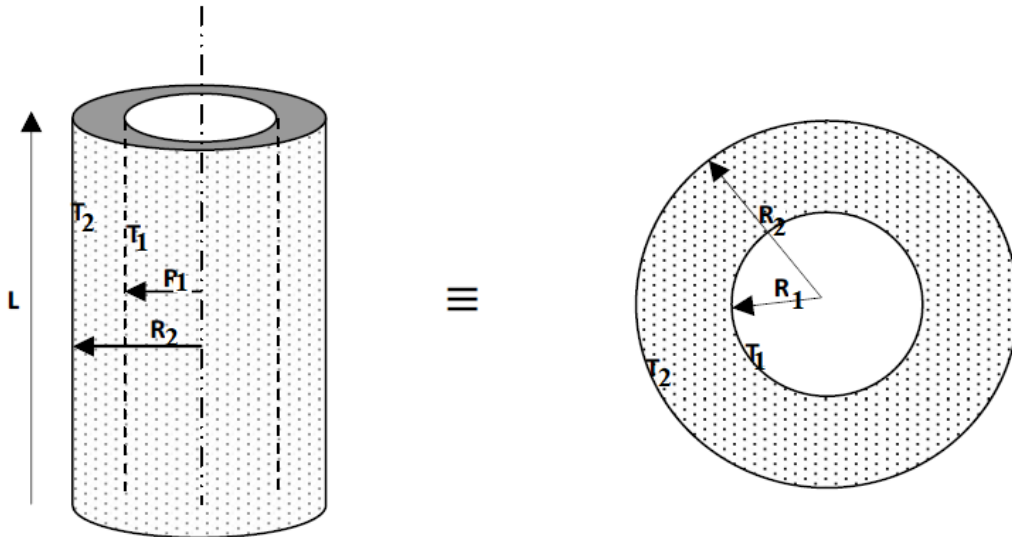


Figure 2.16 : Une paroi cylindrique.

Le système d'équations s'écrit donc :

$$\begin{cases} \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \\ T(R_1) = T_1 \\ T(R_2) = T_2 \end{cases}$$

En posant $u = \frac{dT}{dr}$, on obtient l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$r \frac{du}{dr} + u = 0$$

La solution d'une telle équation est :

$$u = \frac{C}{r}$$

Après intégration, l'expression de la distribution radiale des températures par :

$$T(r) = \int \frac{C}{r} dr = C \cdot \ln r + \ln A = \ln(Ar^C)$$

Les constantes d'intégration C et A sont déterminées à partir des conditions aux limites sur R_1 et R_2 .

Soit finalement :

$$T(r) = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_1/R_2)} \cdot \ln(r/R_1)$$

On déduit de la loi de Fourier le flux thermique :

$$\varphi = -\lambda \cdot S \frac{dT}{dr} = -\lambda S \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_1/R_2)} \frac{1}{r}$$

$$\varphi = -2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_1/R_2)}$$

D'où la résistance thermique du cylindre creux :

$$R = \frac{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda}$$

Dans le cas d'un cylindre mince, d'épaisseur « e », en utilisant l'approximation :

$$\ln\left(1 + \frac{e}{R_1}\right) = \frac{e}{R_1}$$

Les résultats précédents se simplifient en :

$$\varphi = \frac{2\pi \cdot R_1 \cdot \lambda \cdot L}{e} (T_1 - T_2)$$

II.2.2. Cylindre creux multicouche

C'est le cas pratique d'un tube recouvert d'une ou plusieurs couches de matériaux différents et où l'on ne connaît que les températures T_{f1} et T_{f2} des fluides en contact avec les faces interne et externe du cylindre ; h_1 et h_2 sont les coefficients de transfert de chaleur par convection entre les fluides et les faces internes et externes.

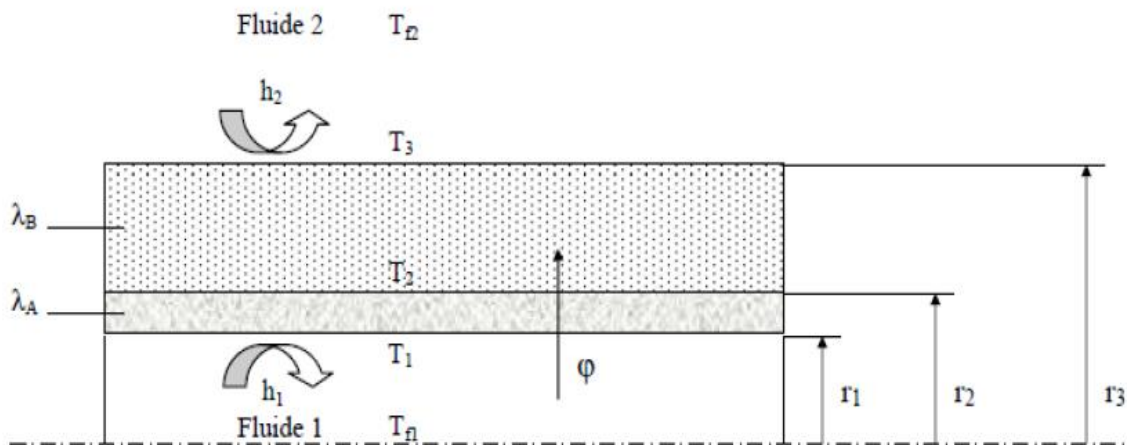


Figure 2.17 : Cylindre creux multicouche.

En régime permanent, le flux de chaleur se conserve lors de la traversée des différentes couches et s'écrit :

$$\varphi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 \cdot 2\pi \cdot r_1 L} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \lambda_A L} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi \lambda_B L} + \frac{1}{h_2 \cdot 2\pi \cdot r_3 L}} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_{tot}}$$

La résistance thermique de l'ensemble ; ou résistance thermique globale, est :

$$R_{tot} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

Avec :

$$R_1 = \frac{1}{h_1 \cdot 2\pi \cdot r_1 L}, R_2 = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \lambda_A L}, R_3 = \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi \lambda_B L} \text{ et } R_4 = \frac{1}{h_2 \cdot 2\pi \cdot r_3 L}$$

En utilisant les outils de l'analogie électrique le transfert de chaleur dans la configuration étudiée peut être schématisé de la façon suivante :

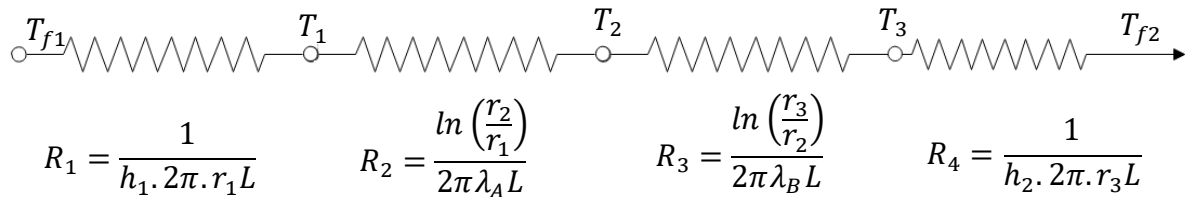


Figure 2.18 : Circuit électrique équivalent.

II.2.3. Epaisseur critique d'un revêtement isolant cylindrique

Considérons un tube cylindrique de rayon r_i et r_e entouré d'une couche isolante de rayon extérieur r et de conductivité thermique λ_{is} . La résistance totale du tube isolé est :

$$R_{tot} = \frac{1}{h_1 \cdot 2\pi \cdot r_i L} + \frac{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}{2\pi \lambda L} + \frac{\ln\left(\frac{r}{r_e}\right)}{2\pi \lambda_{is} L} + \frac{1}{h_2 \cdot 2\pi \cdot r L}$$

Examinons comment varie R_{tot} avec le rayon extérieur d'isolant. Pour cela on étudie la fonction $R_{tot}(r)$.

$$\frac{dR_{tot}}{dr} = \frac{1}{2\pi \lambda_{is} L \cdot r^2} \left(r - \frac{\lambda_{is}}{h_2} \right)$$

D'où

$$\frac{dR_{tot}}{dr} = 0 \text{ si } r = \frac{\lambda_{is}}{h_2} = r_c$$

r_c est appelé **rayon critique**, il correspond à une **résistance thermique extrême**.

On a donc

$$\frac{dR_{tot}}{dr} = \frac{1}{2\pi \lambda_{is} L \cdot r^2} (r - r_c)$$

Deux cas peuvent alors se produire en fonction de la valeur prise par le rayon critique par rapport à r_e

- Si $r_c \leq r_e (\leq r)$ $\frac{dR_{tot}}{dr} > 0$. C'est le cas des grosses conduites. Le calorifugeage conduit « naturellement » à une augmentation de la résistance thermique d'ensemble. Il est donc efficace.
- Si $r_c \geq r_e$ Lorsque
 - $r_e < r < r_c$, $\frac{dR_{tot}}{dr} > 0$. R_{tot} décroît avec r
 - $r > r_c$ $\frac{dR_{tot}}{dr} < 0$; R_{tot} croît avec r

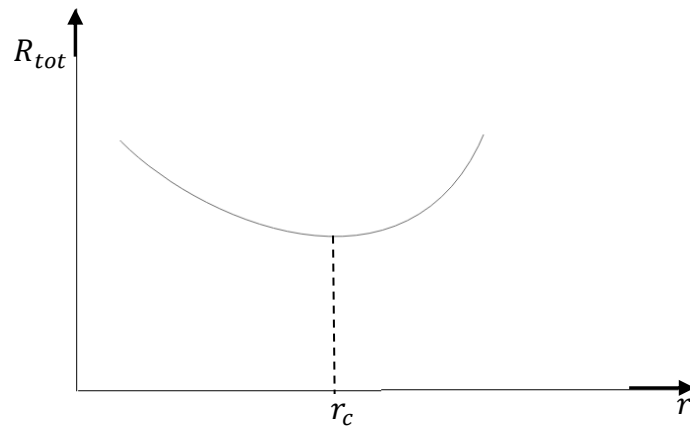


Figure 2.19 : Variation de la résistance thermique totale avec le rayon extérieur d'isolant.

II.3. Conduction dans une sphère creuse

Ce problème est semblable au précédent. Une sphère creuse, de rayons intérieur R_1 , et extérieur R_2 , a ses surfaces limites à des températures uniformes et constantes T_1 et T_2 . Les isothermes sont des sphères concentriques. La température n'est fonction que du rayon « r ».

Le système s'écrit donc :

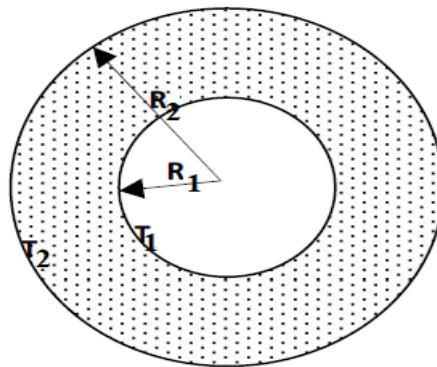


Figure 2.20 : Sphère creuse.

$$\begin{cases} \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \\ T(R_1) = T_1 \\ T(R_2) = T_2 \end{cases}$$

En posant $u = \frac{dT}{dr}$, on obtient l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$r \frac{du}{dr} + 2u = 0$$

La solution d'une telle équation est :

$$u = \frac{C}{r^2}$$

Après intégration, l'expression de la distribution radiale des températures est donnée par :

$$T(r) = A + \frac{C}{r}$$

Les constantes d'intégration C et A sont déterminées à partir des conditions aux limites sur R_1 et R_2 .

Soit finalement :

$$T(r) = T_1 + (T_1 - T_2) \frac{1/r - 1/R_1}{1/R_1 - 1/R_2}$$

On déduit de la loi de Fourier le flux thermique :

$$\begin{aligned} \varphi &= -\lambda \cdot S \frac{dT}{dr} = \lambda S \frac{(T_1 - T_2)}{1/R_1 - 1/R_2} \cdot \frac{1}{r^2} \\ \varphi &= \frac{\pi \cdot \lambda}{1/R_1 - 1/R_2} (T_1 - T_2) \end{aligned}$$

D'où la résistance thermique de la sphère creuse :

$$R = \frac{1/R_1 - 1/R_2}{\pi \cdot \lambda}$$

III. Conduction en régime permanent avec production de chaleur

On ne considérera ici que des cas simples pour lesquels la production de chaleur est indépendante de la température et uniforme dans tout le volume (\dot{q} constante).

III.1. Mur simple avec production de chaleur

On considère un mur constitué d'un matériau homogène et indéformable de conductivité thermique constante, d'épaisseur e . On suppose que la hauteur et la profondeur du mur sont très grandes devant son épaisseur de façon à pouvoir faire l'hypothèse du problème unidirectionnel. Ce mur est soumis à une dissipation volumique de chaleur \dot{q} . Le flux de chaleur se propagera dans une seule direction (suivant x par exemple) et la température à l'intérieur du mur ne dépendra que d'une seule variable d'espace : $T = T(x)$

III.1.1. Température imposées sur les deux faces du Mur

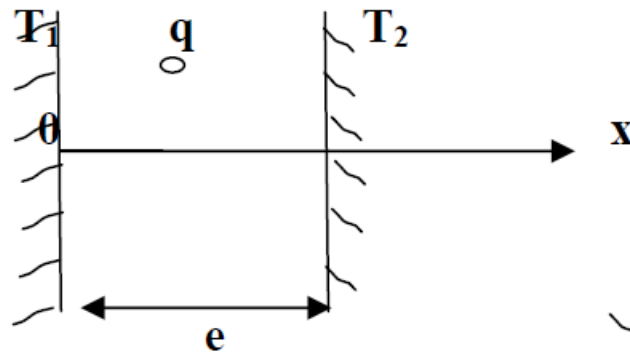


Figure 2.21 : Mur simple avec production de chaleur.

L'équation différentielle de la conduction dans un mur plan unidimensionnel en régime stationnaire dans lequel se trouve une source de chaleur interne est représentée par l'équation de Poisson.

$$\frac{dT^2}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0$$

L'intégration de l'équation de Poisson montre que la loi de répartition de température est parabolique. Si l'une des faces du mur est située en $x = 0$, la loi générale est donnée par

$$T(x) = -\frac{\dot{q}}{2\lambda}x^2 + Ax + B$$

Les constantes d'intégration A et B dépendent des conditions d'échanges surfaciques

Si les températures des faces $x = 0$ et $x = e$ sont maintenues aux valeurs T_1 et T_2 respectivement, la température varie selon

$$T(x) = \frac{\dot{q}x}{2\lambda}(e - x) + \frac{(T_2 - T_1)}{e}x + T_1$$

La position du maximum de température est donnée par :

$$x_{max} = \frac{e}{2} + \frac{\lambda}{\dot{q}e}(T_2 - T_1)$$

Et la température maximum est :

$$T_{max} = \frac{\dot{q}e^2}{8\lambda} + \frac{(T_2 + T_1)}{2} + \frac{(T_1 - T_2)^2\lambda}{2\dot{q}e^2}$$

III.1.2. Échange par convection sur les deux faces du Mur

Reprenons les mêmes données que le cas précédent avec en plus l'existence d'un échange de chaleur par convection sur les deux faces du mur. L'échange de chaleur a pour rôle d'évacuer

la chaleur générée dans le Mur. Le fluide a une température constante. Le coefficient de transfert de chaleur par convection h est aussi constant.

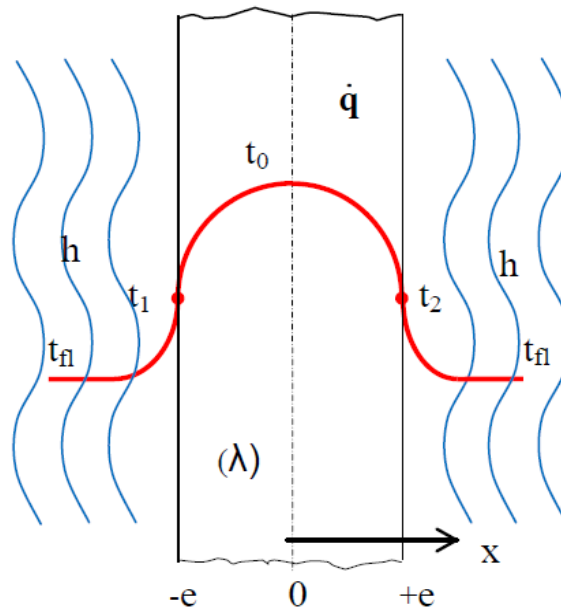


Figure 2.22 : Mur simple échange par convection sur les deux faces avec production de chaleur.

L'équation d'énergie est la même que pour les cas précédents.

$$\frac{dT^2}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0$$

Les conditions aux limites prennent en compte l'échange de chaleur par convection.

$$\text{Pour } x = +e \longrightarrow \varphi = -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=+e} = h(T_2 - T_{f1})$$

$$\text{Pour } x = -e \longrightarrow \varphi = -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=-e} = h(T_1 - T_{f1})$$

Etant donné, que les conditions aux limites sont identiques des deux côtés du mur, le champ de température doit être symétrique par rapport au plan $x=0$. La chaleur est transmise à travers les surfaces de gauche et de droite avec la même intensité. Ainsi, nous convenons d'étudier la distribution de la température d'un seul côté (côté des x positifs)

D'où la condition de symétrie suivante :

$$\text{Pour } x = 0 \longrightarrow \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

Après une double intégration on obtient l'équation suivante :

$$T(x) = -\frac{\dot{q}}{2\lambda}x^2 + Ax + B$$

On utilisé la condition de symétrie et la condition au limite pour $x=e$, pour déterminer les constantes A et B, alors la distribution de la température s'écrit :

$$T(x) = \frac{\dot{q}e^2}{2\lambda} \left[1 - \left(\frac{x}{e} \right)^2 \right] + \frac{\dot{q}e}{h} + T_{f1}$$

Pour de très grandes valeurs de h, la température superficielle en $x = e$ prend une valeur très proche de T_{f1} . On obtient alors :

$$T(x) = \frac{\dot{q}e^2}{2\lambda} \left[1 - \left(\frac{x}{e} \right)^2 \right] + T_{f1}$$

III.2. Barre cylindrique

La barre de rayon r_e doit être de longueur suffisante afin de pouvoir la considérer infinie. Nous considérons le cylindre en contact avec un fluide de refroidissement à la température T_{f1} constante. Le coefficient de transfert de chaleur par convection h est aussi constant.

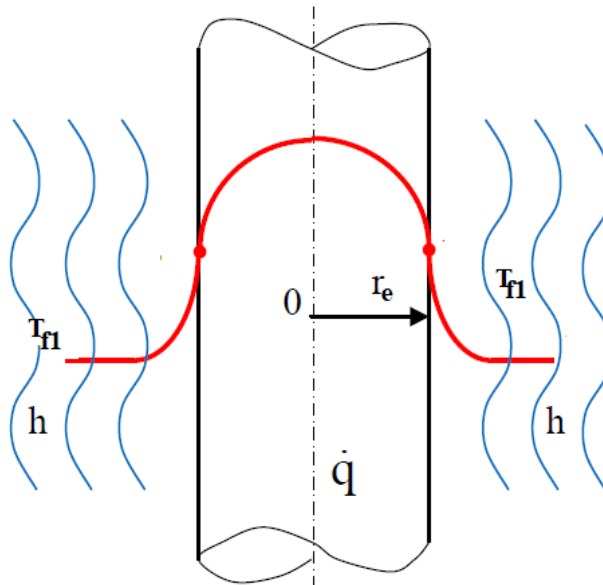


Figure 2.23 : Barre cylindrique avec production de chaleur.

L'équation différentielle de la conduction dans le cylindre en régime stationnaire (permanent) est de la forme suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0$$

Les conditions aux limites se présentent comme suit :

Pour $r = 0$; $\frac{dT}{dr} \Big|_{r=0} = 0$

Pour $r = r_e$; $-\lambda \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_e} = h(T_e - T_{f1})$

Le profil radial de température est :

$$T(r) = \frac{\dot{q}}{4\lambda}(r_e^2 - r^2) + \frac{\dot{q}r_e}{2h} + T_{f1}$$

La distribution de la température dans le cylindre se fait suivant une courbe parabolique.

La température est maximale sur l'axe du cylindre ($r = 0$), égale à :

$$T_{max} = \frac{\dot{q}r_e^2}{4\lambda} + \frac{\dot{q}r_e}{2h} + T_{f1}$$

IV. Les ailettes

On remarque parfois que le flux thermique échangé entre un corps et le milieu extérieur est faible. Si on veut augmenter cet échange ; on a d'après la Loi de Newton $\varphi = h.S(T_p - T_f)$

- Soit l'augmentation de h (choisir un fluide à h élevé).
- Soit l'augmentation de l'écart de température ΔT entre le corps et celle du fluide.
- Soit augmenter la surface d'échange S .

Généralement on procède à l'augmentation de la surface d'échange en ajoutant des surfaces à la surface du corps initiale. Ces surfaces ajoutées sont appelées **ailettes**.

Ces ailettes sont utilisées, en particulier dans les échangeurs industriels, les radiateurs de véhicule, de chauffage central et pour le refroidissement des montages électroniques. Elles permettent d'augmenter l'échange thermique entre un corps solide et le milieu environnant.

Il existe des ailettes de section uniforme (rectangulaire, circulaire) et des ailettes de section non uniforme (triangulaire, conique...).

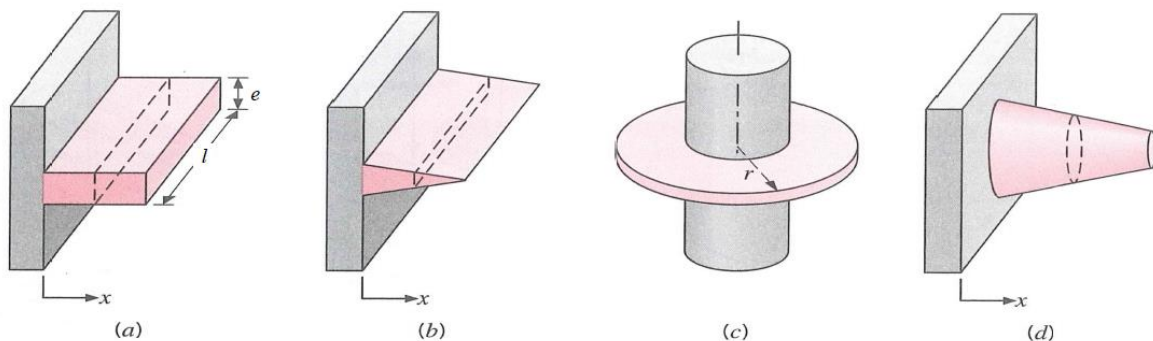


Figure 2.24 : différents types d'ailettes : (a) ailette droite à section constante, (b) ailette droite à section variable, (c) ailette annulaire, (d) ailette en forme d'aiguille à section variable.

Avant de commencer l'étude des ailettes un certain nombre d'hypothèse sont établies dans le but de simplifier l'analyse.

IV.1. L'équation de la barre

On considère une barre à section de longueur L très supérieur au rayon r . L'extrémité en $x = 0$ chauffée constamment est maintenue à la température T_0 et la barre baigne dans un fluide. On suppose la température du fluide et le coefficient d'échange surfacique uniformes et la barre homogène. Ces trois hypothèses font que le transfert de chaleur par conduction dans la barre n'est fonction que des variables axiale et radiale, x et r respectivement puisque le problème présente une parfaite symétrie autour de l'axe. Dans n'importe quelle section droite de la barre, les isothermes sont donc des cercles concentriques.

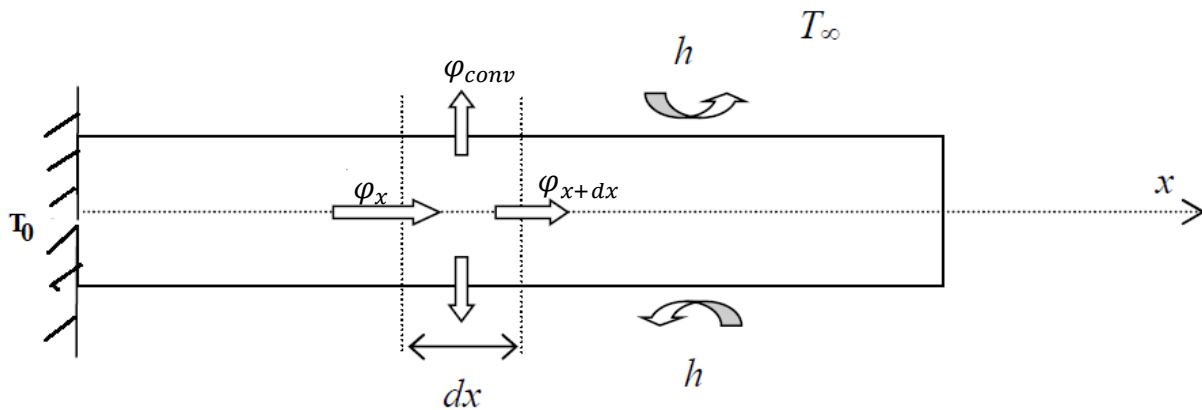


Figure 2.25 : Modèle de la barre.

Si l'on suppose de plus que la barre est constituée par un matériau de très grande conductivité thermique, on conçoit que l'écart de température entre l'axe et la périphérie est d'autant plus faible que le coefficient d'échange surfacique est petit. En effet, il suffit d'un faible gradient de température dans la direction radiale pour évacuer le flux de chaleur échangé à la surface de la barre. On peut considérer que la température dans une section est quasiment uniforme et adopter une modélisation unidirectionnelle pour le transfert conductif.

De façon générale, ce modèle est applicable si

$$\frac{R_c}{R_s} \ll 1$$

Ce rapport, appelé nombre de Biot, est égal à :

$$Bi = \frac{\sigma/\lambda}{1/h}$$

Et on montre à partir de solutions exactes ou numérique du problème complet que l'hypothèse de conduction axiale est admissible lorsque $Bi < 0.1$

Effectuons un bilan d'énergie sur le système constitué d'une tranche de l'ailette comprise entre x et $x + dx$:

$$\varphi_x = \varphi_{x+dx} + \varphi_{conv}$$

Avec

- Flux de chaleur transmis par conduction en x : $\varphi_x = -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_x$
- Flux de chaleur transmis par conduction en $x + dx$: $\varphi_{x+dx} = -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x+dx}$
- Flux évacué par convection à la frontière entre x et $x + dx$: $\varphi_{conv} = h \cdot P \cdot dx (T - T_\infty)$

Où S est l'aire de la section de passage du flux de conduction.

p est le périmètre de l'ailette (périmètre d'échange du flux convectif).

L'équation de bilan devient alors :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{\lambda S}(T - T_\infty) = 0$$

En posant $\theta = T - T_\infty$ et $\alpha^2 = \frac{hP}{\lambda S}$, l'équation de bilan s'écrit :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \alpha^2\theta = 0$$

L'équation est une équation différentielle de second ordre à coefficients constants dont la solution générale est de la forme :

$$\theta(x) = A \exp(-\alpha x) + B \exp(\alpha x)$$

Ou encore :

$$\theta(x) = C \operatorname{ch}(\alpha x) + D \operatorname{sh}(\alpha x)$$

Les conditions aux limites permettent de déterminer dans chaque cas la solution correspondante. Pour cela, la première solution est bien adaptée aux problèmes relatifs aux barres très longues, la seconde convenant aux géométries limitées.

IV.1.1. Ailette longue

La température de l'extrémité d'une ailette longue est très voisine de la température ambiante. Cela signifie que l'écart de température $\theta(x)$ doit tendre vers zéro lorsque x augmente indéfiniment. On a donc

$$T(0) = T_0 \qquad \theta(0) = T(0) - T_\infty = \theta_0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T(x) = T_\infty \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x) = 0$$

D'où

$$\theta(x) = \theta_0 \exp(-\alpha x)$$

Ce qui montre que l'écart de température entre l'ailette et l'ambiance décroît exponentiellement à partir de sa valeur maximale au pied, θ_0 . On en déduit que :

$$T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \exp(-\alpha x)$$

IV.1.2. Ailette mince

Pour une barre mince de longueur L , le flux traversant l'extrémité $x = L$ est nulle ou négligeable, les constantes C et D sont données par :

$$\begin{aligned} T(0) = T_0 & & \theta(0) = T(0) - T_\infty = C \\ \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0 & & \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0 & & -\frac{D}{c} = th(\alpha \cdot L) \end{aligned}$$

On obtient finalement la solution :

$$T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \frac{ch[\alpha(L-x)]}{ch(\alpha \cdot L)}$$

IV.1.3. Cas général

Lorsque la barre est courte, tout le flux n'est pas dissipé par sa surface latérale, et sa section droite extrême est encore traversée par un flux convectif. Les constantes C et D de la solution générale sont déterminée par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} T(0) = T_0 & & \theta(0) = T(0) - T_\infty = C \\ -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = hS(T(L) - T_\infty) & & D = \frac{sh(\alpha L) + \left[\frac{h}{\lambda \alpha} \right] ch(\alpha L)}{ch(\alpha L) + \left[\frac{h}{\lambda \alpha} \right] sh(\alpha L)} \end{aligned}$$

D'où la solution :

$$T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \frac{sh(\alpha(L-x)) + \left[\frac{h}{\lambda \alpha} \right] ch(\alpha(L-x))}{ch(\alpha \cdot L) + \left[\frac{h}{\lambda \alpha} \right] sh(\alpha L)}$$

IV.1.4. Pont thermique

Les constantes d'intégration sont obtenues en résolvant le système d'équations :

$$\begin{aligned} T(0) = T_0 & & \theta(0) = T(0) - T_\infty = C \\ T(L) = T_1 & & \theta(L) = T(L) - T_\infty = Cch(\alpha L) + Dsh(\alpha L) \end{aligned}$$

La répartition de température a pour expression :

$$T(x) = T_{\infty} + (T_1 - T_{\infty}) \frac{sh(\alpha x)}{sh(\alpha L)} + (T_0 - T_{\infty}) \frac{sh(\alpha(L-x))}{sh(\alpha L)}$$

IV.2. Flux de chaleur transfère par une ailette

Dans tous les cas, le flux total transféré à la surface de l'ailette est égal au flux traversant la base de l'ailette. On le notera φ_a .

Pour une ailette à constante, on peut écrire

$$\varphi_a = -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = -\lambda S \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0}$$

Ou

$$\varphi_a = \int_0^L hP(T(x) - T_{\infty}) dx = \int_0^L hP\theta(x) dx$$

a. Ailette longue

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = -\alpha\theta_0$$

D'où

$$\varphi_a = \lambda S \alpha (T_0 - T_{\infty})$$

Mais

$$\lambda S \alpha = \lambda S \sqrt{hP/\lambda S} = \sqrt{hP\lambda S}$$

Et donc

$$\varphi_a = (T_0 - T_{\infty}) \sqrt{hP\lambda S}$$

On vérifie le bilan thermique en calculant le flux échangé à la surface de l'ailette. Soit

$$\varphi_a = \int_0^{\infty} hP\theta_0 \exp(-\alpha x) dx = (T_0 - T_{\infty}) \sqrt{hP\lambda S}$$

b. Ailette mince

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = -\alpha\theta_0 \frac{sh(\alpha L)}{ch(\alpha L)} = -\alpha\theta_0 th(\alpha L)$$

D'où

$$\varphi_a = (T_0 - T_{\infty}) \sqrt{hP\lambda S} \cdot th(\alpha L)$$

Ou encore en calculant le flux surfacique

$$\varphi_a = \int_0^L hP\theta_0 \frac{ch(\alpha(L-x))}{ch(\alpha L)} dx = (T_0 - T_{\infty}) \sqrt{hP\lambda S} th(\alpha L)$$

Ce qui donne même expression.

c. Cas général

$$\varphi_a = (T_0 - T_\infty)\sqrt{hP\lambda S} \frac{sh(\alpha L) + \left[\frac{h}{\lambda\alpha} \right] ch(\alpha L)}{ch(\alpha L) + \left[\frac{h}{\lambda\alpha} \right] sh(\alpha L)}$$

d. Pont thermique

$$\varphi_a = (T_0 - T_\infty)\sqrt{hP\lambda S} \frac{(T_0 - T_\infty)ch(\alpha L) + (T_1 - T_\infty)sh(\alpha L)}{sh(\alpha L)}$$

IV.3. Performances des ailettes

Pour évaluer les performances des ailettes, deux notions totalement différentes introduites : l'efficacité et le rendement.

L'efficacité est le rapport du flux transféré par l'ailette au flux échangé par la surface non ailette pour un même coefficient d'échange et un même écart de température. Soit

$$\varepsilon = \frac{\varphi_a}{hS_b(T_0 - T_\infty)} > 1$$

Avec S_b surface de la section du pied de l'ailette.

La définition de l'efficacité suppose que le coefficient de transfert n'est pas modifié par la présence de l'ailette, ce qui est très approximatif notamment lorsque la surface est refroidie par convection naturelle

Le rendement est le rapport du flux transféré par l'ailette au flux maximal transférable, c'est-à-dire le flux qui serait transféré si toute la surface de l'ailette était à température uniforme T_0 . Soit

$$\eta = \frac{\varphi_a}{hS_e(T_0 - T_\infty)} < 1$$

Où S_e est la surface d'échange.

La relation entre rendement et efficacité est donc

$$\varepsilon = \left(\frac{S_e}{S_b} \right) \eta$$

Le flux réellement transféré par une ailette peut s'écrire en fonction du rendement sous la forme :

$$\varphi_a = \eta h S_e (T_0 - T_\infty)$$

IV.3.1. Etude de l'efficacité

L'étude se rapporte d'abord à une ailette rectangulaire mine d'épaisseur e , de largeur l et de longueur L .

En remplaçant φ_a par son expression dans la définition de ε on obtient :

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{hP\lambda S}}{hS} th(\alpha L) = \sqrt{\frac{P\lambda}{hS}} th(\alpha L)$$

Le périmètre est égal à $P = 2l + 2e$ et la section a pour aire $S = el$.

Dans le cas d'une ailette rectangulaire mince, l'épaisseur est beaucoup plus petite que la largeur de sorte que

$$\frac{P}{S} = \frac{2l + 2e}{le} \cong \frac{2}{e}$$

Et donc

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2\lambda}{he}} th(\alpha L) = \sqrt{\frac{2}{Bi}} th(\alpha L)$$

Par conséquent, $\varepsilon \gg 1$ si

- Bi est petit (il faut que $Bi < 0.1$ pour que la théorie des ailettes soit valable)
- αL est suffisamment grand.

$$\text{Mais } \alpha^2 = \frac{hP}{\lambda S} = \frac{2h}{\lambda e} = \frac{2he}{\lambda} \frac{1}{e^2} = 2Bi \frac{1}{e^2}$$

$$\text{Et donc } \alpha L = \sqrt{2Bi} \frac{L}{e} = \sqrt{2Bi} A$$

Où $A = \frac{L}{e}$ est l'allogement de l'ailette. L'efficacité peut donc s'exprimer uniquement en fonction de Bi et de A. soit

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{Bi}} th(\sqrt{2Bi} A)$$

Exemple numérique :

Pour $Bi=0.1$, valeur maximale du nombre de Biot compatible avec l'hypothèse qui est à la base de la théorie simplifiée des ailettes, on obtient

$$\varepsilon = 4.47 th(0.447 \cdot A)$$

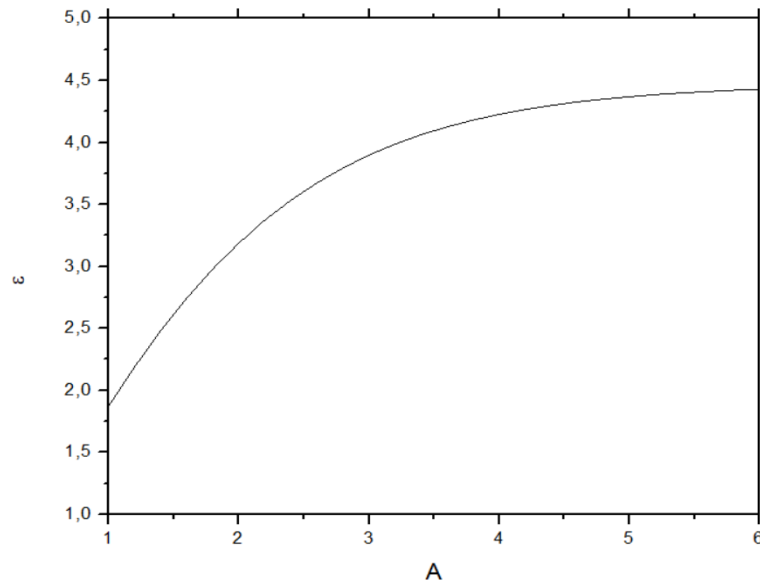


Figure 2.26 : Variation de l'efficacité d'une ailette d'une ailette rectangulaire mince en fonction de son allongement ($Bi=0.1$).

La figure montre que l'efficacité n'augmente pratiquement plus avec l'allongement lorsque $A > 5$.

IV.3.2. Etude du rendement

Le rendement d'une ailette rectangulaire mince s'écrit :

$$\eta = \frac{\sqrt{hP\lambda S} \operatorname{th}(\alpha L)}{hS_e} = \frac{\sqrt{hP\lambda S} \operatorname{th}(\alpha L)}{2hL}$$

Où la surface d'échange S_e a pour aire

$$S_e = 2(LL + eL) \cong 2LL$$

Mais

$$\sqrt{hP\lambda S} \cong \sqrt{2h\lambda l^2 e} = l\sqrt{2h\lambda e}$$

Et donc

$$\frac{\sqrt{hP\lambda S}}{2hL} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\lambda e}{2h}} = \frac{1}{\alpha L} = \frac{1}{\sqrt{2Bi} A}$$

D'où

$$\eta = \frac{\operatorname{th}(\alpha L)}{\alpha L} = \frac{\operatorname{th}(\sqrt{2Bi} A)}{\sqrt{2Bi} A} < 1$$

Pour $Bi = 0.1$

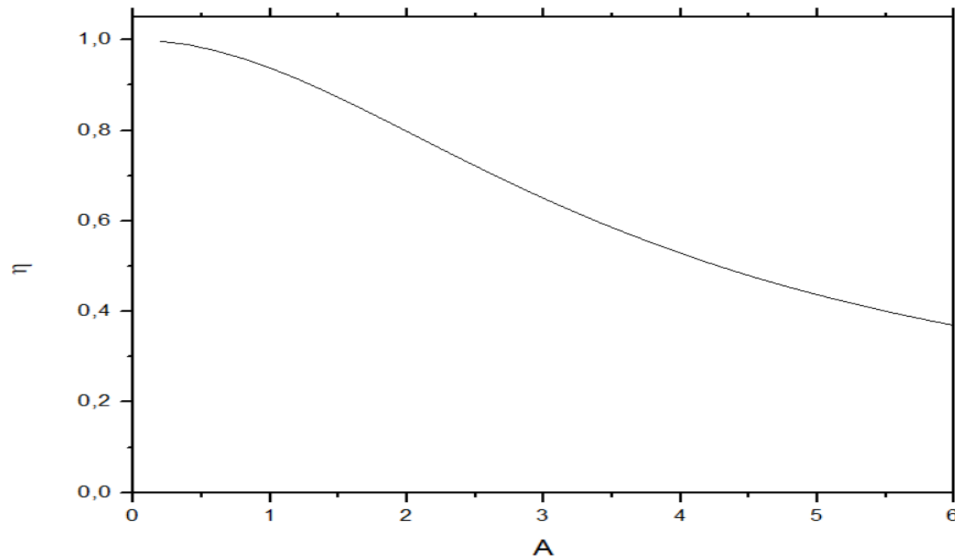


Figure 2.27: Variation du rendement d'une ailette rectangulaire mince

On en déduit que le rendement diminue avec l'allongement de l'ailette lorsque le nombre de Biot est fixé.

V. Conduction de chaleur en Régime Stationnaire Multidimensionnel

Dans le cas où la diffusion de la chaleur ne s'effectue pas selon une direction unique, trois méthodes de résolution peuvent être appliquées :

V.1. Méthode analytique de séparation de variable

Pour un corps isotrope et homogène, en régime permanent et sans sources de chaleur, l'équation générale de la conduction se réduit à

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Soit la plaque rectangulaire illustrée ci-dessous. On essaye de déterminer la distribution de la température dans cette plaque en fonction de x et y.

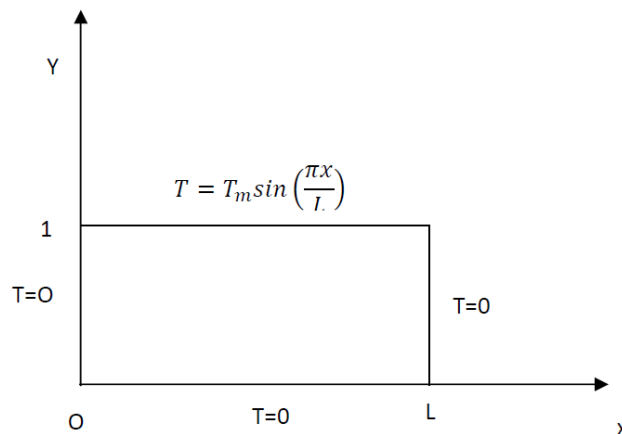


Figure 2.28: Plaque rectangulaire.

Posons $T(x, y) = X(x).Y(y)$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = Y \frac{d^2 T}{dx^2} \text{ et } \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = X \frac{d^2 T}{dy^2}$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 T}{dy^2} = -a^2$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 T}{dx^2} + a^2 X = 0 \\ \frac{d^2 T}{dy^2} - a^2 Y = 0 \end{cases}$$

Dont la solution générale s'exprime par :

$$X(x) = A \cos(ax) + B \sin(ax)$$

$$Y(y) = C e^{ay} + D e^{-ay}$$

L'expression de la température égale :

$$T(x, y) = X(x).Y(y) = (A \cos(ax) + B \sin(ax)).(C e^{ay} + D e^{-ay})$$

Les conditions limites permettront d'évaluer les constantes :

$$T(x, y = 0) = 0 \quad C = -D$$

$$T(x = 0, y) = 0 \quad A = 0$$

$$T(x = L, y) = 0 \quad 2BC \sin(aL).sh(ay) = 0$$

La solution de cette dernière équation impose que $\sin(aL)$ soit nul c'est-à-dire que $aL = n\pi$

Donc

$$a = \frac{n\pi}{L} \text{ avec } n=1,2,3,\dots$$

L'existence d'une infinité de solution dont la somme est aussi solution de cette équation.

Cette dernière s'exprime par :

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).sh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$$

La dernière condition aux limites permet l'évaluation de la constante C_n

$$T(x, y = 1) = T_m \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).sh\left(\frac{n\pi}{L}.1\right)$$

et impose que seule la constante C_1 est nécessaire. Elle s'exprime par :

$$C_1 = \frac{T_m}{sh\left(\frac{\pi}{L}\right)}$$

et la distribution de la température s'exprime finalement par :

$$T(x, y) = T_m \frac{\text{sh}\left(\frac{\pi}{L} y\right)}{\text{sh}\left(\frac{\pi}{L}\right)} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right)$$

V.2. Méthode du coefficient de forme

Dans les systèmes bidimensionnels ou tridimensionnels où n'interviennent que deux températures limites T_1 et T_2 , on montre que le flux de chaleur peut se mettre sous la forme :

$$\varphi = \lambda \cdot F(T_1 - T_2)$$

Avec :

λ : Conductivité thermique du milieu séparant les surfaces S1 et S2 ($W m^{-1} K^{-1}$)

T_1 : Température de la surface S1 (K)

T_2 : Température de la surface S2 (K)

F : Coefficient de forme (m)

Le coefficient de forme F ne dépend que de la forme, des dimensions et de la position relative des deux surfaces S1 et S2.

V.3. Méthodes numériques

Dans le cas où la méthode du coefficient de forme ne peut pas s'appliquer (surfaces non isothermes par exemple), il faut résoudre l'équation de la chaleur numériquement :

- Méthode des différences finies
- Méthode des éléments finis.
- Méthode des volumes finis...

VI. Conduction de chaleur en régime variable

Dans cette partie, afin de simplifier l'exposé, on se limite à deux variables : une variable spatiale x et le temps t . Cette présentation correspond à de nombreux cas pratiques où les conditions aux limites sont indépendantes de y et z . Ainsi l'équation de la chaleur se réduit à :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Où a est le coefficient de diffusivité thermique (en m^2/s)

$$a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$$

VI.1. Milieu à température uniforme

VI.1.1. Trempe d'une bille métallique

Ce processus consiste à immerger une bille initialement à la température T_0 , dans un bain maintenu à température constante, $T_\infty \neq T_0$.



Figure 2.29: Trempe d'une bille dans un fluide à température T_∞ .

On suppose que la température de la bille est uniforme, ce qui sera quasiment le cas si la bille est de petite taille et/ou si la conductivité thermique du matériau constituant la bille est élevée.

Dans ce problème, il n'y a pas de production interne de chaleur. L'équation s'écrit :

$$-\rho C_p V \frac{dT}{dt} = hS(T - T_\infty)$$

La température en fonction du temps t est solution du système :

$$\begin{cases} \rho C_p V dT = -hS(T - T_\infty) dt \\ T = T_0 \text{ à } t = 0 \end{cases}$$

D'où la solution :

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp\left(-\frac{hS}{\rho C_p V} t\right)$$

On remarque que le groupement $\frac{\rho C_p V}{hS}$ est homogène à un temps, on l'appellera τ la constante de temps du système :

$$\tau = \frac{\rho C_p V}{hS}$$

Cette grandeur est fondamentale dans la mesure où elle donne l'ordre de grandeur de temps du phénomène physique, on a en effet :

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Remarquons que cette solution est analogue à celle décrivant la charge d'un condensateur électrique :

$$\frac{E}{E_0} = \exp\left(-\frac{1}{RC} t\right)$$

La capacité thermique du système $C_{th} = \rho C_p V$ est initialement chargée à un potentiel thermique $T_0 - T_\infty$ en fermant l'interrupteur K de la figure ci-dessous. En ouvrant l'interrupteur l'énergie accumulé dans la capacité thermique est dissipée à travers la résistance thermique $R_{th} = \frac{1}{hS}$

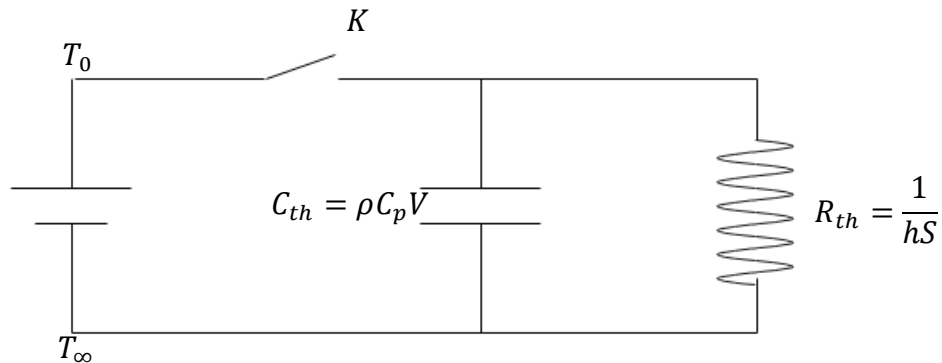


Figure 2.30: Circuit RC analogue au modèle de trempe d'une bille.

La quantité $\frac{1}{R_{th}C_{th}}$, qui a la dimension d'un temps, est constante du temps du système.

VI.1.2. Validité de l'approximation du milieu à température uniforme

Le paramètre caractéristique du problème qui permet de vérifier la validité de l'approximation du milieu à température uniforme est un nombre sans dimension, appelé **nombre de Biot** défini comme étant le rapport entre deux résistances thermiques :

$$Bi = \frac{R_{int}}{R_{ext}} = \frac{l/\lambda S}{1/hS} = \frac{hl}{\lambda}$$

De nombreuses expériences permettent d'admettre le critère distinctif suivant entre systèmes minces et systèmes épais :

- Systèmes minces : $Bi < 0.1$ (l petit et/ ou λ grand)
- Système épais : $Bi > 0.1$ (h grand)

En général, on considère que l'approximation est valide si **Bi < 0.1**.

Le nombre de Fourier est le rapport d'un terme at , de dimension L^2 , correspondant au carré de la profondeur de pénétration d'une perturbation thermique dans un corps au bout d'un temps t, au carré d'une longueur caractéristique du corps :

$$Fo = \frac{at}{L^2}$$

Le nombre de Fourier caractérise la pénétration de la chaleur en régime variable. La définition de ces deux nombres permet d'écrire l'expression de la température de la bille sous la forme :

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \exp(-Bi \cdot Fo)$$

VI.1.3. Condition d'échanges mixtes

On considère ici le cas d'un corps échangeant de la chaleur par convection sur une partie de surface et recevant (ou perdant) un flux de chaleur sur le reste de sa surface (condition d'échanges mixtes Fourier/Neumann). Soit, par exemple, un flux φ_1 sur S_1 et des conditions d'échanges convectives sur S_2 avec un coefficient d'échange h .

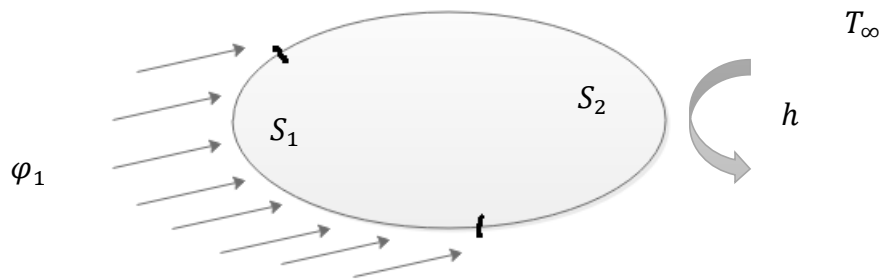


Figure 2.31 : solide soumis à des conditions d'échanges mixtes.

En admettant que le corps reste à tout instant à température uniforme, le bilan thermique s'écrit :

$$\rho C_p V \frac{dT}{dt} = \varphi_1 + h S_2 (T_{\infty} - T)$$

Ou

$$\frac{dT}{dt} + \delta(T - T_{\infty}) = \alpha$$

Avec $\alpha = \frac{\varphi_1}{\rho C_p V}$ et $\delta = \frac{S_2 h}{\rho C_p V}$

En posant $\theta = T - T_{\infty}$, l'équation devient

$$\frac{d\theta}{dt} + \delta\theta = \alpha$$

A pour solution

$$\theta = C_1 e^{-\delta t} + \frac{\alpha}{\delta}$$

La constante d'intégration C_1 est déterminée par la condition initiale

$$\theta = \theta_0 = C_1 + \frac{\alpha}{\delta}$$

D'où l'on déduit la variation de température

$$T(t) = T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty})e^{-\delta t} + \frac{\varphi_1}{S_2 h} (1 - e^{-\delta t})$$

Lorsque t tend vers ∞ , T tend vers $T_{\infty} + \frac{\varphi_1}{S_2 h}$. La température finale du solide n'est donc pas celle du fluide dans lequel il baigne.

VI.2. Conduction unidimensionnelle en régime variable

VI.2.1. Technique utilisant la transformation de Laplace

Cette technique permet de résoudre aisément les problèmes, grâce à l'emploi des tables de transformées de Laplace.

VI.2.1.1. Principes généraux

La transformée de Laplace $\bar{T}(p)$ d'une fonction $T(t)$ est définie, sous certaines conditions, par l'intégrale :

$$\bar{T}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} T(x, t) dt$$

Le nombre p est réel ou complexe. $\bar{T}(p)$ est appelée image ou transformée de Laplace de la fonction originale $T(t)$.

L'application de la transformation de Laplace à l'équation unidimensionnelle de la chaleur

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Donne :

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) dt - \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) dt = 0$$

En utilisant la propriété de différentiation sous le signe somme pour la première intégrale et en intégrant la deuxième par parties, cette équation s'écrit :

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_0^{+\infty} e^{-pt} T(x, t) dt - \frac{1}{a} \left([T(x, t) e^{-pt}]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} e^{-pt} T(x, t) dt \right) = 0$$

Utilisant la définition et les propriétés de la transformation de Laplace :

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_0^{+\infty} e^{-pt} T(x, t) dt = \frac{d^2 \bar{T}}{dx^2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} T(x, t) dt = \bar{T}(x, t)$$

$$[T(x, t) e^{-pt}]_0^{+\infty} = T_0$$

D'où l'équation transformée de Laplace s'écrit :

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} - \frac{p}{a} \bar{T} = \frac{T_0}{a}$$

Ainsi apparaît clairement l'intérêt de la transformation de Laplace, qui est de ramener une équation aux dérivées partielles à une simple équation différentielle, plus facile à résoudre.

Si l'on pose $T^* = T - T_0$

L'équation transformée se réduit à une équation différentielle sans second membre :

$$\frac{d^2 \bar{T}^*}{dx^2} - \frac{p}{a} \bar{T}^* = 0$$

La solution générale est de forme :

$$\bar{T}^*(x, p) = A \exp(-kx) + B \exp(kx) \text{ avec } k^2 = \frac{p}{a}$$

A partir de la solution transformée $\bar{T}^*(x, p)$, on parvient à la solution originale $T^*(x, t) = T(x, t) - T_0$ à l'aide de la transformation inverse. Cette transformation inverse existe dans la littérature sous forme de tableaux (voir l'annexe).

VI.2.1.2. Mur semi infini soumis à un saut de température

On appelle mur semi infini le milieu défini par le demi espace. Un exemple simple est donné par sol dont la surface plane peut-être soumise à diverses conditions.

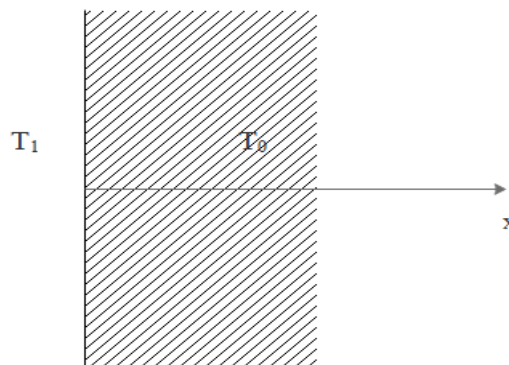


Figure 2.32 : Mur semi infini

Soit un mur semi infini, initialement à une température uniforme T_0 et dont la face est portée brusquement à une température constante T_1 . En effectuant le changement de variable indiqué précédemment $T^*(x, t) = T(x, t) - T_0$, le système donnant la répartition des températures s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T^*}{\partial t} = 0 \\ T^*(x, 0) = 0 \\ T^*(0, t) = T_1 - T_0 \end{cases}$$

En appliquant la transformation de Laplace au système précédent on obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{T}^*}{dx^2} - \frac{P}{a} \frac{d\bar{T}^*}{dt} = 0 \\ \bar{T}^*(0, p) = \frac{T_1 - T_0}{p} \end{cases}$$

La solution générale est donnée par l'équation :

$$\bar{T}^*(x, p) = A \exp(-kx) + B \exp(kx); \text{ avec } k^2 = \frac{p}{a}$$

La température $T(x, t)$ ainsi que sa transformée $\bar{T}(x, p)$ ne pouvant tendre vers l'infini, la constante B est nécessairement nulle. La condition de température en $x = 0$ impose $A = \frac{T_1 - T_0}{p}$, d'où :

$$\bar{T}^*(x, p) = (T_1 - T_0) \frac{\exp(-kx)}{p}$$

La solution originale $T^*(x, t)$ est donnée par la transformée inverse de la fonction $\bar{T}^*(x, p)$, soit en tenant compte du changement initial de variable :

$$\frac{T(x, t) - T_0}{T_1 - T_0} = \operatorname{erfc}(u); \text{ avec } u = \frac{x}{2} (at)^{-1/2}$$

La fonction $\operatorname{erfc}(u)$ est la fonction erreur complémentaire définie par $\operatorname{erfc}(u) = 1 - \operatorname{erf}(u)$, la fonction d'erreur $\operatorname{erf}(u)$ étant définie elle-même par l'intégrale :

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-\epsilon^2) d\epsilon$$

La densité du flux qui traverse la face $x=0$ est donnée par la loi de Fourier :

$$\phi_0 = -\lambda \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=0} = (T_1 - T_0) \left[\frac{\lambda \rho C_p}{\pi t} \right]^{1/2} = b \frac{T_1 - T_0}{(\pi t)^{1/2}}$$

La grandeur $b = (\lambda \rho C_p)^{1/2}$ est appelée effusivité thermique du matériau. La densité du flux pénétrant dans le milieu est proportionnelle à son effusivité b .

VI.2.1.3. Mur semi infini soumis à une densité de flux constante

En adoptant une répartition initiale uniforme des température ce problème est semblable au précédent. Il suffit de remplacer, dans le système d'équations correspondant, la condition de température par la condition du flux :

$$\phi = -\lambda \left[\frac{\partial T^*}{\partial x} \right]_{x=0}$$

En lui appliquant la transformation de Laplace cette condition s'écrit :

$$-\lambda \left[\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial x} \right]_{x=0} = \frac{\phi}{p}$$

La solution est comme précédemment de la forme $\bar{T}^*(x, p) = A \exp(-kx)$. La constante A est déterminée par la condition sur le flux. On obtient la solution suivante :

$$\bar{T}^*(x, p) = \frac{\phi \exp(-kx)}{\lambda kp}$$

D'après le tableau des fonction erreur donnant l'inverse des transformées de Laplace, on trouve finalement :

$$T(x, t) = T_0 + \frac{\phi}{\lambda} \left[2 \left(\frac{at}{\pi} \right)^{1/2} e^{-x^2/4at} - x \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2(at)^{1/2}} \right) \right]$$

VI.2.2. Technique utilisant la méthode de séparation de variable

VI.2.2.1. Principe de la méthode

Soit l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

On cherche s'il existe une solution particulière, à variables séparées, satisfaisant l'équation précédente. On prend cette solution particulière sous forme :

$$T(x, t) = X(x). Y(t)$$

Où $X(x)$ est une fonction d'une seule variable x et $Y(t)$ est une fonction d'une seule variable t .

En reportant dans l'équation de la chaleur on obtient :

$$X''(x). Y(t) - \frac{1}{a} X(x). Y'(t) = 0$$

Ou encore :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a} \frac{Y'(t)}{Y(t)}$$

Le premier membre de l'égalité dépend seulement de x ou peut être une constante. Le second membre dépend seulement de t peut être aussi une constante. L'égalité devant être vérifiée pour toutes les valeurs de x et t , ceci n'est possible que si chaque membre est égal à une constante, soit :

$$\begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} = \alpha \\ \frac{1}{a} \frac{Y'(t)}{Y(t)} = \alpha \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \frac{a.X''(x)}{X(x)} = \beta \\ \frac{Y'(t)}{Y(t)} = \beta \end{cases}$$

Le choix des constantes α et β se fait à partir des considérations physiques :

- 1) Pour les processus thermiques tendant vers une distribution de température constante à l'équilibre, on choisit α , qui doit être nécessairement négatif. En effet l'intégration relative au temps fournit $Y(t) = R. \exp(a. \alpha. t)$, où R est une constante. En posant $\alpha = -k^2$, on obtient

$$Y(t) = R. \exp(-a. k^2. t)$$

- 2) Si le phénomène est de nature périodique en fonction du temps, on prend alors β . Ce doit être un nombre imaginaire : en effet en posant $\beta = i. \omega$, on obtient la solution $Y(t) = R \exp(i\omega t) = R \cos(\omega t) + i. \sin(\omega t)$. on résout alors le problème dans le plan complexe et on ne retiendra que la partie réelle de la solution obtenue.

La solution particulière $T(x, t) = X(x). Y(t)$ contient des constantes qui peuvent être déterminées, dans chaque cas particulier, à l'aide des conditions initiales et aux limites.

VI.2.2.2. Plaque plane soumise à un saut de température

Soit une plaque métallique d'épaisseur $2L$ petite devant ses autres dimensions (ce qui rend le problème unidimensionnel).

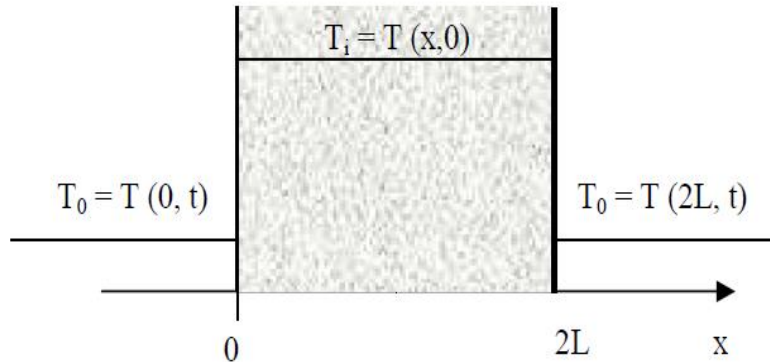


Figure 2.33 : Schéma d'une plaque avec température imposée en surface

A $t=0$, on suppose que la température de la plaque est non uniforme $T(x, t = 0) = T_0(x)$. Ensuite on fait plonger brusquement cette plaque dans un bain isotherme à température constante T_p . On admet que les deux faces de la plaque prennent instantanément la température du bain, soit $T(x = 0 \text{ ou } x = 2L, t) = T_p$

Le système traduisant le problème thermique s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \\ T(x, 0) = T_0(x) \\ T(0, t) = T(2L, t) = T_p \end{array} \right. \text{ en posant } \theta = T - T_p \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \\ \theta(x, 0) = T_0(x) - T_p \\ \theta(0, t) = \theta(2L, t) = 0 \end{array} \right.$$

Le phénomène tend, dans ce cas, vers un équilibre thermique.

La solution de l'équation en x du système s'écrit :

$$X(x) = P \cos(kx) + Q \sin(kx)$$

P et Q étant des constantes.

La solution de l'équation en t du système s'écrit :

$$Y(t) = R \cdot \exp(-a \cdot k^2 \cdot t)$$

R est une constante.

D'où la solution particulière :

$$\theta(x, t) = [A \cos(kx) + B \sin(kx)]. \exp(-k^2 at)$$

Avec : $A = P.R$ et $B = Q.R$

La solution somme infinie de ces solutions particulières s'écrit :

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(k_n x) + B_n \sin(k_n x)]. \exp(-k_n^2 at)$$

Cette série solution est très générale puisqu'elle ne satisfait actuellement qu'à l'équation de la chaleur. Imposons les conditions aux limites à chaque solution particulière :

$$\theta(0, t) = 0 \rightarrow A_n = 0$$

$$\theta(2L, t) = 0 \rightarrow \sin(k_n 2L) = 0 \text{ soit } k_n = \frac{n\pi}{2L} \text{ où } n \text{ est un entier}$$

La solution particulière prend la forme :

$$\theta(x, t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{2L} x\right). \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2 at\right)$$

Cherchons maintenant les B_n satisfaisant à la condition initiale, soit :

$$\theta_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{2L} x\right), 0 \leq x \leq 2L$$

On reconnaît dans cette expression ce qu'on appelle le développement en série de Fourier de la fonction $\theta_0(x)$. On montre que les coefficients B_n se calculent de la manière suivante :

$$B_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} \theta_0(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2L} x\right) dx \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

La température en un point de la plaque est donc :

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L} \left[\int_0^{2L} \theta_0(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2L} x\right) dx \right] \sin\left(\frac{n\pi}{2L} x\right) \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2 at\right)$$

Cette solution est valable pour une répartition initiale connue, mais quelconque, des températures. Dans le cas simple où $T_0(x) = T_0 = cste \rightarrow B_n = \frac{4(T_0 - T_p)}{n\pi}, n = 1, 2, 3 \dots$

On obtient la solution :

$$\frac{T(x,t) - T_p}{T_0 - T_p} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2L} x\right) \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2 at\right), n = 1, 2, 3 \dots$$

Chapitre III : Transfert thermique par rayonnement

I. Définitions et lois fondamentales

I.1. Le rayonnement thermique

Tous les corps à température supérieure au zéro absolu émettent en permanence de l'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique. Le rayonnement thermique est le rayonnement électromagnétique qui provoque une diminution de l'énergie interne d'un corps alors que l'énergie rayonné peut être empruntée à d'autres sources. Le rayonnement thermique est caractérisé par une gamme de longueur d'onde comprises entre $0.1 \mu\text{m}$ et $1000 \mu\text{m}$. Il comprend une partie de l'Ultra-Violet, tout le spectre visible (de $0.4 \mu\text{m}$ à $0.75 \mu\text{m}$) et infra-rouge lointain.

Dans la plupart des applications pratiques, n'interviennent que les longueurs d'onde à $100 \mu\text{m}$ parce que l'énergie transportée par les photons associés aux rayonnements de grande longueur d'onde est faible puisque E est inversement proportionnelle à λ ($E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$). Les spectres du rayonnement électromagnétique et du rayonnement thermique sont représentés sur la figure suivante.

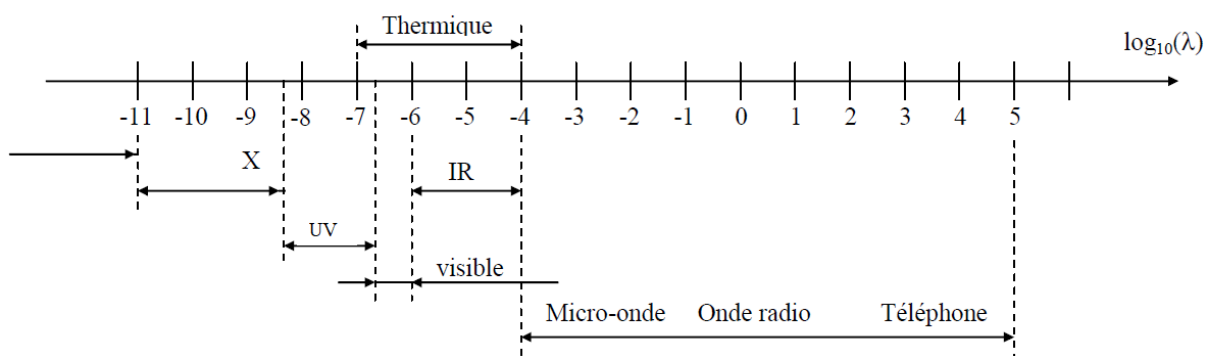


Figure 3.1 : Spectre des ondes électromagnétiques (λ en m).

Dans le vide, le rayonnement se propage à la vitesse de la lumière jusqu'à ce qu'il rencontre une surface ou une substance qui en absorbe et en réfléchit une partie (ou la totalité). L'absorption de rayonnement produit une augmentation de l'énergie interne de la substance réceptrice, ce qui se traduit par une augmentation de son émission de rayonnement.

Tous les états de la matière émettent du rayonnement thermique. Dans le cas des gaz et des fluides ou des solides partiellement transparents, l'émission est dite volumique : le rayonnement

émergeant de la surface du corps peut être représenté par une intégrale des émissions locales, réparties dans le volume. Cependant, de nombreux corps sont constitués de molécules qui, dans le domaine de fréquence ou de longueur d'onde du rayonnement thermique, absorbent le rayonnement sur une distance très courte (inférieure à sa longueur d'onde). L'émission et l'absorption de rayonnement sont alors considérées comme des phénomènes de surface, ce qui simplifie considérablement les calculs. Ces corps sont dits opaques au rayonnement thermique et les échanges radiatifs entre corps opaques sont donc échanges de surface à surface.

Le rayonnement thermique présente les mêmes propriétés que la lumière visible ou que les ondes radio : à une onde électromagnétique de longueur d'onde λ ou de fréquence ν est associé un photon, particule de masse et de charge nulles, transportant une quantité d'énergie

$$E = h\nu$$

Où $h = 6.6256 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ est la constante de Planck. La fréquence et la longueur d'onde sont reliées par la relation

$$c = \lambda\nu$$

C étant la vitesse de propagation des ondes, ou vitesse de phase, qui maximale dans le vide et égale à $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Dans un milieu d'indice de réfraction n , la vitesse de propagation est faible et égale à

$$c = c_0/n$$

La fréquence demeurant constante lors du passage du rayonnement d'un milieu d'indice n_1 à un milieu d'indice n_2 , la longueur d'onde est donc modifiée. Si λ_0 est la longueur d'onde du rayonnement dans le vide, elle devient dans milieu d'indice n

$$\lambda = \lambda_0/n$$

L'échange énergétique entre un système matériel et un champ de rayonnement s'effectue selon deux processus :

- L'émission de rayonnement qui est une conversion d'énergie matérielle (translation, rotation, vibration ou excitation électronique) en énergie radiative (production de photons) ;

- L'absorption, qui est le processus inverse, au cours duquel des photons disparaissent en cédant l'intégralité de leur énergie et de leur quantité de mouvement au milieu matériel.

Les phénomènes de réflexion et de diffusion de la lumière correspondent à un simple échange de quantité de mouvement (déviation du photon) sans échange énergétique.

I.2. Classifications des grandeurs physiques utilisées

Les grandeurs physiques utilisées seront classées selon deux critères :

- La composition spectrale du rayonnement

- Les grandeurs physiques relatives à l'ensemble du spectre du rayonnement thermique sont appelées **totales**.
- Les grandeurs physiques relatives à un intervalle spectral étroit $d\lambda$ centré autour d'une longueur d'onde λ sont appelées **monochromatique**. On les affecte d'un indice λ pour les distinguer des précédents : G_λ .

- La distribution spatiale du rayonnement

- Les grandeurs physiques sont dites **hémisphériques** lorsqu'elles concernent l'ensemble des directions de l'espace dans lesquelles un élément de surface peut rayonner ou recevoir du rayonnement.
- Les grandeurs physiques sont dites directionnelles lorsqu'elles caractérisent une direction donnée de propagation de rayonnement : G_x .

I.3. L'angle solide

L'angle solide sous lequel depuis un point O on voit une surface S est par définition l'aire de la surface intersection de la sphère de rayon unité et du cône de sommet O s'appuyant sur le contour de la surface S. Sur une sphère concentrique de rayon R, compte tenu du rapport R^2 de similitude des surfaces, l'aire découpée sera $ds = d\Omega \cdot R^2$

$$d\Omega = \frac{ds}{R^2}$$

L'angle solide élémentaire $d\Omega$ sous lequel est vu d'un point O le contour d'une petite surface ds (assimilée à une surface plane et orientée par \vec{n}) peut être évalué par la relation :

$$d\Omega = \frac{ds \cdot \cos\alpha}{R^2}$$

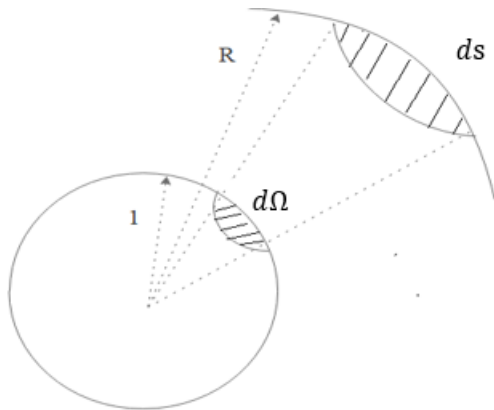


Figure 3.2 : Schéma de l'angle solide

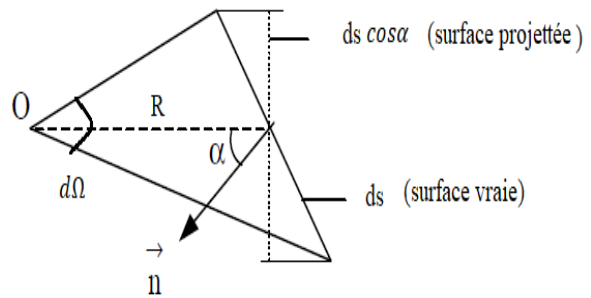


Figure 3.3 : Evaluation d'un angle solide élémentaire

Remarques :

- L'unité d'angle solide est le stéradian (noté st)
- La valeur d'un angle solide Ω est comprise entre 0 et 4π
- Pour un cône de demi-angle au sommet α : $\Omega = 2\pi (1 - \cos \alpha)$

I.4. Grandeurs associées aux sources de rayonnement

I.4.1. Luminance

Considérons un élément de surface dS_1 autour d'un point O_1 , qui échange du rayonnement avec un élément de surface dS_2 autour de O_2 (figure 3.4). Soient n_1 et n_2 les normales orientées des faces en regard de dS_1 et dS_2 , u_1 le vecteur unitaire de O_1 vers O_2 , u_2 le vecteur unitaire inverse, et θ_1 et θ_2 les angles (n_1, u_1) et (n_2, u_2) .

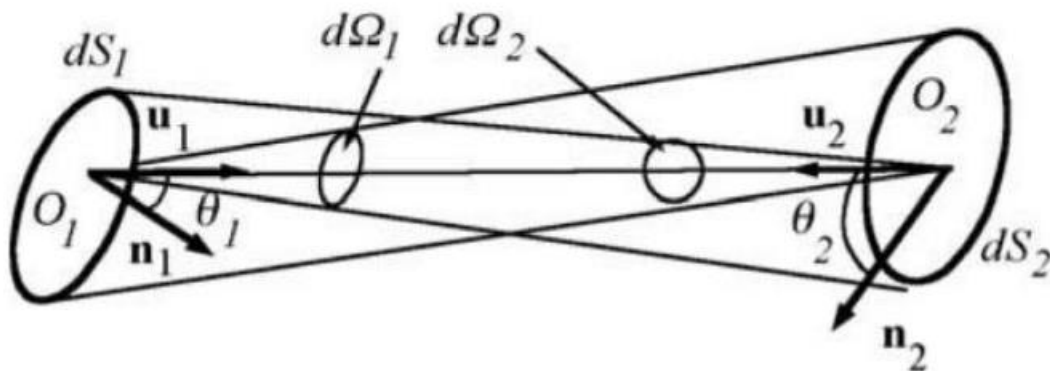


Figure 3.4 : Configuration d'échange entre surfaces élémentaires.

Le flux monochromatique directionnel échangé entre dS_1 et dS_2 est proportionnel à :

- a) la surface apparente de dS_1 dans la direction $O_1 O_2$, soit $dS_1 \cos \theta_1$,
- b) l'angle solide $d\Omega_1$ sous lequel on voit dS_2 de O_1 ,

c) la largeur de l'intervalle spectral $[\lambda, \lambda + d\lambda]$.

On obtient finalement :

$$d\varphi(\lambda, u_1) = L(\lambda, u_1) dS_1 \cos\theta_1 d\Omega_1 \cdot d\lambda$$

Cette équation est la relation phénoménologique de définition de la luminance monochromatique directionnelle $L(\lambda, u_1)$ du rayonnement considéré (loi dite de **Bouguer** ou de **Kirchoff**).

La **luminance totale**, dans la direction \vec{u}_1 , est définie par :

$$L(u_1) = \int_0^\infty L(\lambda, u_1) \cdot d\lambda$$

I.4.2. Émittance

L'émittance est le flux émit par unité de surface émettrice :

$$M(\lambda, u_1) = \frac{d\varphi(\lambda, u_1)}{dS_1}$$

En utilisant la relation de luminance, on voit que l'émittance et la luminance sont liées par la relation :

$$M(\lambda, u_1) = L(\lambda, u_1) \cdot \cos\theta_1 d\Omega_1 \cdot d\lambda$$

Pour toutes les quantités physiques liées au rayonnement, on désigne par hémisphérique l'intégrale sur tout le domaine spatial. La grandeur est dite totale si elle est intégrée sur tout le domaine spectral, c'est-à-dire toutes les longueurs d'onde.

a. Émittance hémisphérique

L'émittance hémisphérique désigne l'intégrale de l'émittance sur tout l'hémisphère entourant l'émetteur :

$$M_\lambda = \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} L(\lambda, \theta, \psi) \cos\theta \cdot \sin\theta \, d\theta \cdot d\psi$$

Rappels : la direction \vec{u}_1 (ox) est définie par les angles θ et Ψ . L'angle solide élémentaire s'écrit :

$$d\Omega_1 = \sin\theta \, d\theta \cdot d\psi$$

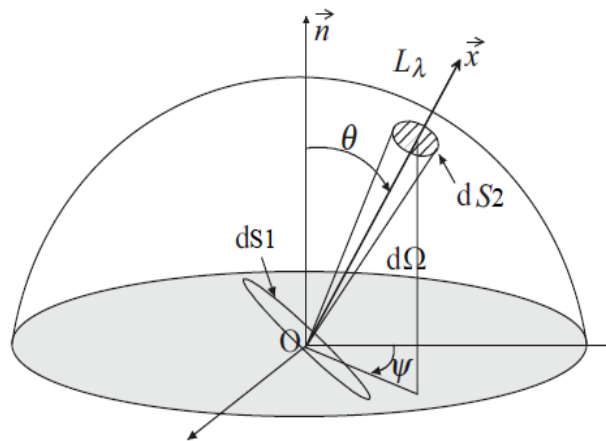


Figure 3.5 : Rayonnement hémisphérique.

b. Émittance hémisphérique totale

C'est l'intégrale sur tout le domaine de longueur d'onde de l'émittance hémisphérique :

$$M = \int_0^{\infty} M_{\lambda} \cdot d\lambda$$

Si le rayonnement est isotrope, la luminance ne dépend plus des paramètres d'angle θ et ψ .

Dans ce cas, l'émittance hémisphérique devient :

$$M_{\lambda} = L_{\lambda} \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta \cdot \sin\theta \, d\theta \cdot d\psi = \pi L_{\lambda}$$

De la même façon pour l'émittance hémisphérique totale, on obtient la relation de **Lambert** :

$$M = \pi L$$

I.4.2. Intensité

On appelle intensité monochromatique $I_{\lambda}(\vec{u}_1)$ le flux par unité d'angle solide émis par une surface dS_1 dans un angle solide $d\Omega_1$ entourant la direction \vec{u}_1 :

$$I_{\lambda}(\vec{u}_1) = \frac{d\phi(\lambda, u_1)}{d\Omega_1}$$

L'intensité monochromatique est liée à la luminance monochromatique par la relation :

$$I_{\lambda}(\vec{u}_1) = L(\lambda, u_1) dS_1 \cos\theta_1$$

L'intensité totale est égale à

$$I(\vec{u}_1) = \int_0^{\infty} I_{\lambda}(\vec{u}_1) \, d\lambda$$

I.5. Grandeurs caractéristiques des récepteurs de rayonnement

Les notions d'intensité et de luminance s'appliquent aussi bien au rayonnement incident sur une surface qu'au rayonnement émis par celle-ci. Par contre la notion d'émissance est remplacée dans le cas d'un rayonnement incident, par l'**éclairage** de la surface réceptrice.

I.5.1. Éclairage

L'éclairage est le flux reçu par unité de surface réceptrice, en provenance de l'ensemble des directions d'où elle peut recevoir du rayonnement. Si dS_2 est l'aire de la surface recevant un flux $d\varphi(\lambda, u_1)$, on a :

$$E(\lambda, u_2) = \frac{d\varphi(\lambda, u_1)}{dS_2}$$

L'éclairage totale est l'intégrale sur tout le domaine de longueur d'onde de l'éclairage monochromatique :

$$E(\vec{u}_2) = \int_0^{\infty} E(\lambda, \vec{u}_2) d\lambda$$

I.5.2. Relation entre l'éclairage du récepteur et luminance de l'émetteur

Le flux émis par une surface dS_1 (de normale \vec{n}_1) en direction d'une surface réceptrice dS_2 (de normale \vec{n}_2) voir figure 3.4, s'écrit :

$$d\varphi(\lambda, u_1) = L(\lambda, u_1) dS_1 \cos\theta_1 d\Omega_1 \cdot d\lambda$$

Comme $d\Omega_1 = \frac{dS_2 \cos\theta_2}{r^2}$, r étant la distance moyenne entre les deux surface élémentaire dS_1 et dS_2 , on aura :

$$d\varphi(\lambda, u_1) = \frac{L(\lambda, u_1) dS_1 \cos\theta_1 dS_2 \cos\theta_2 \cdot d\lambda}{r^2}$$

L'éclairage de dS_2 sera donc :

$$E(\lambda, u_2) = \frac{d\varphi(\lambda, u_1)}{dS_2} = \frac{L(\lambda, u_1) dS_1 \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot d\lambda}{r^2}$$

Ou

$$E(u_2) = L(u_1) \frac{dS_1 \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2}{r^2}$$

II. Le rayonnement du corps noir

II.1. Les corps noirs

II.1.1. Définition

Un corps noir est une surface idéale (qui n'existe donc pas dans la nature) possédant les propriétés suivantes :

- il absorbe tout éclairement indépendamment de la longueur d'onde et de la direction de cet éclairement ;
- à une température de surface équivalente, le rayonnement d'un corps noir est plus grand que celui de toute autre surface ;
- le rayonnement d'un corps noir est isotrope.

L'intérêt du corps noir réside dans le fait qu'il sert de référence pour définir les propriétés radiatives d'un corps réel. Il est important de noter qu'un corps noir n'est pas forcément de couleur noire. Un corps de couleur noire est donc noir dans le visible mais peut ne pas l'être pour d'autres longueurs d'onde.

Quelques exemples de corps noirs

Il est possible de fabriquer des surfaces dont le comportement se rapproche au plus près de celui d'un corps noir. Ainsi quelques peintures à base de particule de graphite (carbone) permettent d'absorber jusqu'à 90 % de l'éclairement. Quelques matériaux de synthèse permettent de se rapprocher des 99 % d'absorption. Néanmoins le système qui se rapproche au plus près du corps noir est celui constitué d'une cavité isolée de l'ambiance extérieure, comme représenté sur la figure 3.6. Tout rayonnement pénétrant dans la cavité par le petit orifice est réfléchi un grand nombre de fois. À chaque réflexion, une partie du flux est absorbée. Au bout d'un nombre suffisant de réflexions, le flux est complètement absorbé et la cavité se comporte donc comme un **corps noir**. De la même façon, le rayonnement émis au travers de l'orifice correspond à celui d'un corps noir dont la température est celle de la cavité.

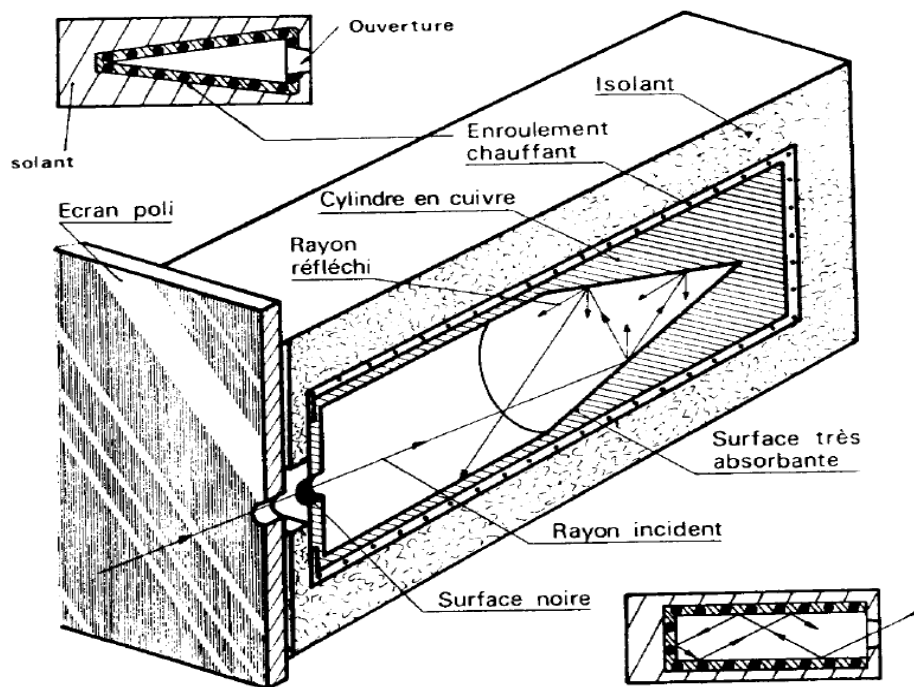


Figure 3.6: Réalisation expérimentale d'un corps noir.

Dans tout ce qui suit, les grandeurs relatives au corps noir seront affectées d'un indice supérieur « 0 ». Ainsi, par exemple, M_{λ}^0 désignera l'émittance monochromatique du corps noir à la longueur d'onde λ .

II.1.2. Loi de Planck

La loi de répartition de l'énergie rayonné par un corps noir en fonction de la longueur d'onde et de sa température absolue (Kelvin) a été établie par Planck en 1901 à partir de la théorie des quanta. Cette loi est donnée dans ce cours sans démonstration. L'émittance monochromatique d'une surface noire à température T (en Kelvin) s'exprime sous forme :

$$M_{\lambda}^0 = \frac{2\pi hc^2 \lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}$$

Avec :

c : est la vitesse des ondes électromagnétiques dans le milieu où se propage le rayonnement $c = c_0/n$, avec n indice de réfraction du milieu et $c_0 = 3.10^8 m. s^{-1}$

h : est la constante de Planck, $h = 6.6255 \cdot 10^{-34} J. s$

k : est la constante de Boltzmann, $k = 1.3805 \cdot 10^{-23} J. K^{-1}$

Lorsque le rayonnement se propage dans le vide ou dans un milieu dont l'indice de réfraction est voisin de l'unité (air ou gaz molécule symétrique tel que l'azote) la loi de Planck s'exprime sous la forme suivante, qui est celle qu'on utilise dans la pratique courante :

$$M_{\lambda}^0 = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1}$$

Où

$$C_1 = 2\pi hc_0^2 = 3.7415 \cdot 10^{-16} \text{ W.m}^2$$

$$C_2 = hc_0/k = 1.4388 \cdot 10^{-2} \text{ m.K}$$

La loi de Planck est représentée graphiquement sur la figure 3.7 en fonction de la longueur d'onde (en μm) en choisissant la température comme paramétré : les courbes obtenues sont les isothermes de la loi de Planck

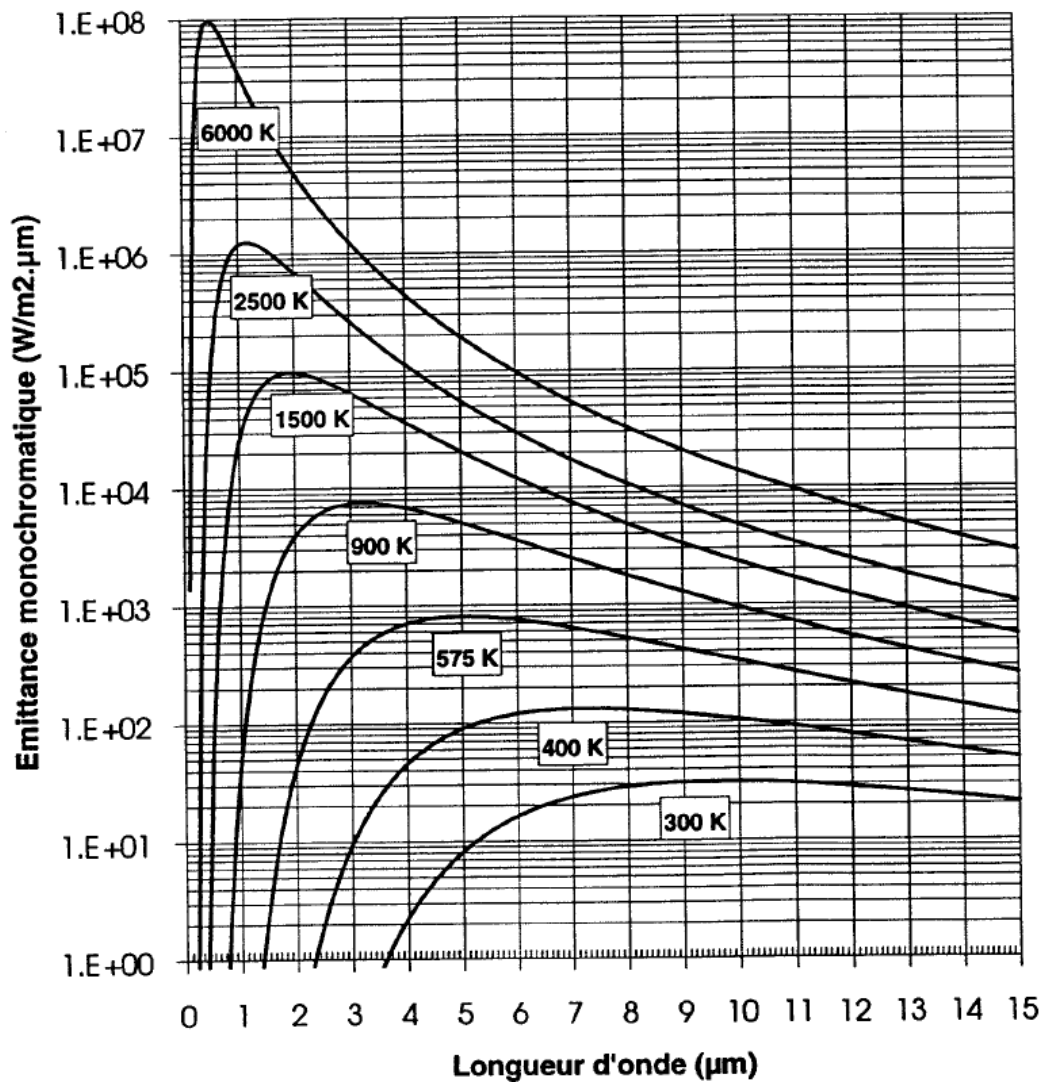


Figure 3.7 : représentée graphique de la loi de Planck.

L'observation de la figure 3.7 montre que :

- Quelle que soit la valeur de T, $M_{\lambda}^0(T)$ tend vers zéro quand λ tend vers zéro ou vers l'infini.
- Toutes les courbes présentent un maximum situé à une valeur λ_{max} de la longueur d'onde qui diminue lorsque T augmente : la croissance de $M_{\lambda}^0(T)$ pour $\lambda < \lambda_{max}$ est beaucoup plus rapide que sa décroissance pour $\lambda > \lambda_{max}$
- La valeur maximale, $M_{\lambda_{max}}^0$, croît très rapidement avec T : les isothermes ne se coupent pas

II.1.2.1. Expression approchée de la loi de Planck

L'expression de la loi de Planck admet des approximations simplificatrices :

- Si $e^{\frac{C_2}{\lambda T}} \gg 1$, on peut négliger 1 devant $e^{\frac{C_2}{\lambda T}}$ et la formule de Planck s'écrit :

$$M_{\lambda}^0 = C_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{C_2}{\lambda T}}$$

Elle appelée **formule de Wien**, cette approximation est valable à 1% près si $\lambda T < 3100 \mu m K$ ou encore $\lambda < 1.07 \lambda_{max}$ et à 1% près si $\lambda T < 2000 \mu m K$ ou encore $\lambda < 0.69 \lambda_{max}$

- Si $e^{\frac{C_2}{\lambda T}} \ll 1$, on peut développer $e^{\frac{C_2}{\lambda T}}$ en série :

$$e^{\frac{C_2}{\lambda T}} = 1 + \frac{C_2}{\lambda T} + \frac{1}{2!} \left(\frac{C_2}{\lambda T} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{C_2}{\lambda T} \right)^3 + \dots$$

Et en se limitant au premier ordre

$$M_{\lambda}^0 = \frac{C_1 T}{C_2 \lambda^4}$$

Elle appelée **formule de Rayleigh**, cette approximation est valable à 1% près si $\lambda > 10 \lambda_{max}$

II.1.2.2. Position du maximum λ_{max} : Loi de Wien

On dérive la loi de Planck et on cherche λ tel que :

$$\frac{dM_{\lambda}^0}{d\lambda} = 0$$

La dérivée s'annule lorsque

$$\lambda T = \frac{C_2}{5} \frac{1}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1}$$

Équation dont la racine unique a pour valeur approchée :

$$\lambda_{max} T = C_w = 2897.8 \mu m . K$$

On appelle cette relation la **loi de déplacement de Wien** et C_w constante de Wien parce que Wien démontra en 1893, c'est-à-dire avant que la loi de Planck soit établie. Ce résultat montre

qu'une augmentation de la température produit donc un déplacement du rayonnement vers les courtes longueurs d'onde. Reportant cette relation dans la loi de Planck, il vient :

$$M_{\lambda_{max}}^0(T) = 1.2865 T^5$$

$M_{\lambda_{max}}^0(T)$, qui ne dépend que de T (et non de λ_{max}), varie en T^5 et augmente donc très rapidement avec la température.

II.1.2.3. Émittance totale du corps noir : Lois de Stefan-Boltzmann

Cette loi fournit l'émittance totale du rayonnement du corps noir dans le vide en fonction de sa température absolue. On peut l'établir par intégration de la formule de Planck sur l'ensemble du spectre rayonné :

$$M^0(T) = \int_0^{\infty} M_{\lambda}^0(T) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1} d\lambda$$

En posant $x = \frac{C_2}{\lambda T}$, on en déduit que

$$M^0(T) = \frac{C_1 T^4}{C_2^4} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

Avec $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$ et donc

$$M^0(T) = \frac{C_1 \pi^4}{15 \cdot C_2^4} T^4 = \sigma T^4$$

Avec la constante $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ est appelée constante de Stefan-Boltzmann.

II.2. Fraction de l'émittance totale contenue dans un intervalle spectral

On recherche souvent à calculer le flux émis dans une bande spectrale bien définie et non sur la totalité du spectre. Nous cherchons donc à calculer :

$$M_{\lambda_1 - \lambda_2}^0 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{\lambda}^0(T) d\lambda$$

On peut aussi écrire

$$M_{\lambda_1 - \lambda_2}^0 = \int_0^{\lambda_2} M_{\lambda}^0(T) d\lambda - \int_0^{\lambda_1} M_{\lambda}^0(T) d\lambda$$

Nous définissons pour cela la fraction de rayonnement émis par un corps noir entre 0 et λ' : c'est le rapport de la densité de flux émis entre 0 et λ' à l'émittance totale du corps noir

$$F_{0 \rightarrow \lambda'} = \frac{\int_0^{\lambda'} M_{\lambda}^0(T) d\lambda}{\int_0^{\infty} M_{\lambda}^0(T) d\lambda}$$

$$F_{0 \rightarrow \lambda'} = \frac{\int_0^{\lambda'} M_{\lambda}^0(T) d\lambda}{\sigma T^4}$$

$$F_{0 \rightarrow \lambda T} = \frac{1}{\sigma} \int_0^{\lambda T} \frac{1}{(\lambda' T)^5} \frac{C_1}{e^{\frac{C_2}{\lambda' T}} - 1} d(\lambda' T)$$

En posant $y = \lambda' T$ on obtient

$$F_{0 \rightarrow \lambda T} = \frac{1}{\sigma} \int_0^y \frac{C_1 y^{-5}}{e^{\frac{C_2}{y}} - 1} dy$$

Cette quantité représente la fraction de flux émis dans la bande spectrale ($0 \rightarrow \lambda$) par rapport à l'émittance totale. Malheureusement, ce calcul ne conduit pas à une expression analytique et on doit recourir à des outils numériques d'intégration. La fonction $F_{0 \rightarrow \lambda T}$ est tabulée dans le tableau 3.1 ci-dessous.

$\lambda T \times 10^5$ ($\mu\text{m} \cdot \text{K}$)	$F_{0 \rightarrow \lambda}$	$\lambda T \times 10^5$ ($\mu\text{m} \cdot \text{K}$)	$F_{0 \rightarrow \lambda}$	$\lambda T \times 10^5$ ($\mu\text{m} \cdot \text{K}$)	$F_{0 \rightarrow \lambda}$	$\lambda T \times 10^5$ ($\mu\text{m} \cdot \text{K}$)	$F_{0 \rightarrow \lambda}$
0,001	0	0,0339	0,36	0,1389	0,9616	0,569	0,9988
0,0095	0,0002	0,0391	0,4634	0,16	0,9733	0,6551	0,999
0,011	0,0009	0,045	0,5637	0,1842	0,9815	0,7543	0,9992
0,0126	0,0034	0,0518	0,6551	0,2121	0,9872	0,8685	0,9993
0,0146	0,0104	0,0596	0,7342	0,2442	0,9911	1	0,9994
0,0168	0,0263	0,0687	0,7997	0,2812	0,9939		
0,0193	0,0563	0,0791	0,852	0,3237	0,9957		
0,0222	0,1051	0,091	0,8924	0,3728	0,997		
0,0256	0,1741	0,1048	0,9228	0,4292	0,9978		
0,0295	0,261	0,1207	0,9453	0,4942	0,9984		

Tableau 3.1 Quelques valeurs tabulées de la fonction $F_{0 \rightarrow \lambda T}$

Et donc

$$M_{\lambda_1 - \lambda_2}^0 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{\lambda}^0(T) d\lambda = (F_{0 \rightarrow \lambda_2 T} - F_{0 \rightarrow \lambda_1 T}) \sigma T^4$$

Exemple :

Le filament d'une ampoule électrique d'éclairage est à 2500K. quelle fraction de l'énergie émise est rayonnée dans le visible ($0.4\mu\text{m}$ à $0.8\mu\text{m}$) ? on assimilera le filament à un corps noir

Réponse : 7%.

III. Les propriétés radiatives des corps réels

III.1. Émissivité des corps réels

L'émissivité des matériaux réels est par définition plus faible que celle des corps noirs qui est maximale pour la même température de surface. L'évaluation des propriétés émissives des substances réelles se fait à partir de celles du corps noir placé dans *les mêmes conditions de température et de longueur d'onde* à l'aide de coefficients appelés facteurs d'émission ou émissivités.

Les différentes émissivités sont définies ci-dessous :

- Emissivité monochromatique directionnelle :

$$\varepsilon_{\lambda}(\vec{u}_1) = \frac{L(\lambda, u_1)}{L_{\lambda}^0}$$

- Emissivité totale directionnelle :

$$\varepsilon(\vec{u}_1) = \frac{\pi \cdot L(u_1)}{\sigma T^4}$$

- Emissivité monochromatique hémisphérique :

$$\varepsilon_{\lambda} = \frac{M_{\lambda}(T)}{M_{\lambda}^0(T)}$$

- Emissivité totale hémisphérique :

$$\varepsilon = \frac{M(T)}{M^0(T)}$$

Cas particuliers :

- Corps gris : l'émissivité est indépendante de la longueur d'onde, c'est à dire que :

$$\varepsilon_{\lambda}(\vec{u}_1) = \varepsilon(\vec{u}_1) \text{ et } \varepsilon_{\lambda} = \varepsilon$$

- Corps à émission diffuse (isotrope) : l'émissivité est indépendante de la direction, c'est-à-dire que :

$$\varepsilon_{\lambda}(\vec{u}_1) = \varepsilon_{\lambda} \text{ et } \varepsilon(\vec{u}_1) = \varepsilon$$

- Corps gris et diffusant : l'émissivité est indépendante de la longueur d'onde et de la direction, alors on a un seul paramètre ε :

$$\varepsilon_{\lambda}(\vec{u}_1) = \varepsilon(\vec{u}_1) = \varepsilon_{\lambda} = \varepsilon$$

Quelques ordres de grandeur concernant l'émissivité

L'émissivité des surfaces métalliques dans le visible est généralement faible. Elle peut être de l'ordre de 0,02 pour les surfaces polies. Il faut néanmoins se méfier car elle peut évoluer très

significativement dans le domaine de l'infrarouge. L'émissivité de ces surfaces augmente avec la température. L'émissivité des matériaux diélectriques et semiconducteurs est relativement élevée. Elle peut atteindre 0,7 pour certains semiconducteurs dans le visible. Selon le type de matériau, l'émissivité peut diminuer ou augmenter quand la température augmente.

L'émissivité d'une surface est fortement liée à ses propriétés optiques. Il n'est pas possible d'aborder ces aspects dans ce cours mais le lecteur pourra trouver des informations dans différents ouvrages spécialisés. Néanmoins, pour fixer les idées nous répertorions dans le tableau 3.2 les valeurs de l'émissivité totale dans la direction normale pour une large variété de matériaux.

Matériaux	Température (K)	Émissivité
<u>Métaux :</u>		
Acier poli	400	0.066
Fer très poli	450	0.052
Aluminium très poli	500	0.039
Argent pur et poli	500	0.02
Cuivre poli	300	0.03
Or pur et poli	500	0.018
<u>Peintures :</u>		
Peinture bleue à base de Cu ₂ O ₃	297	0.94
Peinture blanche à base ZrO ₂	297	0.95
Peinture jaune à base de PbO	297	0.90
Peinture à l'aluminium 10 % Al	311	0.52
Peinture à l'aluminium 26 % Al	311	0.30
<u>Matériaux de construction :</u>		
Brique rouge	300	0.93
Béton	300	0.93
Plâtre	300	0.93
Argile	293	0,69
Verre, 1,98 mm	555	0,90
Verre, 1,98 mm	1111	0,41

Tableau 4.2 Quelques valeurs de l'émissivité totale dans la direction normale à la surface.

III.2. Réception d'un rayonnement par un corps : réflexion, absorption et transmission

Lorsqu'un rayonnement est incident à un corps noir nous savons qu'il est complètement absorbé. S'il s'agit d'un corps réel, ce rayonnement incident sera en partie absorbé, réfléchi et transmis. Ceci conduit à définir les trois grandeurs : coefficient d'absorption α (ou absorptivité), coefficient de réflexion ρ (ou réflectivité) et coefficient de transmission τ (ou transmissivité). La figure ci-dessous schématise ce partage :

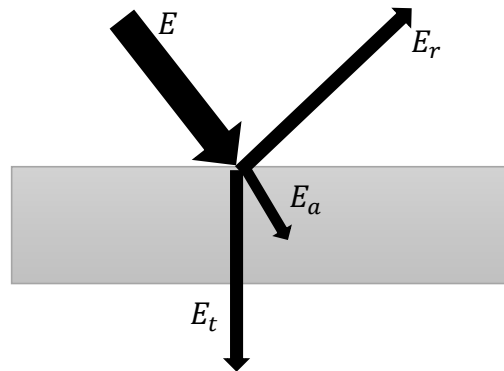


Figure 3.8 : bilan radiatif sur une surface

L'éclairement est noté $E(\lambda, \theta, \psi)$ et nous notons $E_a(\lambda, \theta, \psi)$, $E_r(\lambda, \theta, \psi)$ et $E_t(\lambda, \theta, \psi)$ les flux absorbé, réfléchi et transmis respectivement. Le bilan thermique à la surface du matériau conduit alors au fait que la somme de ces trois flux doit conduire au flux incident :

$$E(\lambda, \theta, \psi) = E_a(\lambda, \theta, \psi) + E_r(\lambda, \theta, \psi) + E_t(\lambda, \theta, \psi)$$

III.2.1. Absorptivité

L'absorptivité est le rapport entre le flux absorbé et l'éclairement :

- Absorptivité monochromatique directionnelle :

$$\alpha_\lambda(\lambda, \theta, \psi) = \frac{E_a(\lambda, \theta, \psi)}{E(\lambda, \theta, \psi)}$$

- Absorptivité monochromatique hémisphérique :

$$\alpha_\lambda = \frac{E_{a,\lambda}}{E_\lambda}$$

- Absorptivité totale hémisphérique :

$$\alpha = \frac{E_a}{E}$$

III.2.2. Réflectivité

La réflectivité est le rapport entre le flux réfléchi et l'éclairement :

- Réflectivité monochromatique directionnelle :

$$\rho_\lambda(\lambda, \theta, \psi) = \frac{E_r(\lambda, \theta, \psi)}{E(\lambda, \theta, \psi)}$$

- Réflectivité monochromatique hémisphérique :

$$\rho_{\lambda} = \frac{E_{r,\lambda}}{E_{\lambda}}$$

- Réflectivité totale hémisphérique :

$$\rho = \frac{E_r}{E}$$

III.2.3. Transmissivité

La transmissivité est le rapport entre le flux transmis et l'éclairement :

- Transmissivité monochromatique directionnelle :

$$\tau_{\lambda}(\lambda, \theta, \psi) = \frac{E_t(\lambda, \theta, \psi)}{E(\lambda, \theta, \psi)}$$

- Transmissivité monochromatique hémisphérique :

$$\tau_{\lambda} = \frac{E_{t,\lambda}}{E_{\lambda}}$$

- Transmissivité totale hémisphérique :

$$\tau = \frac{E_t}{E}$$

La relation de bilan thermique, montre que quelque soit la quantité étudiée (spectrale, hémisphérique ou totale hémisphérique, on doit toujours avoir :

$$\alpha_{\lambda}(\lambda, \theta, \psi) + \rho_{\lambda}(\lambda, \theta, \psi) + \tau_{\lambda}(\lambda, \theta, \psi) = 1$$

$$\alpha_{\lambda} + \rho_{\lambda} + \tau_{\lambda} = 1$$

$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

III.3. La loi de Kirchhoff

Cette loi relie les propriétés émissives et absorbantes d'un corps. Elle indique que, pour chaque longueur d'onde et chaque direction de propagation du rayonnement émis par une surface ou incident sur celle-ci, les émissivités et absorptivités monochromatique directionnelles sont égales :

$$\varepsilon_{\lambda}(\lambda, \theta, \psi) = \alpha_{\lambda}(\lambda, \theta, \psi)$$

On le démontre habituellement en considérant un petit corps placé dans une enceinte fermée, aux parois noires, complètement isolée de l'extérieur.

A l'équilibre thermique, tout le système est donc à température uniforme. Dans ces conditions, un élément dS du corps émet, dans un angle solide élémentaire $d\Omega_1$ entourant une direction \vec{u}_1 un flux monochromatique :

$$\varphi_e(\lambda, \theta, \Psi) = \varepsilon_{\lambda}(\lambda, \theta, \psi) \cdot L_{\lambda}^0 dS \cos \theta \cdot d\Omega_1$$

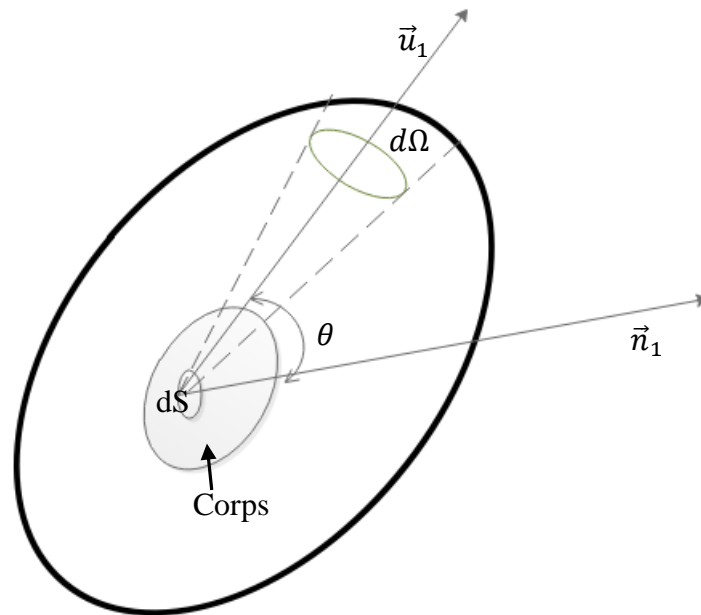


Figure 3.9 : Pour démontrer la loi de Kirchoff on imagine un petit corps disposé à l'intérieur d'une cavité qui se comporte comme un corps noir

Simultanément dS reçoit, dans le même angle solide $d\Omega_1$, et à la même longueur d'onde λ , en provenance de l'enceinte, un flux $L_\lambda^0 dS \cos \theta \cdot d\Omega_1$ dont il absorbe :

$$\varphi_a(\lambda, \theta, \Psi) = \alpha_\lambda(\lambda, \theta, \psi) \cdot L_\lambda^0 dS \cos \theta \cdot d\Omega_1$$

L'équilibre thermique du corps implique l'égalité entre les flux émis et absorbé, d'où :

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, \theta, \psi) = \alpha_\lambda(\lambda, \theta, \psi)$$

Si le flux émis par dS et le rayonnement qu'il reçoit sont parfaitement répartis sur l'ensemble des directions de l'espace hémisphérique entourant dS -émission et éclairage diffus- la loi de Kirchoff peut être étendue aux propriétés monochromatiques hémisphérique :

$$\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda$$

En ce qui concerne les grandeurs hémisphériques totales, l'émissivité est rarement égale à l'absorptivité sauf pour une surface grise et diffusant :

$$\varepsilon = \alpha$$

IV. Echanges radiatifs entre surfaces

IV.1. Echanges radiatifs entre surfaces noires

Considérons deux surfaces noires S_1 et S_2 dans une position quelconque.

Soit $d\varphi_{1 \rightarrow 2}$ le flux élémentaire :

- émis par l'élément de surface dS_1 ,

- reçu par l'élément de surface dS_2 .

Le flux total hémisphérique émis par la surface S_1 est :

$$\varphi_1^0 = M_1^0 \cdot S_1 = \sigma T_1^4 S_1$$

Le flux émis par l'élément de surface dS_1 et intercepté par l'élément de surface dS_2 a pour expression :

$$d\varphi_{1 \rightarrow 2} = L_1^0 \cos \theta_1 dS_1 \cdot d\Omega_1$$

Or $L_1^0 = \frac{\sigma \cdot T_1^4}{\pi}$ et $d\Omega_1 = \frac{\cos \theta_2 dS_2}{r^2}$

$$d\varphi_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma \cdot T_1^4 \cos \theta_2 \cos \theta_1 dS_1 dS_2}{\pi r^2}$$

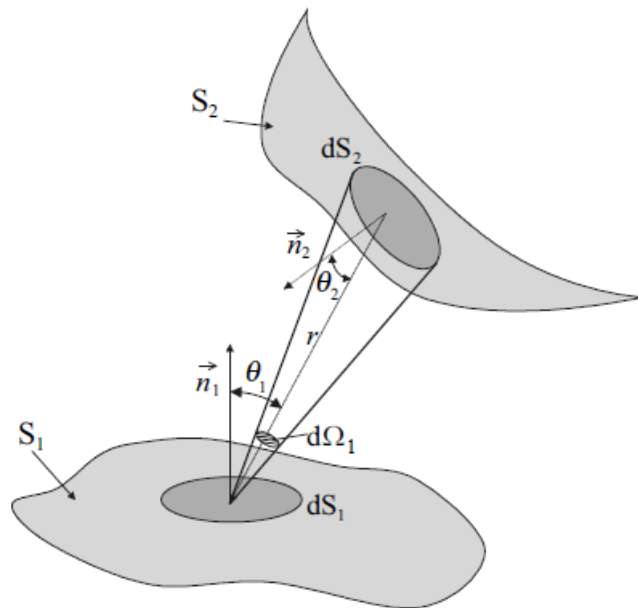


Figure 3.10 : Transfert de chaleur par rayonnement entre deux surfaces

Symétriquement, le flux total hémisphérique émis par la surface S_2 est :

$$\varphi_2^0 = M_2^0 \cdot S_2 = \sigma T_2^4 S_2$$

Le flux émis par l'élément de surface dS_2 et intercepté par l'élément de surface dS_1 a pour expression :

$$d\varphi_{2 \rightarrow 1} = L_2^0 \cos \theta_2 dS_2 \cdot d\Omega_2$$

Or $L_2^0 = \frac{\sigma \cdot T_2^4}{\pi}$ et $d\Omega_2 = \frac{\cos \theta_1 dS_1}{r^2}$

$$d\varphi_{2 \rightarrow 1} = \frac{\sigma \cdot T_2^4 \cos \theta_2 \cos \theta_1 dS_1 dS_2}{\pi r^2}$$

Par intégration sur les surfaces S_1 et S_2 les flux échangés ont pour expression :

$$\varphi_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma \cdot T_1^4}{\pi} \iint \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_1}{r^2} dS_1 dS_2$$

$$\varphi_{2 \rightarrow 1} = \frac{\sigma \cdot T_2^4}{\pi} \iint \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_1}{r^2} dS_1 dS_2$$

IV.1.1. Facteur de forme

On appelle facteur de forme de la surface S_2 vue de la surface S_1 la fraction de flux hémisphérique issue de S_1 qui atteint S_2 :

$$F_{12} = \frac{\varphi_{1 \rightarrow 2}}{\varphi_1^0} = \frac{1}{S_1} \iint \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_1}{\pi r^2} dS_1 dS_2$$

De même on aura :

$$F_{21} = \frac{\varphi_{2 \rightarrow 1}}{\varphi_2^0} = \frac{1}{S_2} \iint \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_1}{\pi r^2} dS_1 dS_2$$

On remarque F_{12} et F_{21} sont des quantités purement géométriques. Le calcul d'un facteur de forme se ramène donc dans la plupart des cas au calcul d'une intégrale double. Néanmoins dans certains cas, en utilisant les propriétés déduites de la définition du facteur de forme on peut déterminer l'expression du facteur de forme sans procéder au calcul intégral.

Propriétés des facteurs de forme :

- Quelles que soient les surfaces S_1 et S_2 (Réciprocité) :

$$F_{12} S_1 = F_{21} S_2$$

- Lorsque tout rayonnement issu de la surface S_1 atteint la surface S_2 (influence totale) :

$$F_{12} = 1$$

- On peut généraliser la propriété précédente en considérant un volume fermé constitué de n surfaces isothermes. Le flux émis par la surface (i) atteint, quelle que soit sa trajectoire, une surface (j) avec $1 \leq j \leq n$.

On a donc :

$$\sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} = 1$$

- Par décomposition de l'intégrale de surface en somme d'intégrales :

$$F_{1 \rightarrow (2+3)} = F_{12} + F_{13}$$

Exemple :

Considérons une enceinte dont la section droite est composée de trois plans isothermes de largeur finie et de longueur infinie :

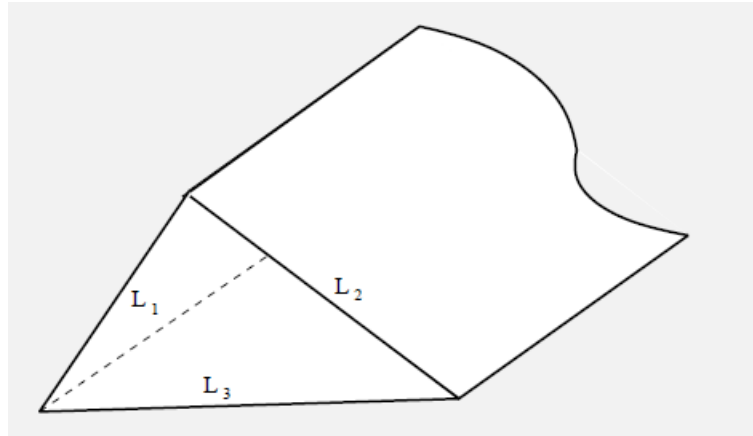


Figure 3.11 : Cavité à trois surfaces

Pour chacune des plaques la relation d'influence totale s'écrit :

$$\begin{cases} F_{12} + F_{13} = 1 \\ F_{21} + F_{23} = 1 \\ F_{31} + F_{32} = 1 \end{cases}$$

Multiplions ces trois équations par l'aire respective de chaque plaque :

$$\begin{cases} S_1 F_{12} + S_1 F_{13} = S_1 \\ S_2 F_{21} + S_2 F_{23} = S_2 \\ S_3 F_{31} + S_3 F_{32} = S_3 \end{cases}$$

En utilisant la propriété $S_i F_{ij} = S_j F_{ji}$ le système peut s'écrire :

$$\begin{cases} S_1 F_{12} + S_1 F_{13} = S_1 \\ S_1 F_{12} + S_3 F_{32} = S_2 \\ S_1 F_{13} + S_3 F_{32} = S_3 \end{cases}$$

Soit en additionnant (1) - (2) - (3) il vient :

$$F_{32} = \frac{S_2 + S_3 - S_1}{2S_3}$$

Il est possible d'obtenir une expression analytique du facteur de forme entre 2 surfaces dans des configurations géométriques particulières, voir l'annexe.

IV.1.2. Flux net échangé par rayonnement entre deux surfaces :

Reprenons la configuration de transfert radiatif entre deux corps telle que représentée sur la figure 3.11 et supposons que les deux surfaces se comportent comme des corps noirs. Dans ce cas, l'absorptivité de chaque surface est égale à 1 et il n'y a pas de flux réfléchi ou transmis.

Le flux total hémisphérique partant de S_1 et arrivant sur S_2 est :

$$\varphi_{12} = M_1^0 S_1 F_{12}$$

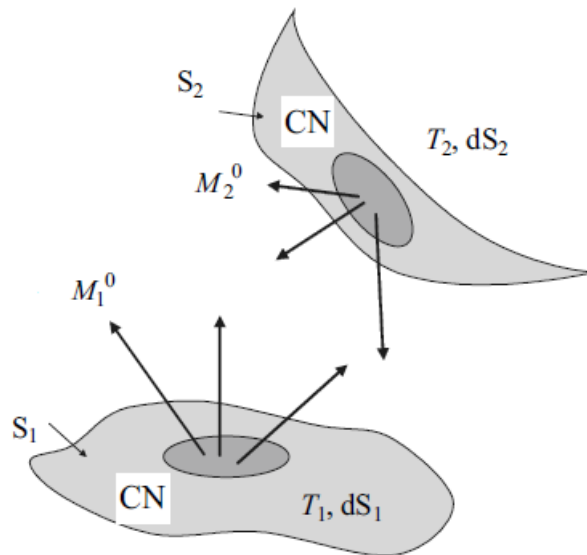


Figure 3.12 : Échange de chaleur par rayonnement entre 2 corps noirs.

De même, le flux total hémisphérique partant de S_2 et arrivant sur S_1 est :

$$\varphi_{21} = M_2^0 S_2 F_{21}$$

Le flux net échangé entre les deux corps est donc :

$$\varphi_{12}^n = \varphi_{12} - \varphi_{21}$$

En remplaçant chaque flux par son expression

$$\varphi_{12}^n = M_1^0 S_1 F_{12} - M_2^0 S_2 F_{21}$$

La relation de réciprocité, nous permet alors d'écrire cette dernière relation sous la forme :

$$\varphi_{12}^n = S_1 F_{12} (M_1^0 - M_2^0)$$

À partir de la relation de Stefan - Boltzmann pour l'émittance totale hémisphérique d'un corps noir :

$$M^0 = \sigma T^4$$

Alors le flux net échangé entre deux corps noirs 1 et 2 de surface respective S_1 et S_2 et de température respective T_1 et T_2 est :

$$\varphi_{12}^n = S_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

Si $T_1 > T_2$ le flux net échangé de S_1 vers S_2 est positif. Cela signifie que S_1 émet davantage de rayonnement vers S_2 qu'elle n'en absorbe en provenance de cette dernière.

IV.2. Echanges radiatifs entre deux surfaces opaques grises diffusantes

Dans cette partie, on cherche à résoudre le problème suivant : échanges radiatifs entre deux surfaces opaques S_1 et S_2 . Tous les calculs seront basés sur les hypothèses suivantes :

- Les deux surfaces sont grises et diffusives
- Elles sont isothermes
- Elles sont éclairées uniformément
- Elles sont opaques

Avant de commencer, il est nécessaire de définir deux grandeurs supplémentaires qui caractérisent, d'une part, le flux de rayonnement quittant une surface et, d'autre part, le bilan radiatif sur une surface.

IV.2.1. Radiosité

La **radiosité** de la surface est la somme du flux émis et du flux réfléchi par unité de surface c'est-à-dire la densité du flux qui quitte la surface. Le flux de rayonnement monochromatique quittant une surface opaque d'aire S est la somme du rayonnement qu'elle émet, $M_\lambda(T)S$, et du rayonnement qu'elle réfléchit, $\rho_\lambda E_\lambda S$.

$$\varphi_{q,\lambda} = M_\lambda(T)S + \rho_\lambda E_\lambda S$$

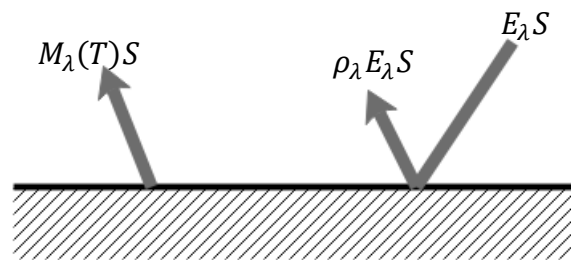


Figure 3.13 : Flux de rayonnement quittant une surface.

La radiosité monochromatique, noté J_λ , s'écrit :

$$J_\lambda = \frac{\varphi_{q,\lambda}}{S} = M_\lambda(T) + \rho_\lambda E_\lambda$$

En exprimant l'émittance en fonction de l'émissivité hémisphérique et de l'émittance du corps noir :

$$J_\lambda = \varepsilon_\lambda M_\lambda^0(T) + \rho_\lambda E_\lambda$$

La radiosité totale s'obtient par intégration sur tout le spectre :

$$J = \int_0^\infty J_\lambda \cdot d\lambda = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda M_\lambda^0(T) d\lambda + \int_0^\infty \rho_\lambda E_\lambda d\lambda$$

En introduisant les définitions de l'émissivité et de la réflectivité totales hémisphériques, ε et ρ :

$$J = \varepsilon\sigma T^4 + \rho E$$

Si la surface est grise et diffuse, $\rho = 1 - \varepsilon$ et donc

$$J = \varepsilon\sigma T^4 + (1 - \varepsilon)E$$

IV.2.2. Flux net de rayonnement perdu par une surface

Le flux réellement perdu par une surface rayonnante isotherme d'aire S est le flux émis par rayonnement :

$$\varphi_e = \varepsilon\sigma T^4 S$$

Où ε est l'émissivité hémisphérique totale de la surface.

Si cette surface reçoit un flux de rayonnement avec un éclairement totale E , le flux absorbé est :

$$\varphi_a = \alpha ES$$

Où α est l'absorptivité hémisphérique totale pour le rayonnement incident

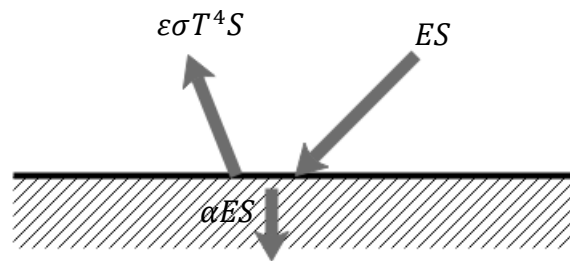


Figure 3.14 : Bilan radiatif sur une surface.

Le bilan radiatif s'écrit :

$$\varphi^n = \varphi_e - \varphi_a = (\varepsilon\sigma T^4 - \alpha E)S$$

Le flux perdu peut aussi s'exprimer en fonction de J et E , la différence entre eux représente le flux net perdu par S :

$$\varphi^n = (J - E)S$$

Pour une surface grise et diffuse, on peut écrire :

$$E = \frac{1}{1 - \varepsilon} (J - \varepsilon\sigma T^4)$$

En reportant dans l'expression de φ^n , on obtient :

$$\varphi^n = \frac{1}{1 - \varepsilon} (\sigma T^4 - J)S$$

IV.2.3. Expression du flux net échangé dans une cavité

Considérons donc une cavité formée de N surfaces diffuses, opaques et grises comme cela est représenté sur la figure 3.15. Intéressons-nous à la surface i et notons E_i l'éclairement total hémisphérique de la surface et M_i son émittance totale hémisphérique.

Rappelons que la radiosité de la surface est :

$$J_i = M_i + \rho_i E_i$$

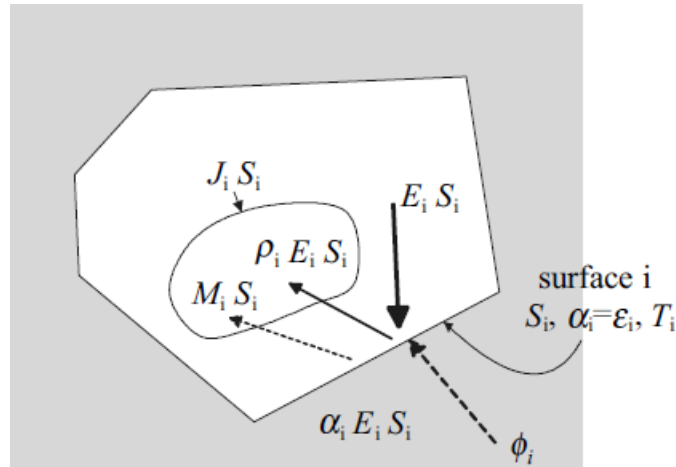


Figure 3.15 : Bilan des flux à la surface grise d'une cavité

On utilise la définition de l'émittance vis-à-vis de celle du corps noir et le fait que les surfaces sont grises :

$$M_i = \varepsilon_i M_i^0$$

D'autre part, les surfaces étant opaques, la transmissivité est nulle et on a donc une relation seulement entre l'émissivité et la réflectivité :

$$\varepsilon_i + \rho_i = 1$$

On en déduit une expression de l'éclairement sous la forme :

$$E_i = \frac{1}{1 - \varepsilon_i} (J_i - \varepsilon_i M_i^0)$$

Le flux net à la surface i est par définition la différence entre ce qui est émis et ce qui est incident

$$\varphi_i^n = S_i (J_i - E_i)$$

En remplaçant l'expression de E_i , on trouve une relation entre le flux net à la surface avec la radiosité et l'émittance du corps noir équivalent :

$$\varphi_i^n = \frac{\varepsilon_i S_i}{1 - \varepsilon_i} (M_i^0 - J_i)$$

L'éclairement est bien sûr la somme des radiosités provenant de toutes les autres surfaces (surface i éventuellement comprise). On peut donc exprimer le flux de chaleur lié à cet

éclairage comme la somme des flux associés aux radiosités des surfaces en utilisant les facteurs de forme entre la surface i et toutes les surfaces de la cavité :

$$S_i E_i = \sum_{j=1}^{j=n} F_{ji} S_j J_j$$

En utilisant la relation de réciprocité cette dernière relation s'écrit de manière équivalente :

$$S_i E_i = \sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} S_i J_j$$

En remplaçant l'expression de l'éclairage fournie par cette dernière relation dans la relation du flux net à la surface i on obtient :

$$\varphi_i^n = S_i \left(J_i - \sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} J_j \right)$$

Nous savons que dans une cavité on a une relation sur les facteurs de forme. En l'utilisant dans la dernière relation celle-ci devient équivalente à :

$$\varphi_i^n = S_i \left(\sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} J_i - \sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} J_j \right)$$

Soit encore :

$$\varphi_i^n = S_i \sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} (J_i - J_j)$$

Le flux net à la surface i d'une cavité formée de N surfaces est :

$$\varphi_i^n = \frac{M_i^0 - J_i}{\frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i S_i}} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{(J_i - J_j)}{\frac{1}{S_i F_{ij}}}$$

Annexes

I. Fonction d'erreur

La fonction d'erreur est définie par

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\epsilon^2} d\epsilon$$

$$\operatorname{erf}(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = 1$$

Dérivée première : $\frac{d(\operatorname{erf}(x))}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$

Développement en série :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1 * 3 * \dots * (2n + 1)} x^{2n+1}$$

Ce qui montre que

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$$

Fonction d'erreur complémentaire :

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\epsilon^2} d\epsilon$$

II. Transformation de Laplace

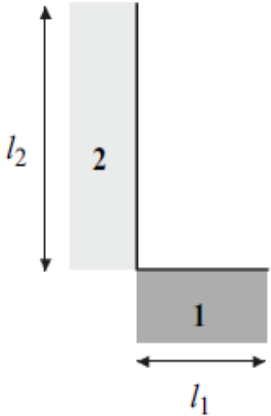
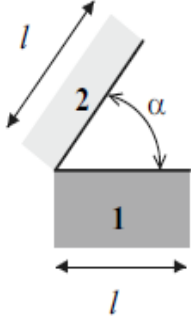
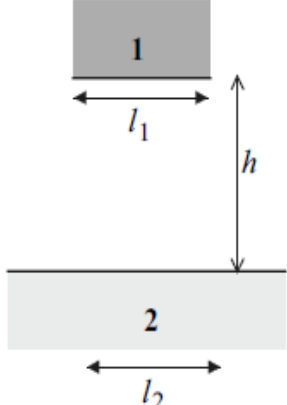
Le tableau suivant représente quelques transformation inverse existe dans la littérature :

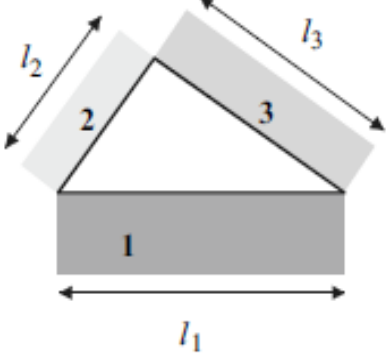
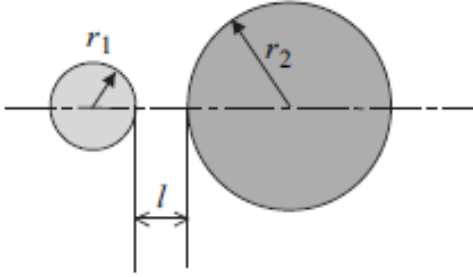
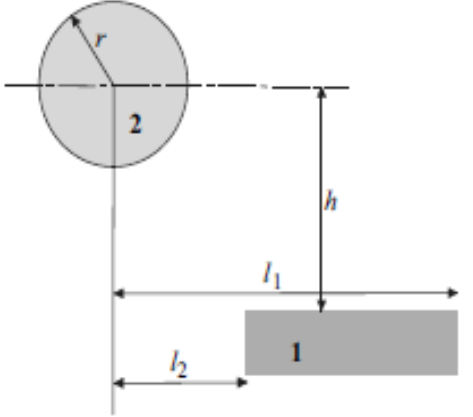
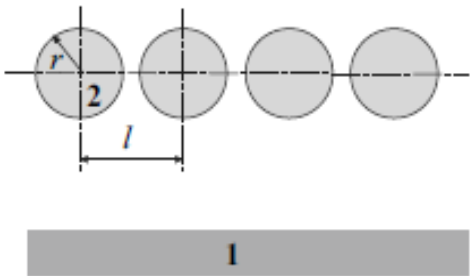
	$T(x, t)$	$\bar{T}(x, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} T(x, t) dt$
1	$mT_1(x, t) + nT_2(x, t)$	$m\bar{T}_1(x, p) + n\bar{T}_2(x, p)$
2	$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$	$p\bar{T}_1(x, p) - T(x, 0)$
3	$\frac{\partial^n T(x, t)}{\partial x^n}$	$\frac{d^n \bar{T}(x, p)}{dx^n}$
4	1	$\frac{1}{p}$
5	$\operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2(at)^{1/2}} \right]$	$\frac{e^{-kx}}{p}; k^2 = \frac{p}{a}$

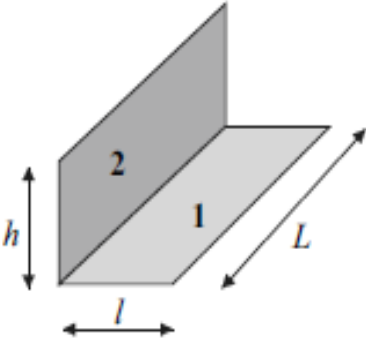
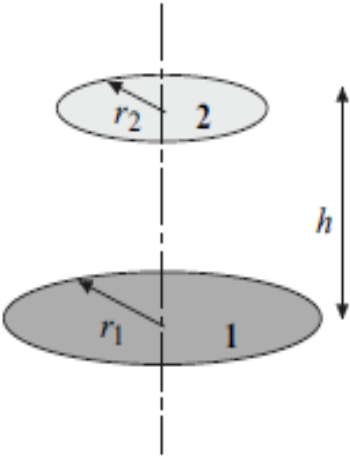
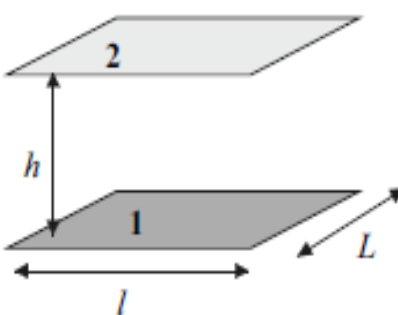
6	$2 \left(\frac{at}{\pi}\right)^{1/2} e^{-x^2/4at} - x \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2(at)^{1/2}} \right]$	$\frac{e^{-kx}}{kp}; k^2 = \frac{p}{a}$
---	---	---

III. Quelques valeurs du facteur de forme

Il est possible d'obtenir une expression analytique du facteur de forme entre 2 surfaces dans des configurations géométriques particulières que nous représentons dans le tableau suivant.

Géométrie	Facteur de forme F_{12}
	<p>2 plaques perpendiculaires jointes</p> $F_{12} = \frac{1 + \gamma - \sqrt{1 + \gamma^2}}{2}$ $\gamma = \frac{l_2}{l_1}$
	<p>2 plaques de même longueur, inclinées et jointes</p> $F_{12} = 1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
	<p>2 plaques parallèles</p> $F_{12} = \frac{\sqrt{(L_1 + L_2)^2 + 4} - \sqrt{(L_2 - L_1)^2 + 4}}{2L_1}$ $L_1 = \frac{l_1}{h}, L_2 = \frac{l_2}{h}$

Géométrie	Facteur de forme F_{12}
	<p>Cavité à 3 surfaces</p> $F_{12} = \frac{l_1 + l_2 - l_3}{2l_1}$
	<p>2 cylindres d'axes parallèles</p> $F_{12} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \pi + \sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1)^2} \\ -\sqrt{\alpha^2 - (\beta - 1)^2} \\ +(\beta - 1) \cos^{-1} \left(\frac{\beta - 1}{\alpha} \right) \\ -(\beta + 1) \cos^{-1} \left(\frac{\beta + 1}{\alpha} \right) \end{pmatrix}$ $\beta = \frac{r_2}{r_1}, \alpha = 1 + \beta + \frac{l}{r_1}$
	<p>Cylindre et plan, axe du cylindre parallèle au plan</p> $F_{12} = \frac{r}{l_1 - l_2} \left(\tan^{-1} \frac{l_1}{h} - \tan^{-1} \frac{l_2}{h} \right)$
	<p>Rangée infinie de cylindre et plan</p> $F_{12} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2r}{l} \right)^2} + \frac{2r}{l} \tan^{-1} \sqrt{\frac{l^2 - 4r^2}{4r^2}}$

Géométrie	Facteur de forme F_{12}
	<p>2 murs perpendiculaires</p> $\pi \alpha F_{12} = \alpha \tan^{-1} \frac{1}{\alpha} + \beta \tan^{-1} \frac{1}{\alpha} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ $+ \frac{1}{4} \ln \left(\frac{(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)}{1 + \alpha^2 + \beta^2} \times \left[\frac{\alpha^2(1 + \alpha^2 + \beta^2)}{(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)} \right]^{\alpha^2} \times \left[\frac{\beta^2(1 + \alpha^2 + \beta^2)}{(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)} \right]^{\beta^2} \right)$ $\alpha = \frac{l}{L}, \beta = \frac{h}{L}$
	<p>2 disques coaxiaux</p> $F_{12} = \frac{1}{2} \left(\beta - \sqrt{\beta^2 - 4 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2} \right)$ $\beta = 1 + \frac{1 + \alpha_2^2}{\alpha_1^2}$ $\alpha_1 = \frac{r_1}{h}, \alpha_2 = \frac{r_2}{h}$
	<p>2 murs parallèles</p> $\frac{\pi \alpha \beta}{2} F_{12} = \alpha \sqrt{1 + \beta^2} \tan^{-1} \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \beta^2}} + \beta \sqrt{1 + \alpha^2} \tan^{-1} \frac{\beta}{\sqrt{1 + \alpha^2}} + \ln \sqrt{\frac{(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)}{1 + \alpha^2 + \beta^2}} - \alpha \tan^{-1} \alpha - \beta \tan^{-1} \beta$ $\alpha = \frac{l}{h}, \beta = \frac{L}{h}$