Université Mohammed Premier

Faculté Pluridisciplinaire

Nador

COURS DE :

MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL

Par : Imad El Bojaddaini

Filière : SVI

Semestre : 2

Année Universitaire : 2019/2020

Sommaire :

Avant-propos

Ce cours est strictement dédié aux étudiants de SVI S2. Au contraire du cours de mécanique du point matériel destiné aux étudiants de SMPC-SMIA S1, celui-ci contient le minimum du programme que je suppose le plus intéressant pour les étudiants de SVI S2. Plusieurs notions ont été abandonnées dans ce cours, comme l'hodographe, la base de Frenet, le travail, l'énergie potentielle et mécanique, …. Pour plus d'informations sur la mécanique du point matériel, veuillez consulter les références de ce cours.

Imad El Bojaddaini

Chapitre 1 : Rappels et compléments mathématiques

1. Grandeurs scalaires et grandeurs vectorielles

Les grandeurs physiques peuvent être de nature scalaire ou vectorielle.

1.1 Grandeurs scalaires

Un scalaire est une grandeur non orientée, c'est un nombre (le plus souvent est une unité).

Exemples :
La température, la pression en un point, le potentiel électrique, la masse, …

1.2 Grandeurs vectorielles

Un vecteur est une grandeur orientée dans l'espace. Un vecteur est caractérisé par quatre caractéristiques principales :

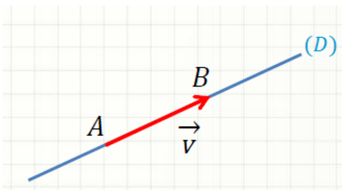


Fig. 1.1

- Son origine (point A), point d'application.
- Sa direction : celle de la droite D.
- Son sens : celui indiqué par la flèche ou orientation.
- Son module $\|\vec{V}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Exemples :
La vitesse, la force, le champ électrique … .

2. Référentiel et base orthonormée directe

2.1 Base orthonormée directe

Soit $B = \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\} = \{\vec{e}_i\}$ une base dans R^3.

- B est orthonormée si les vecteurs vérifient la relation d'orthogonalité :

$$\vec{e}_i.\vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ si \ i = j \\ 0 \ si \ i \neq j \end{cases}$$

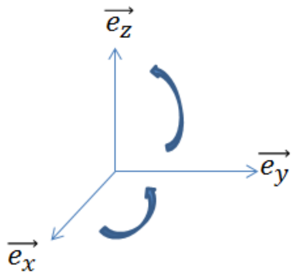


Fig. 1.2

- B est directe si les vecteurs $\vec{e}_i$ ont la même orientation que les doigts de la main droite, autrement dit, on va de $\vec{e}_x$ à $\vec{e}_y$ pour monter à $\vec{e}_z$. Dans ce cas on a les relations suivantes :

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z \quad ; \quad \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = -\vec{e}_z$$
$$\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_x \quad ; \quad \vec{e}_z \wedge \vec{e}_y = -\vec{e}_x$$
$$\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y \quad ; \quad \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z = -\vec{e}_y$$

2.2 Repère orthonormé

C'est un système d'axes géométriques muni d'une origine O et d'une base orthonormée directe.

2.3 Composantes d'un vecteur $\vec{V}$ ou coordonnées d'un point M tel que $\vec{V} = \overrightarrow{OM}$ dans la base orthonormée directe de R.

Ce sont les nombres scalaires V_x, V_y, V_z définis par :

$$\vec{V} = \overrightarrow{OM} = \sum_{i=x,y,z} V_i = V_x\vec{e}_x + V_y\vec{e}_y + V_z\vec{e}_z$$

3. Opérations sur les vecteurs

3.1 Addition

La somme de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ donne un vecteur $\vec{W}$ dont les composantes sont les sommes des composantes de $\vec{U}$ et $\vec{V}$:

$$\vec{W} = \vec{U} + \vec{V} \quad \text{alors} \quad W_i = U_i + V_i \quad \text{pour } i = x,\ y,\ z$$

3.2 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}(U_x, U_y, U_z)$ et $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$ est un nombre (scalaire) défini par :

$$\vec{U}.\vec{V} = U_xV_x + U_yV_y + U_zV_z$$

Le produit scalaire de deux vecteurs peut être aussi exprimé par:

$$\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|.\ \|\vec{V}\|.\cos\theta$$

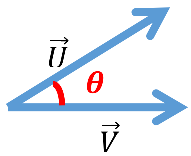


Fig. 1.3

avec $\|\vec{U}\| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}$ et $\|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

3.3 Produit vectoriel :

Le produit vectoriel de deux vecteur $\vec{U}(U_x, U_y, U_z)$ et $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$ est la grandeur vectorielle notée : $\vec{P} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ défini par :

- Son module donné par :

$$\|\vec{P}\| = \|\vec{U}\|.\ \|\vec{V}\|.\|\sin\theta\|$$

$\|\vec{P}\|$ est la valeur de la surface du parallélogramme construit à partir de $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

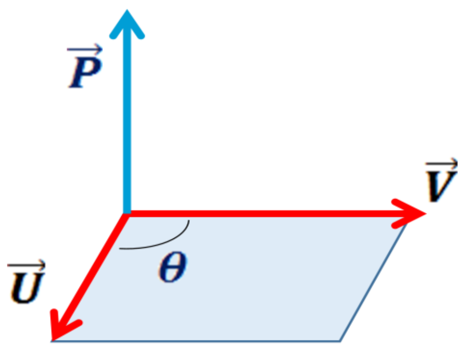


Fig. 1.4

- Sa direction est perpendiculaire au plan formé par $\vec{U}$ et $\vec{V}$.
- Son sens est tel que le trièdre $(\vec{U},\ \vec{V},\ \vec{P})$ est direct.
- Les composantes de $\vec{P} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ sont données dans la base $B = \{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$, par :

$$\begin{cases} P_x = U_y V_z - U_z V_y \\ P_y = U_z V_x - U_x V_z \\ P_z = U_x V_y - U_y V_x \end{cases}$$

3.4 Dérivée d'un vecteur :

Soit un vecteur $\vec{V}(t) = x(t)\,\vec{e_x} + y(t)\,\vec{e_y} + z(t)\,\vec{e_z}$. La dérivée du vecteur $\vec{V}(t)$ dans la base fixe $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$ s'écrit:

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy(t)}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz(t)}{dt}\vec{e}_z$$

Il est important de noter que dans ce cas les vecteurs de la base sont considérées fixes :

$$\frac{d\vec{e}_x}{dt} = \frac{d\vec{e}_y}{dt} = \frac{d\vec{e}_z}{dt} = 0$$

Chapitre 2 : Cinématique du point matériel

1. Introduction

la cinématique du point matériel est l'étude des mouvements des corps assimilés à des points matériels indépendamment des causes (forces) qui les produisent.

Un point matériel en mouvement est communément appelé : un mobile, s'il est au repos on dit qu'il est immobile.

Etudier le mouvement d'un point matériel consiste à indiquer sa position en fonction du temps. Il est donc indispensable de définir:

- Un repère d'espace
- Un repère du temps

Ces deux repères constituent ce qu'on appelle un référentiel R.

En mécanique classique, le repère du temps est le même pour tous les référentiels. Le temps s'écoule de la même manière dans tous les référentiels ''temps absolu'', c'est pour ça qu'on confond souvent les mots ''Référentiel'' et ''Repère d'espace''.

Conséquence :

Pour étudier le mouvement d'un mobile, il faut définir un référentiel : ''Système d'axe de coordonnées'' muni d'une ''horloge''.

2. Systèmes des coordonnées

2.1 Système de coordonnées cartésiennes

Soit R(O, xyz)=R (O, $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) un repère orthonormé direct. Soit M un mobile en mouvement /R.

À chaque instant t, on associé à M le vecteur $\overrightarrow{OM}$, appelé ''vecteur position'' du point M.

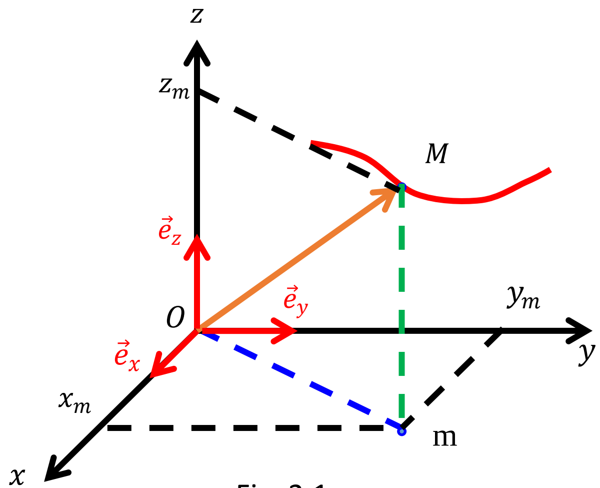


Fig. 2.1

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{Om}(t) + \overrightarrow{mM}(t)$$
$$= x_m(t)\vec{e}_x + y_m(t)\vec{e}_y + z_M(t)\vec{e}_z$$

On écrit aussi :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \left| \begin{array}{l} x_m(t) \\ y_m(t) \\ z_m(t) \end{array} \right._{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z}$$

Où $x_m(t)$, $y_m(t)$ et $z_M(t)$ sont appelés les coordonnées cartésiennes du point M. ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$) est la base cartésiennes fixe (indépendantede t).

Remarque :

- Le lieu géométrique des différents positions du point M définit la trajectoire $(\mathscr{C})$ du point M.
- L'équation de la trajectoire est obtenue à partir des équations paramétriques (horaire), $(x_m(t) = x,\ y_m(t) = y,\ z_M(t) = z)$ en éliminant le temps entre ces équations, on obtient l'équation de la trajectoire (mouvement) sous forme $f(x, y, z) = 0$.

2.2 Système de coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques $(\rho,\ \varphi,\ z)$ (voir Fig. 2.2) du point M sont par définition :

- La distance ρ :

$$\rho(t) = \|\overrightarrow{Om}\| = \|\overrightarrow{IM}\|$$

- L'angle polaire φ :

$$\varphi(t) = angle(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om})$$

- La côte z :

$$z(t) = \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{mM}$$

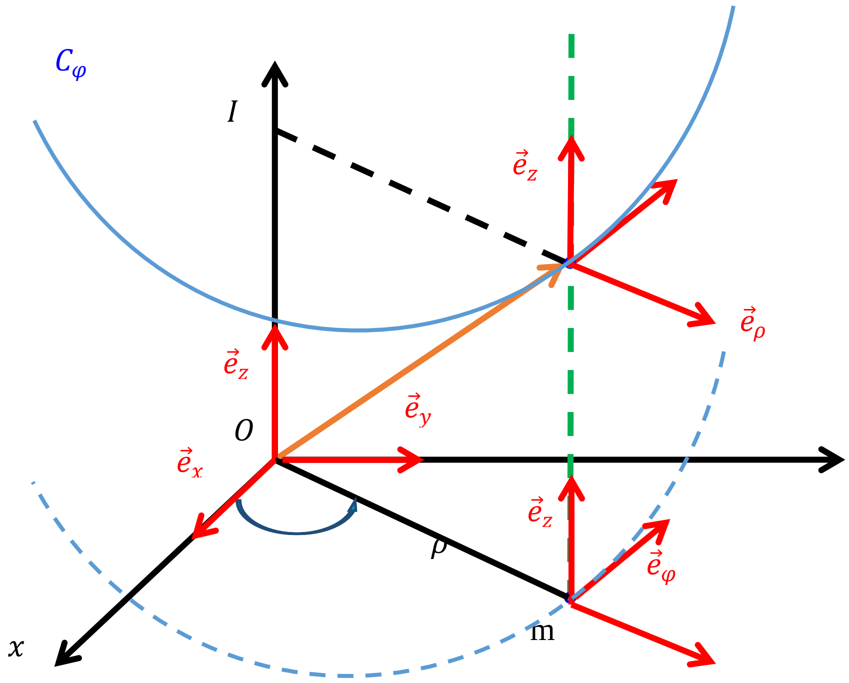


Fig. 2.2

avec : $\rho \geq 0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; -\infty \leq z \leq +\infty$.
$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ forme une base orthonormée directe. Cette base est reliée à la base des coordonnées cartésiennes par les relations :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = cos\varphi\vec{e}_x + sin\varphi\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -sin\varphi\vec{e}_x + cos\varphi\vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

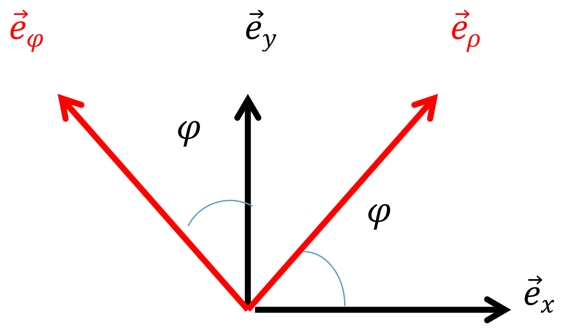


Fig. 2.3

On peut passer des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes en utilisant les relations suivantes :

$$\begin{cases} x = \rho\, cos\varphi \\ y = \rho\, sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

ou inversement :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = arctan\frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

Dans la base des coordonnées cylindriques le vecteur position du point M s'écrit:

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \overrightarrow{\boldsymbol{Om}} + \overrightarrow{\boldsymbol{mM}} = \boldsymbol{\rho\vec{e}_\rho} + \boldsymbol{z\vec{e}_z}}$$

Cas particulier : Coordonnées polaires

Lorsque la côte ($z = 0$), m et M sont confondus et le couple ($\rho,\ \varphi$) forme les coordonnées polaires planes du point M.

Le vecteur position dans ce cas devient :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho}$$

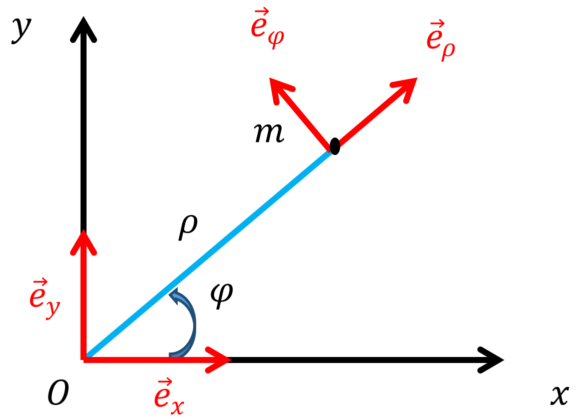


Fig. 2.4

2.3 Système de coordonnées sphériques

Le système de coordonnées sphériques est très pratique à utiliser dans tout problème à symétrie sphérique.

La position du point M est repéré par :

- La distance $r = \|\overrightarrow{OM}\|$
- L'angle θ = angle($\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM}$)
- L'angle φ = angle ($\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{Om}$)

m est la projection de M sur le plan OXY
On a :
$0 \le r \le \infty;\ 0 \le \theta \le \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi$

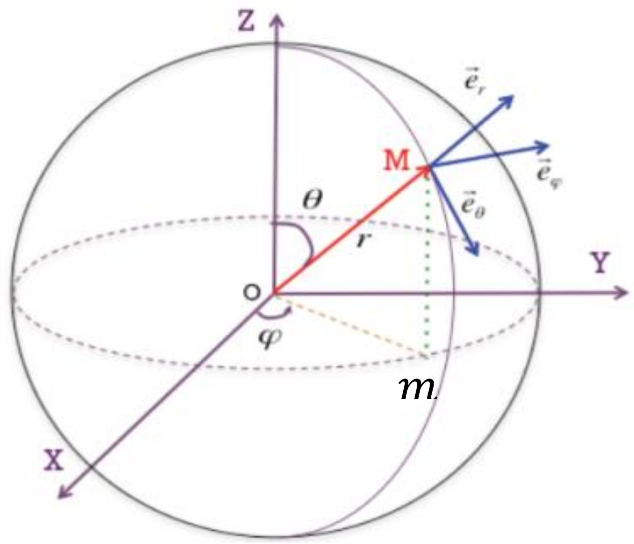


Fig. 2.5

On peut passer des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes en utilisant les relations suivantes :

$$\begin{cases} x = r\,sin\theta\,cos\varphi \\ y = r\,sin\theta\,sin\varphi \\ z = r\,cos\theta \end{cases}$$

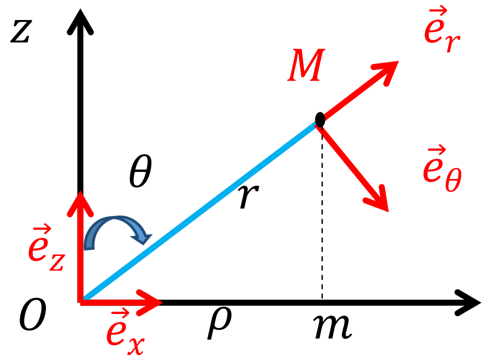


Fig. 2.6

Ou inversement :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \varphi = arctan\,\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

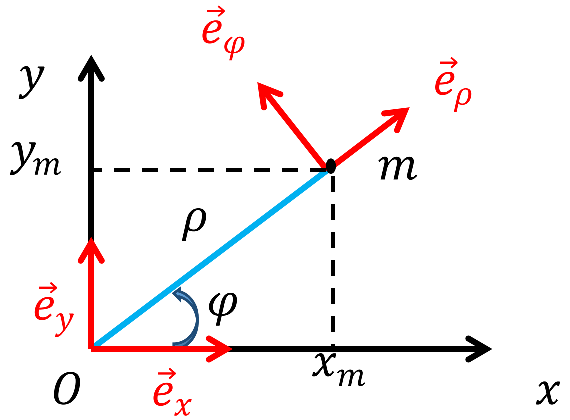


Fig. 2.7

La base orthonormée associées aux coordonnées sphériques est notée par $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$:

$\vec{e}_r$: est le vecteur unitaire dans la direction et le sens de $\overrightarrow{OM}$.

$\vec{e}_\theta$: est le vecteur unitaire tangent en point M du demi cercle de centre O et de rayon $\|\overrightarrow{OM}\|$.

$\vec{e}_\varphi$: est défini de tel sorte à ce que le trièdre $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ soit directe.

Cette base est reliée à la base cartésienne par les relations :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \end{cases}$$

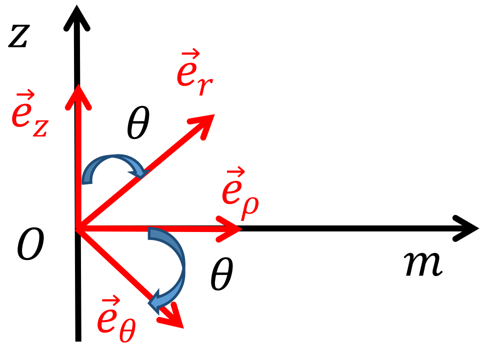


Fig. 2.8

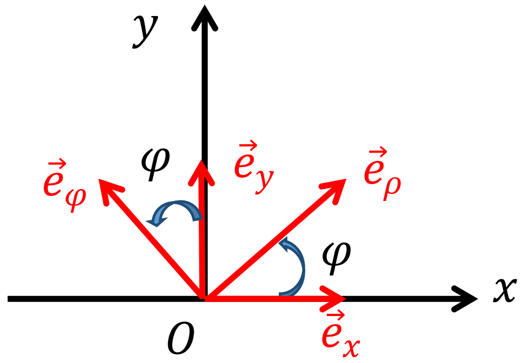


Fig. 2.9

Dans la base des coordonnées sphériques le vecteur position du point M s'écrit:

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{r}\,\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}}$$

3. Cinématique sans changement de référentiel

3.1 Vitesse

Le vecteur vitesse instantanée de *M* par rapport au référentiel *R* à un instant *t* est défini par :

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$$

$\vec{V}$ est toujours tangent à la trajectoire au point M.

3.2 Accélération

Une autre caractéristique du mouvement d'un point matériel est le vecteur accélération. On utilise une notation similaire à celle de la vitesse, $\vec{\gamma}(M/R)$, pour signifier qu'il s'agit de l'accélération du point M par rapport au référentiel R.
Le vecteur accélération est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse, ou de façon équivalente la dérivée seconde du vecteur position par rapport au temps :

$$\vec{\gamma}\left({}^{M}/_{R}\right) = \frac{d}{dt}\vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right) = \frac{d^2}{dt^2}\left({}^{\overrightarrow{OM}}/_{R}\right)$$

3.3 Expressions de la vitesse et l'accélération dans différents systèmes des coordonnées

Soit $R(O, XYZ)$ un référentiel muni d'une base orthonormée directe ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$). On peut calculer la vitesse et l'accélération de M dans différents systèmes de coordonnées.

3.3.1 Coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes on a :
$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$ avec ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$) une base fixe.

$$\vec{V}({}^{M}/_{R}) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R = \frac{d}{dt}\left(x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z\right)/R$$

$$\vec{V}({}^{M}/_{R}) = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$$

On note : $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ $$\boldsymbol{\vec{V}({}^{M}/_{R}) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z}$$

$$\vec{\gamma}({}^{M}/_{R}) = \frac{d}{dt}\vec{V}({}^{M}/_{R}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z\right)/R$$
$$= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z$$

On note : $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ $$\boldsymbol{\vec{\gamma}({}^{M}/_{R}) = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z}$$

3.3.2 Coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z$.
Pour obtenir la vitesse, on dérive le vecteur position par rapport au temps :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\,\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z + z\,\frac{d\vec{e}_z}{dt}$$

Le vecteur $\vec{e}_z$ est fixe, alors sa dérivée est nulle. Le vecteur $\vec{e}_\rho$ étant mobile et il dépend de façon implicite de t vue sa dépendance de l'angle φ :

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

D'après Fig. 2.3, $\vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$, on écrit :

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath} = \vec{e}_\varphi$$

La dérivée par rapport au temps s'écrit alors :

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Le vecteur vitesse est alors :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$$

ou encore :

$$\boldsymbol{\vec{V}(M/R) = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{e}_z}$$

Pour obtenir l'accélération, on dérive le vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}$$
$$= \frac{d\dot{\rho}}{dt}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\,\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\frac{d\dot{\varphi}}{dt}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{e}_z + \dot{z}\frac{d\vec{e}_z}{dt}$$

On a :

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad et \quad \frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0}$$

Comme dans le cas de $\vec{e}_\rho$, le vecteur $\vec{e}_\varphi$ n'est pas fixe. Pour calculer la dérivée de $\vec{e}_\varphi$ on utilise sa dépendance de l'angle φ (voir Fig. 2.3) :

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{d\varphi}(-\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath})\frac{d\varphi}{dt}$$
$$= (-\cos\varphi\,\vec{\imath} - \sin\varphi\,\vec{\jmath})\frac{d\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho$$

Le vecteur accélération s'écrit alors :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho + \ddot{z}\vec{e}_z$$

$$\boldsymbol{\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z}$$

3.3.3 Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques on a : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$. Le vecteur vitesse est donc :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

Le vecteur unitaire $\vec{e}_r$ dépend implicitement du temps à travers sa dépendance des deux angles sphériques φ et θ (voir Fig. 2.8 et Fig. 2.9) :

$$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}$$
$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$
$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\left(\cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k}\right) + \dot{\varphi}(-\sin\theta\sin\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\jmath})$$

D'autre part, on a (Fig. 2.8 et Fig. 2.9) : $\vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k}$
et : $\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$
On obtient :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

La vitesse s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\vec{V}(M/R) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi}$$

On peut obtenir le vecteur accélération par dérivation de la vitesse :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$$

On a :

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$
$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \dot{\theta}\left(-\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} - \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \cos\theta\,\vec{k}\right) + \dot{\varphi}(-\cos\theta\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\jmath})$$
$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi$$

Et on a de plus :

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

Or, $\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$, alors :

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \dot{\varphi}(-\cos\varphi\,\vec{\imath} - \sin\varphi\,\vec{\jmath}) = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho$$

Le vecteur $\vec{e}_\rho$ de la base cylindrique peut être exprimé dans la base sphérique comme suit :

$$\vec{e}_\rho = \sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta$$

Alors :

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta)$$

L'accélération devient :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\left(\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\right) + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi)$$
$$+ \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi$$
$$+ r\dot{\varphi}\sin\theta\left(-\dot{\varphi}(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta)\right)$$

Finalement :

$$\boldsymbol{\vec{\gamma}(M/R) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{e}_\theta}$$
$$\boldsymbol{+ \left(2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi}$$

4. Cinématique avec changement de référentiel

Dans cette partie, le mouvement du point M est étudié par rapport à deux référentiels au moins. Dans ce qui suit, on considère un référentiel $R(O, XYZ)$ dit absolu (fixe) muni d'une base orthonormée et directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et un référentiel $R'(O', X'Y'Z')$ dit relatif (en mouvement par rapport à R) muni d'une base orthonormée et directe $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$.

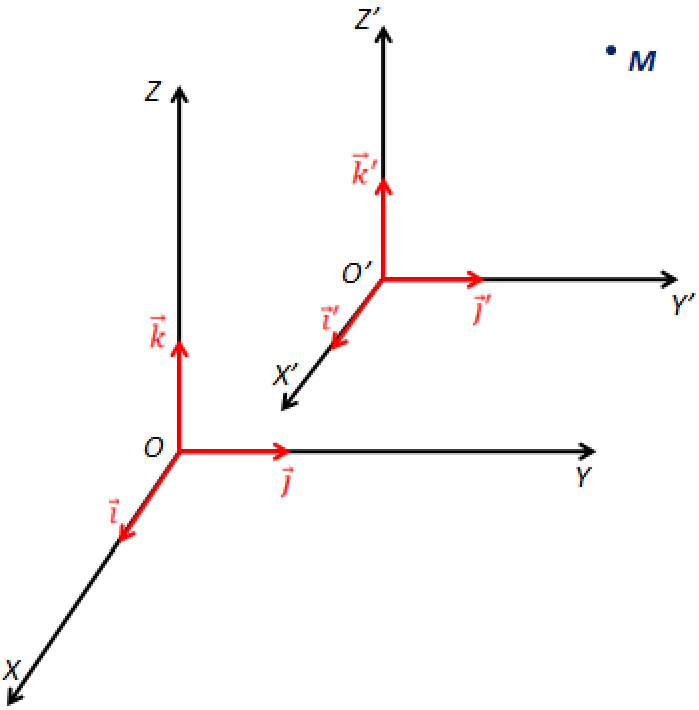


Fig. 2.10

4.1 Mouvement absolu

Le mouvement du point matériel M par rapport au référentiel R est appelé ***mouvement absolu***. Ainsi, on peut déterminer la vitesse absolue $\vec{V}_a$ et l'accélération absolue $\vec{\gamma}_a$ de M par dérivation première et seconde respectivement du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
Il est très important de signaler que les dérivées sont reliées au référentiel considéré (R dans ce cas).

La vitesse absolue peut être déterminée par la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps dans le référentiel absolu R.

Soit $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$.

$$\vec{V}_a = \vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$$

Les vecteur unitaires $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont fixes dans R, leurs dérivées temporelles sont donc nulles. Alors il suffit de dériver les composantes cartésiennes x, y et z :

$$\vec{V}(M/R) = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k}$$

En dérivant la vitesse absolue par rapport au temps dans le référentiel absolu, on obtient l'accélération absolue :

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{x}\,\vec{\imath} + \ddot{y}\,\vec{\jmath} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

4.2 Mouvement relatif

Le mouvement du point matériel M par rapport au référentiel R' est appelé ***mouvement relatif***.

La vitesse relative $\vec{V}_r$ peut être déterminée par la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{O'M}$ par rapport au temps dans le référentiel absolu R'.

Soit $\overrightarrow{O'M} = x'\,\vec{\imath}' + y'\,\vec{\jmath}' + z'\,\vec{k}'$.

$$\vec{V}_r = \vec{V}(M/R') = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R'}$$

Les vecteurs unitaires $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$ sont fixes dans R'. Leurs dérivées temporelles dans ce référentiel sont nulles.

$$\vec{V}(M/R') = \dot{x}'\,\vec{\imath}' + \dot{y}'\,\vec{\jmath}' + \dot{z}'\,\vec{k}'$$

L'accélération relative $\vec{\gamma}_r$ est déterminée par dérivation de la vitesse relative par rapport au temps dans le référentiel relatif.

$$\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(M/R^{'}) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R')}{dt}\right|_{R'}$$

$$\vec{\gamma}(M/R^{'}) = \ddot{x}'\,\vec{\imath}' + \ddot{y}'\,\vec{\jmath}' + \ddot{z}'\,\vec{k}'$$

4.3 Mouvement d'entrainement

Le mouvement du référentiel relatif R' par rapport au référentiel absolu R est appelé ***mouvement d'entrainement***.

La vitesse d'entrainement $\vec{V}_e$ et l'accélération d'entrainement $\vec{\gamma}_e$ sont définies par :

$$\vec{V}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega}(R^{'}/R) \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{\gamma}_e = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R + \left.\frac{d\vec{\Omega}(R^{'}/R)}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}(R^{'}/R) \wedge \left(\vec{\Omega}(R^{'}/R) \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

Le vecteur $\vec{\Omega}(R^{'}/R)$ est le vecteur vitesse angulaire de R' par rapport à R.

Il existe de plus, une accélération appelée accélération de Coriolis liée aux référentiels non Galiléens défini comme suit :

$$\vec{\gamma}_c = 2\,\vec{\Omega}(R^{'}/R) \wedge \vec{V}_r$$

4.3.1 Cas de rotation de $R^{'}$ par rapport à R

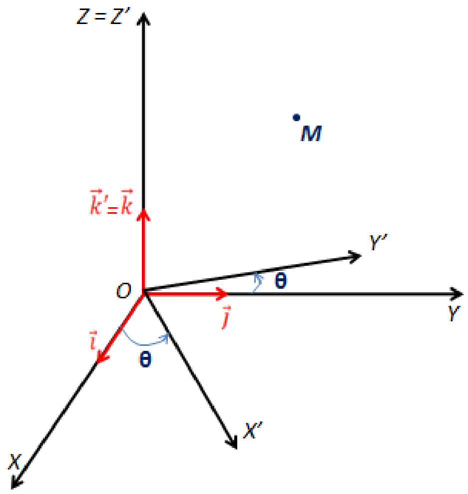


Fig. 2.11

Le vecteur vitesse angulaire de $R^{'}$ par rapport à R est défini par :

$$\vec{\Omega}(R^{'}/R) = \dot{\theta}\,\vec{k} = \omega\,\vec{k}$$

tel que $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire (de rotation) et θ l'angle de rotation.

Les dérivées temporelles de la base relative dans le référentiel absolu sont définies par :

$$\left.\frac{d\vec{\imath}'}{dt}\right|_R = \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{\imath}', \quad \left.\frac{d\vec{\jmath}'}{dt}\right|_R = \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{\jmath}', \quad \left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_R = \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{k}'$$

En général, pour n'importe quel vecteur $\vec{A}$ on a la relation suivante :

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R'} + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{A}$$

4.3.2 *Cas de translation de R' par rapport à R*

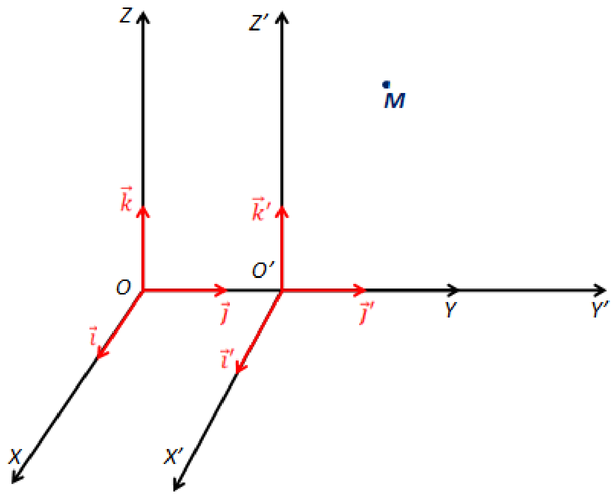


Fig. 2.12

Le vecteur vitesse angulaire est évidemment nul dans ce cas : $\vec{\Omega}(R'/R) = \vec{0}$.

Les dérivées temporelles de la base relative dans le référentiel absolu sont également nulles :

$$\left.\frac{d\vec{\imath}'}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{\jmath}'}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_R = \vec{0}$$

4.4 Lois de composition

Il existe une relation entre les différentes vitesses et entre les différentes accélérations.

On appelle lois de composition des vitesses la relation suivante :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

On appelle lois de composition des accélérations la relation suivante :

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$$

Chapitre 3 : Dynamique du point matériel

1. Introduction

La dynamique est l'étude des relations entre les mouvements et les causes (forces) qui les produisent.

1.1 Principe d'inertie (première loi de Newton) :

Lorsqu'un point matériel en mouvement n'est soumis à aucune force, son mouvement est rectiligne uniforme. C'est la première loi de Newton (le principe d'inertie).
Tout référentiel où le principe d'inertie est applicable est un ***référentiel Galiléen***.

Remarque :

- Tout référentiel absolu (fixe) est un référentiel ***Galiléen***.
- Tout référentiel relatif en ***translation rectiligne uniforme*** par rapport au référentiel absolu est ***Galiléen***. L'accélération d'entrainement est nulle dans ce cas.
- Tout référentiel relatif en ***translation rectiligne non uniforme ou en rotation*** par rapport au référentiel absolu est **non Galiléen**. Dans ce cas, l'accélération d'entrainement n'est pas nulle.

1.2 Principe d'action et de réaction (3ème loi de Newton) :

Si un objet (1) exerce une force $\vec{F}_{1\to2}$ sur un objet (2), ce dernier exerce en retour une force $\vec{F}_{2\to1}$, d'intensité égale mais de sens opposé :

$$\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$$

Il est important de noter que cette loi, aussi appelée principe des actions réciproques, est indépendante du référentiel d'étude.

Exemple :

Loi de Coulomb : une particule (1) de charge électrique q_1 exerce sur une particule (2) de charge électrique q_2 une force électrique $\vec{F}_{1\to2}$ égale à la force $\vec{F}_{2\to1}$ exercée par la particule (2) sur la particule (1) mais de sens opposée à celle-ci :

$$\vec{F}_{1\to2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u} = -\vec{F}_{2\to1}$$

2. Principe fondamental de la dynamique (2ème loi de Newton)

2.1 Dans un référentiel Galiléen :

Dans un référentiel Galiléen R, la somme vectorielle des forces extérieures qui s'exercent sur un point matériel est égale au produit du vecteur accélération et de la masse du point matériel :

$$\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R})$$

Les forces extérieures qui peuvent s'exercer sur le point M :

- Le poids :

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

$\vec{g}$ étant l'accélération de la pesanteur.

- La réaction (mouvement de M sur une tige par exemple) :

$$\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$$

$\vec{R}_N$ est la composante normale au mouvement et $\vec{R}_T$ est la composante tangentielle au mouvement.

Remarque : Lorsque le mouvement de M est sans frottement la composante $\vec{R}_T$ est nulle.

- La tension $\vec{T}$ d'un fil (M suspendu sur un fil) :

- .....

2.2 Dans un référentiel non Galiléen :

En plus des forces extérieures, dans un référentiel non Galiléen R', deux autres forces d'inertie appelées force d'entrainement et force de Coriolis, sont considéré dans la loi fondamentale de la dynamique :

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{e}} + \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{c}} + \sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R}')$$

Il faut noter que l'accélération dans ce cas est l'accélération de M dans R' (accélération relative) puisqu'on applique la loi fondamentale de la dynamique dans un référentiel non Galiléen (relatif).

Les forces d'inertie d'entrainement et de Coriolis sont définies par :

$$\vec{F_e} = -m\vec{\gamma}_e$$
$$\vec{F_c} = -m\vec{\gamma}_c$$

$\vec{\gamma}_e$ et $\vec{\gamma}_c$ sont respectivement l'accélération d'entrainement et l'accélération de Coriolis.

3. Théorème de l'énergie cinétique

3.1 Enoncé :

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique du point M égale à la somme des puissances de toutes les forces appliquées sur M dans un référentiel R :

$$\frac{\boldsymbol{dE_c}}{\boldsymbol{dt}} = \sum \boldsymbol{\mathcal{P}}(\vec{\boldsymbol{F}})$$

E_c étant l'énergie cinétique de M et $\mathcal{P}(\vec{F})$ est la puissance de la force $\vec{F}$.

3.2 Energie cinétique :

L'énergie cinétique est l'énergie que requiert le point M lors de son mouvement. Elle est définie par :

$$E_c = \frac{1}{2}mV^2$$

V étant le module de la vitesse de M dans le référentiel R.

3.3 Puissance d'une force :

La puissance $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ d'une force $\vec{F}$ quelconque est le produit scalaire de cette force et la vitesse de M dans le référentiel R :

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{V}(M/R)$$

4. Théorème du moment cinétique

4.1 Enoncé :

La dérivée temporelle du moment cinétique de M en un point O dans le référentiel R égale à la somme des moments de toutes les forces appliquées sur M dans ce référentiel :

$$\frac{\boldsymbol{d\vec{L}_O(M/R)}}{\boldsymbol{dt}} = \sum \overrightarrow{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_{\boldsymbol{O}}(\vec{\boldsymbol{F}})$$

$\vec{L}_O(M/R)$ étant le moment cinétique de M en un point O dans le référentiel R et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ étant le moment dynamique de la force $\vec{F}$ en O.

4.2 Moment cinétique de M en un point O dans $\boldsymbol{R}$:

Le moment cinétique de M en un point O est défini par :

$$\vec{L}_O(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/R)$$

La quantité $m\vec{V}(M/R)$ est appelée la quantité de mouvement.

4.3 Moment dynamique d'une force en un point O :

Le moment dynamique d'une force $\vec{F}$ en un point O est défini par :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Références :

- Pr. M. El Baz, Cours de mécanique du point matériel, SMPC1, Université Mohammed V de Rabat.
- Pr. D. Bahia, Cours de mécanique du point matériel, SMPC-SMIA S1, Faculté Pluridisciplinaire de Nador.
- Pr. M. Bourich, Mécanique du point matériel, Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Marrakech.
- Pr. M. El Kaouini, Cours de mécanique du point matériel, SVI S2, Faculté Pluridisciplinaire de Nador.

Université Mohammed Premier

Faculté Pluridisciplinaire

Nador

TRAVAUX DIRIGÉS DE :

MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL

(avec correction)

Par : Imad El Bojaddaini

Filière : SVI

Semestre : 2

Année Universitaire : 2019/2020

Université Mohamed Premier **Année Universitaire : 2019/2020**

Faculté Pluridisciplinaire **Filière : SVI, S2**

Nador **Travaux dirigés de Physique II**

Série : N° 1

Mécanique du point matériel

Exercice 1

Soient trois vecteurs $\overrightarrow{V_1}\left(0,1,\frac{1}{2}\right), \overrightarrow{V_2}(1,1,1), \overrightarrow{V_3}(4,0,0)$. Calculer :

a) Les vecteurs unitaires de $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}$.
b) Les produits scalaires $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}$; $\overrightarrow{V_2}.\overrightarrow{V_3}$; $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_3}$.
c) Les angles $\varphi_1 = \left(\widehat{\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}}\right)$; $\varphi_2 = (\widehat{\overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}})$; $\varphi_3 = (\widehat{\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_3}})$.
d) Le module $\left\|\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}\right\|$.
e) Les composantes de $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$.

Exercice 2

Soient les vecteurs :

$$\vec{V}_1(t) = R(\cos(\omega t)\,\vec{e}_1 + \sin(\omega t)\,\vec{e}_2 + \mathrm{h}t\vec{e}_3)$$

$$\vec{V}_2(t) = \frac{t}{2p}\vec{e}_1 + t^2\vec{e}_2 - e^{-\omega t}\vec{e}_3$$

R, ω, h sont des constantes positives.

En appliquant les règles de dérivations vectorielles, calculer $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{V_1}.\vec{V}_2)$ et $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{V_1} \wedge \vec{V}_2)$.

Exercice 3

Soit $\mathrm{R(O, XYZ)}$ un référentiel muni d'une base de coordonnées cartésiennes $(\vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}}, \vec{\mathrm{k}})$ orthonormé direct dont les vecteurs unitaires sont liés à ses axes et soit M un point matériel en mouvement dans R. Dans ce référentiel, on peut considérer aussi le système de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) auquel est associée la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ ainsi que le système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) auquel est associée la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

1. On donne les coordonnées cartésiennes du point M (x = 2, y = 1, z = 1). Ecrire le vecteur position de M dans les trois systèmes de coordonnées.

   Calculer, dans chaque système la norme du vecteur position. Conclure.
2. On donne les coordonnées cylindriques du point M (ρ = 5, θ = 60°, z = 2). Ecrire dans les trois systèmes de coordonnées, le vecteur position du point M.
3. On donne les coordonnées sphériques du point M (r = 2, θ = 60°, φ = 45°). Ecrire le vecteur position de M dans les trois systèmes de coordonnées.

N.B : cos 60 = 1/2, tg 60 = $\sqrt{3}$, tg 45 = 1

Exercice 4

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ de base cartésiennes $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, les coordonnées d'un point mobile M sont définies par les équations paramétriques suivantes:

$$\begin{cases} x = \cos t - \sin t & [1] \\ y = \cos t + \sin t & [2] \end{cases}$$

1. Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne et dans la base polaire.
2. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire de M, et montrer que cette trajectoire est un cercle.

Exercice 5

Les équations paramétriques d'un point matériel M dans le plan $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ de base$(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ sont :

$$\begin{cases} x = 2t & [1] \\ y = 4t(t-1) & [2] \end{cases}$$

1. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire de M.
2. Calculer les composantes de la vitesse ainsi que son module.
3. Calculer les composantes de l'accélération.

Correction

Mécanique du point matériel

①

Série 1

Exercice 1:

$\vec{V_1}(0, 1, \frac{1}{2})$; $\vec{V_2}(1, 1, 1)$; $\vec{V_3}(4, 0, 0)$

a) Les vecteurs unitaires:

Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire d'un vecteur $\vec{V}$ quelconque, on a :

$$\vec{V} = \|\vec{V}\| . \vec{u}$$

* Soit $\vec{u_1}$ le vecteur unitaire de $\vec{V_1}(0, 1, \frac{1}{2})$:

$$\vec{V_1} = \|\vec{V_1}\| . \vec{u_1}$$

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base O.N : $\vec{V_1} = \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$

et $\|\vec{V_1}\| = \sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow \vec{u_1} = \frac{\vec{V_1}}{\|\vec{V_1}\|} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u_1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{j} + \frac{\sqrt{5}}{5}\vec{k}}$$

* Soit $\vec{u}_2$ un vecteur unitaire de $\vec{V}_2(1,1,1)$:

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{V}_2}{\|\vec{V}_2\|} = \frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}$$

2

$$\Rightarrow \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{u}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}}$$

* Soit $\vec{u}_3$ un vecteur unitaire de $\vec{V}_3(4,0,0)$:

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{V}_3}{\|\vec{V}_3\|} = \frac{4\vec{i}}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u}_3 = \vec{i}}$$

b) Les produits scalaires:

* $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \left(0.\vec{i} + 1.\vec{j} + \frac{1}{2}.\vec{k}\right) \cdot \left(1\vec{i} + 1.\vec{j} + 1.\vec{k}\right)$

$= 0\times 1 + 1\times 1 + \frac{1}{2}\times 1 = 0 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

* $\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_3 = 1\times 4 + 1\times 0 + 1\times 0 = 4$

* $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3 = 0\times 4 + 1\times 0 + \frac{1}{2}\times 0 = 0$

c) Les angles : 3

* $\varphi_1 = (\widehat{\vec{V_1}, \vec{V_2}})$.

On a : $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = \|\vec{V_1}\| \cdot \|\vec{V_2}\| \cdot \cos \varphi_1$ ①

$\|\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}\| = \|\vec{V_1}\| \cdot \|\vec{V_2}\| \cdot |\sin \varphi_1|$ ②

Puisqu'on a déjà calculé les produits scalaires on va utiliser ①.

$$\Rightarrow \cos \varphi_1 = \frac{\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}}{\|\vec{V_1}\| \cdot \|\vec{V_2}\|} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \text{Arccos}\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right) = 39^\circ$$

* $\varphi_2 = (\widehat{\vec{V_2}, \vec{V_3}})$:

$$\cos \varphi_2 = \frac{\vec{V_2} \cdot \vec{V_3}}{\|\vec{V_2}\| \cdot \|\vec{V_3}\|} = 4 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \varphi_2 = \text{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 54^\circ$$

* $\varphi_3 = (\widehat{\vec{V_1}, \vec{V_3}})$:

$$\cos \varphi_3 = \frac{\vec{V_1} \cdot \vec{V_3}}{\|\vec{V_1}\| \|\vec{V_3}\|} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_3 = \text{Arccos}(0) = 90^\circ$$

d) Le module $\|\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}\|$. (4)

On a $\|\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}\| = \|\vec{V_1}\| \cdot \|\vec{V_2}\| \cdot |\sin \varphi_1|$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{3} \times |\sin(39°)|$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{2} \times 0,63$$

$$= 1,22$$

e) Les composantes de $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$:

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 - \frac{1}{2} \times 1 \\ 1/2 \times 1 - 0 \times 1 \\ 0 \times 1 - 1 \times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

5

$$\vec{V_1}(t) = R\left[\cos(\omega t)\,\vec{e_1} + \sin(\omega t)\,\vec{e_2} + h t\,\vec{e_3}\right]$$

$$\vec{V_2}(t) = \frac{t}{2p}\,\vec{e_1} + t^2\,\vec{e_2} - e^{-\omega t}\,\vec{e_3}$$

avec R, ω et h des ctes positives.

$(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base fixe.

Calcul des dérivées :

$* \ \frac{d}{dt}\left(\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}\right)$:

$$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = R\left[\frac{t}{2p}\cos(\omega t) + t^2\sin(\omega t) - h t\, e^{-\omega t}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}\right) = R\times\left[\frac{\cos(\omega t)}{2p} - \frac{t\omega}{2p}\sin(\omega t) + 2t\sin(\omega t) + \omega t^2\cos(\omega t) - h e^{-\omega t} + h\omega t\, e^{-\omega t}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}\right) = R\left[\left(\frac{1}{2p} + \omega t^2\right)\cos(\omega t) + \left(2t - \frac{t\omega}{2p}\right)\sin(\omega t) + (\omega t - 1)\, h\, e^{-\omega t}\right]$$

2ème méthode : (6)

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{V_1}.\vec{V_2}\right) = \frac{d\vec{V_1}}{dt} \times \vec{V_2} + \vec{V_1} \times \frac{d\vec{V_2}}{dt}$$

$$= R\left[-\omega\sin(\omega t)\,\vec{e_1} + \omega\cos(\omega t)\vec{e_2} + h\,\vec{e_3}\right] \times \left[\frac{t}{2p}\vec{e_1} + t^2\vec{e_2} - e^{-\omega t}\vec{e_3}\right]$$

$$+ R\left[\cos(\omega t)\,\vec{e_1} + \sin(\omega t)\,\vec{e_2} + ht\,\vec{e_3}\right] \times \left[\frac{1}{2p}\vec{e_1} + 2t\,\vec{e_2} + \omega e^{-\omega t}\vec{e_3}\right]$$

$$= R\left[-\frac{\omega t}{2p}\sin(\omega t) + \omega t^2\cos(\omega t) - h\,e^{-\omega t}\right]$$

$$+ R\left[\frac{1}{2p}\cos(\omega t) + 2t\,\sin(\omega t) + ht\,\omega\,e^{-\omega t}\right]$$

$$= R\left[\left(2t - \frac{\omega t}{2p}\right)\sin(\omega t) + \left(\omega t^2 + \frac{1}{2p}\right)\cos(\omega t) + \left(-1 + t\omega\right)h e^{-\omega t}\right]$$

7

* $\frac{d}{dt}\left(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}\right)$:

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ Rht \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} t/2p \\ t^2 \\ -e^{-\omega t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\sin(\omega t)e^{-\omega t} - Rht^3 \\ \frac{Rht^2}{2p} + R\cos(\omega t)e^{-\omega t} \\ Rt^2\cos(\omega t) - \frac{Rt}{2p}\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$= R\begin{pmatrix} -\sin(\omega t)e^{-\omega t} - ht^3 \\ \frac{ht^2}{2p} + \cos(\omega t)e^{-\omega t} \\ t^2\cos(\omega t) - \frac{t}{2p}\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}\right) = R\begin{pmatrix} -\omega\cos(\omega t)e^{-\omega t} + \omega\sin(\omega t)e^{-\omega t} - 3ht^2 \\ \frac{ht}{p} - \omega\sin(\omega t)e^{-\omega t} - \omega\cos(\omega t)e^{-\omega t} \\ 2t\cos(\omega t) - \omega t^2\sin(\omega t) - \frac{\sin(\omega t)}{2p} - \frac{t\omega}{2p}\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}\right) = \left[-R\omega\cos(\omega t)e^{-\omega t} + R\omega\sin(\omega t)e^{-\omega t} - 3Rht^2\right]\vec{e_1}$$

$$+ \left[\frac{Rht}{p} - R\omega\sin(\omega t)e^{-\omega t} - R\omega\cos(\omega t)e^{-\omega t}\right]\vec{e_2}$$

$$+ \left[2Rt\cos(\omega t) - R\omega t^2\sin(\omega t) - \frac{R}{2p}\left(\sin(\omega t) + t\omega\cos(\omega t)\right)\right]\vec{e_3}$$

2ème méthode : (8)

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right) = \frac{d\vec{V}_1}{dt} \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \frac{d\vec{V}_2}{dt}$$

$$= \begin{pmatrix} -R\omega \sin(\omega t) \\ R\omega \cos(\omega t) \\ Rh \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} t/2p \\ t^2 \\ -e^{-\omega t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ Rht \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1/2p \\ 2t \\ \omega e^{-\omega t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -R\omega \cos(\omega t)\, e^{-\omega t} - Rht^2 \\ \dfrac{hRt}{2p} - R\omega \sin(\omega t)\, e^{-\omega t} \\ -Rt^2\omega \sin(\omega t) - \dfrac{Rt\omega}{2p}\cos(\omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R\omega \sin(\omega t)\, e^{-\omega t} - 2Rht^2 \\ \dfrac{hRt}{2p} - R\omega \cos(\omega t)\, e^{-\omega t} \\ 2Rt\cos(\omega t) - \dfrac{R}{2p}\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

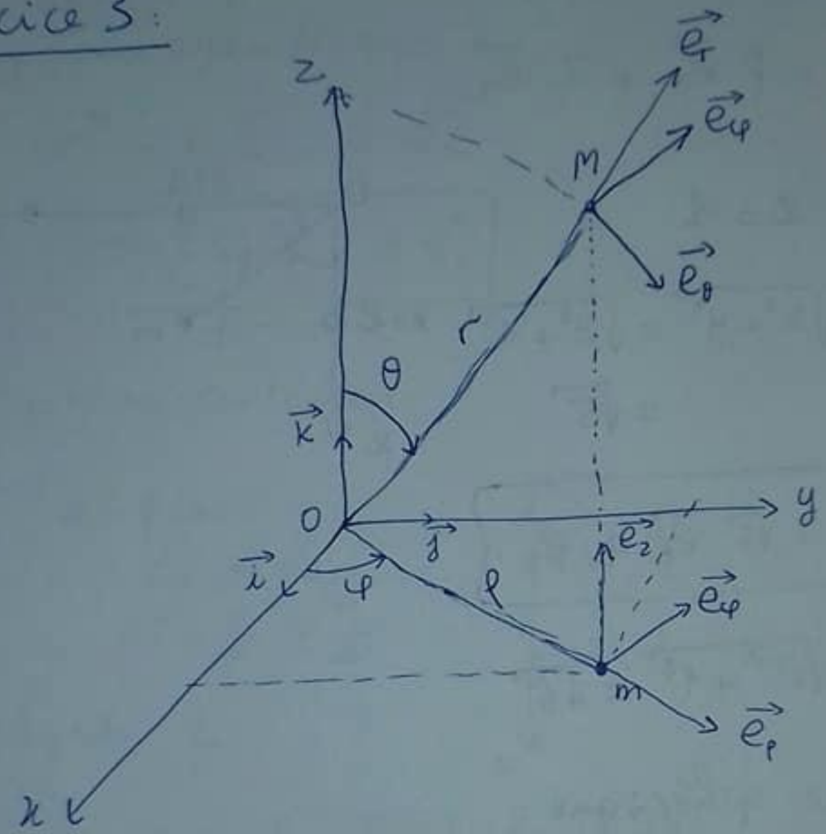
$$= R\left[\left(-\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right)\omega e^{-\omega t} - 3ht^2\right]\vec{e}_1$$

$$+ R\left[\frac{ht}{p} - \left(\sin(\omega t) + \cos(\omega t)\right)\omega e^{-\omega t}\right]\vec{e}_2$$

$$+ R\left[\frac{-1}{2p}\left(\omega t\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right) + 2t\cos(\omega t) - t^2\omega \sin(\omega t)\right]\vec{e}_3$$

9

Exercice 3 :



1) On a $M(x = 2, y = 1, z = 1)$

* Système cartésien :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

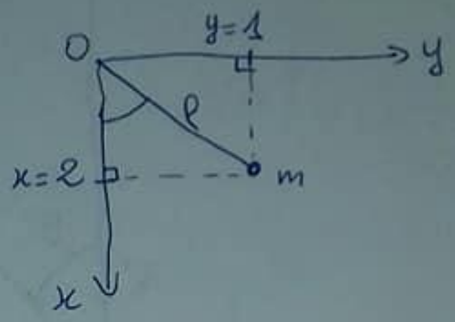
$$\boxed{\overrightarrow{OM} = 2\,\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}$$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

* Système cylindrique : 10

$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z$$

On a :



$$z = 1$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

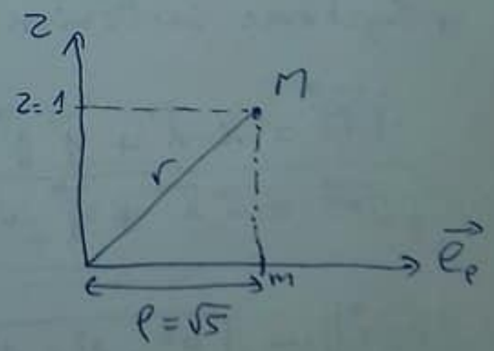
$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} = \sqrt{5}\,\vec{e}_\rho + \vec{e}_z}$$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{(\sqrt{5})^2+1^2} = \sqrt{6}$$

* Système sphérique :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$$

On a :



$$r = \sqrt{\rho^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{OM} = \sqrt{6}\,\vec{e}_r \qquad \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{6}$$

Conclusion : Dans les trois systèmes de coordonnées la norme reste la même ($\sqrt{6}$).

2) On a $M(\rho = 5 \,;\, \varphi = 60° \,;\, z = 2)$.

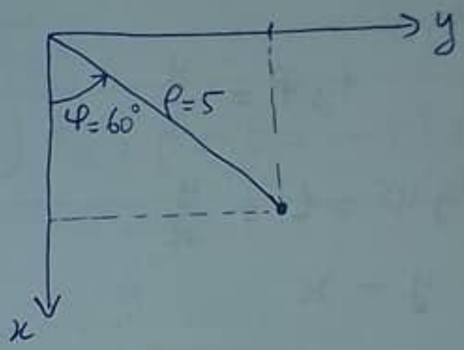
11

* Système cylindrique :

$$\vec{OM} = \rho\,\vec{e_\rho} + z\,\vec{e_z}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{OM} = 5\,\vec{e_\rho} + 2\,\vec{e_z}}$$

* Système cartésien :



On a : $x = \rho\cos\varphi$

$$= 5 \times \cos 60$$

$$= 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

et $tg\,\varphi = \frac{y}{x}$

$$\Longrightarrow y = x\,tg\,\varphi = \frac{5}{2} \times tg\,60 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

et $z = 2$

$$\Longrightarrow \vec{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{OM} = \frac{5}{2}\,\vec{i} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\,\vec{j} + 2\,\vec{k}}$$

* Système sphérique :

$$\vec{OM} = r\,\vec{e_r} \quad \text{et} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{75}{4} + 4} = \sqrt{29}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{OM} = \sqrt{29}\,\vec{e_r}}$$

3) On a $M(r=2\ ;\ \theta=60°\ ;\ \varphi=45°)$

12

* Système sphérique :

$$\vec{OM} = r\,\vec{e_r} \Rightarrow \boxed{\vec{OM} = 2\,\vec{e_r}}$$

* Système cartésien :

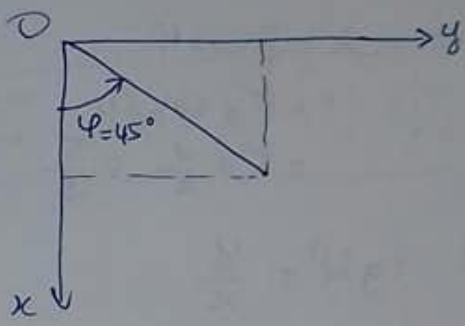
$$\vec{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

On a :

$$tg\,\varphi = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow tg\,45 = 1 = \frac{y}{x}$$

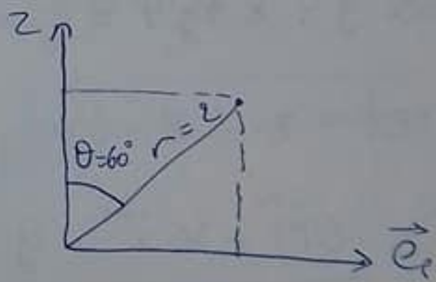
$$\Rightarrow y = x$$



$$z = r\cos\theta = 2\times\cos 60$$

$$z = 1$$

$$tg\,\theta = \frac{\rho}{z} \Rightarrow \rho = z\,tg\,\theta$$



$$\Rightarrow \rho = \sqrt{3} \Rightarrow \rho^2 = 3 = x^2 + y^2 = 2x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{OM} = \frac{\sqrt{6}}{2}\,\vec{i} + \frac{\sqrt{6}}{2}\,\vec{j} + \vec{k}}$$

* Système cylindrique :

$$\vec{OM} = \rho\,\vec{e_\rho} + z\,\vec{e_z} \Rightarrow \boxed{\vec{OM} = \sqrt{3}\,\vec{e_\rho} + \vec{e_z}}$$

Exercice 4 :

13

On a $\begin{cases} x = \cos t - \sin t \\ y = \cos t + \sin t \end{cases}$

1) Vecteur position :

* base cartésienne :

$$\vec{OM} = x\,\vec{e_x} + y\,\vec{e_y}$$

$$\boxed{\vec{OM} = (\cos t - \sin t)\,\vec{e_x} + (\cos t + \sin t)\,\vec{e_y}}$$

* base polaire :

$$\vec{OM} = \rho\,\vec{e_\rho} \quad \text{avec} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\rho = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t - 2\cos t \sin t + \cos^2 t + \sin^2 t + 2\cos t \sin t}$$

$$\Rightarrow \rho = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{OM} = \sqrt{2}\ \vec{e_\rho}}$$

2) Trajectoire de M :

Il faut éliminer le temps de x et y, et trouver une équation de la forme $f(x,y) = 0$.

On a $\begin{cases} x^2 = (\cos t - \sin t)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t - 2\cos t \sin t \\ y^2 = (\cos t + \sin t)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t + 2\cos t \sin t \end{cases}$

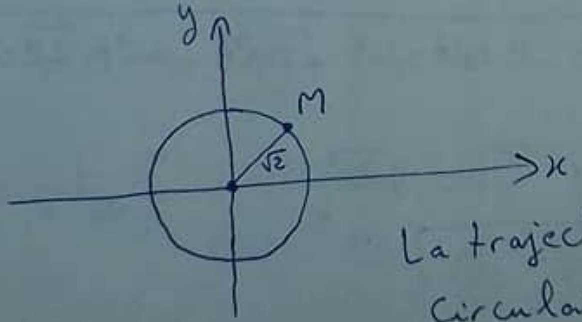
14

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 - 2\cos t \sin t \\ y^2 = 1 + 2\cos t \sin t \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 1 - 2\cos t \sin t + 1 + 2\cos t \sin t$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 2}$$

c'est l'équation d'un cercle de centre $C(0,0)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$



La trajectoire de M est circulaire.

En général, on a : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ l'équation d'un cercle de centre $C(a,b)$ et de rayon r.

Exercice 5 :

15

On a
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t(t-1) \end{cases}$$

1) L'équation de la trajectoire.

On a $x = 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2}$

$$\Rightarrow y(x) = 4.\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 2x\left(\frac{x}{2} - 1\right)$$

$$\boxed{y(x) = x^2 - 2x}$$

2) La vitesse et son module :

On a $\vec{V}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt}$

$\vec{OM} = 2t\,\vec{e_x} + 4t(t-1)\,\vec{e_y}$ avec $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ une base fixe

$$\Rightarrow \vec{V}(M) = 2\,\vec{e_x} + 4(t-1)\,\vec{e_y} + 4t\,\vec{e_y}$$

$$\boxed{\vec{V}(M) = 2\,\vec{e_x} + (8t-4)\,\vec{e_y}}$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{2^2 + (8t-4)^2} = \sqrt{4 + 64t^2 + 16 - 64t}$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{64t^2 - 64t + 20}$$

3) Les composantes de l'accélération:

On a $\overrightarrow{\gamma}(M) = \dfrac{d\overrightarrow{V}(M)}{dt}$ 16

$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\gamma}(M) = 8\ \overrightarrow{e_y}}$

Université Mohamed Premier **Année Universitaire : 2019/2020**

Faculté Pluridisciplinaire **Filière : SVI, S2**

Nador **Travaux dirigés de Physique II**

Série : N° 2

Mécanique du point matériel

Exercice 1

Dans le repère $R(O, \vec{e}_x \vec{e}_y \vec{e}_z)$ un point matériel M décrit la courbe d'équations paramétriques :

$$x = 3\cos t \qquad [1]$$
$$y = 3\sin t \qquad [2]$$
$$z = 4t \qquad [3]$$

1. Quelle est la trajectoire du point M.
2. Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération dans la base cartésienne, puis dans la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.

Exercice 2

Un point M est repéré dans un référentiel $R(O, XYZ)$ par ses coordonnées cylindriques :

$$\rho(t) = \rho_0\, e^{-\varphi(t)}, \qquad \varphi(t) = \frac{t}{a}, \qquad z(t) = -a$$

avec ρ_0 et a sont des constantes positives, t est le temps.

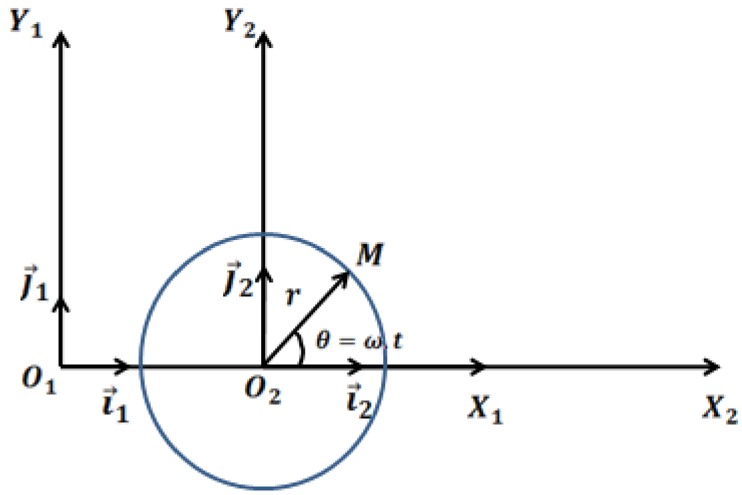
1. Ecrire l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées cylindriques.
2. Déterminer les composantes et le module de la vitesse $\vec{V}(M/R)$ à l'instant t.
3. Déterminer les composantes et le module de l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$.

Exercice 3

Soient le référentiel absolu $R_1(O_1, X_1Y_1)$ de base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1)$ et le référentiel relatif $R_2(O_2, X_2Y_2)$ de base $(\vec{i}_2, \vec{j}_2)$ en translation rectiligne par rapport à R_1 tel que:

$$\overrightarrow{O_1O_2} = (at^2 + b)\,\vec{i}_1$$

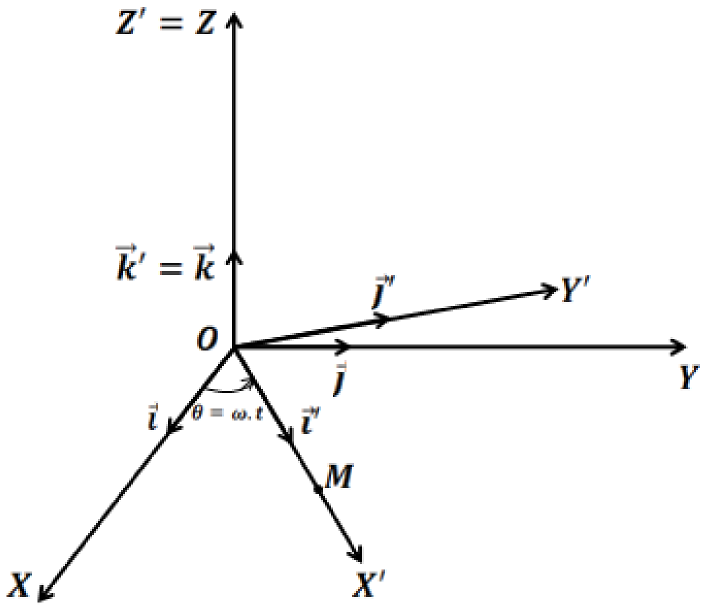
Avec a et b sont deux constantes positives.
Dans le référentiel relatif R_2, le mouvement d'un point matériel M décrit un cercle de centre O_2 et de rayon r (constant) avec une vitesse angulaire constante ω :



1. Ecrire le vecteur position $\overrightarrow{O_2M}$ dans la base $(\vec{i}_2, \vec{j}_2)$.
2. Calculer les vitesses absolue et relative et en déduire la vitesse d'entraînement de M.
3. Déterminer les accélérations : relative $\vec{\gamma}_r$, d'entraînement $\vec{\gamma}_e$, de Coriolis $\vec{\gamma}_c$ et absolue $\vec{\gamma}_a$. Que peut-on dire de $\vec{\gamma}_a$ et $\vec{\gamma}_r$, dans le cas où R_2 est en translation rectiligne et uniforme par rapport à R_1.

Exercice 4

On considère un référentiel $R'(O, x'y'z')$ tournant à une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe Oz' confondu avec l'axe Oz d'un référentiel fixe $R(O, xyz)$. Un point matériel M se déplaçant sur l'axe Ox' est repéré par $\overrightarrow{OM} = at^2\, \vec{i}'$, avec a une constante positive.



1. Déterminer les dérivées par rapport au temps des vecteurs unitaires du référentiel R'.
2. Calculer la vitesse relative et l'accélération relative de M.
3. Calculer la vitesse absolue et l'accélération absolue de M par la méthode directe et par la loi de composition des vitesses et des accélérations.

Correction

Série 2

Mécanique du point matériel

1

Exercice 1 :

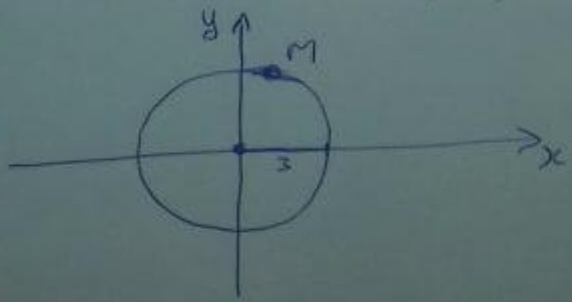
On a
$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \\ z = 4t \end{cases}$$

1) Trajectoire de M :

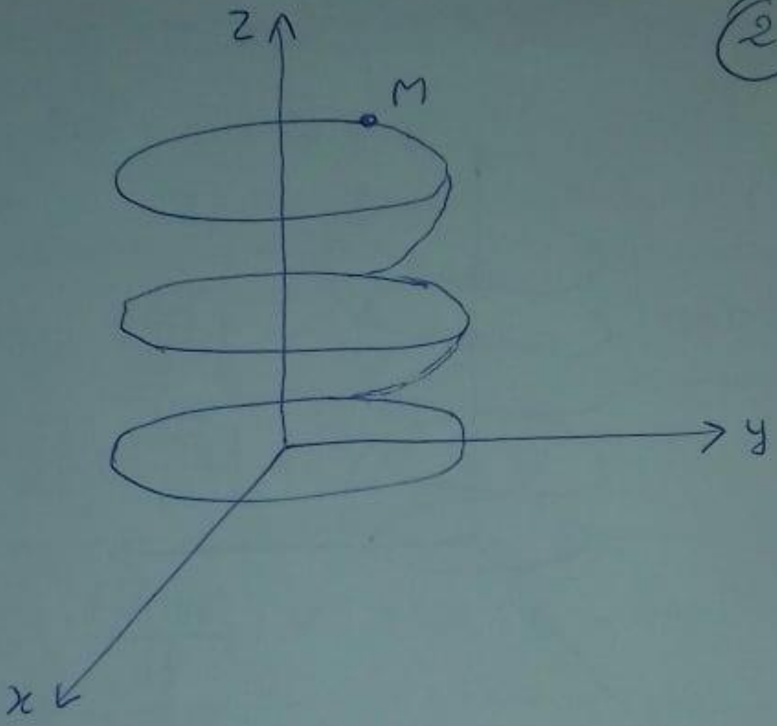
Déterminons la trajectoire de M dans le plan (x, y) :
$$\begin{cases} x^2 = 9\cos^2 t \\ y^2 = 9\sin^2 t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 9}$$

$\Rightarrow$ dans le plan (x, y), la trajectoire de M est un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 3.



(2)



Suivant l'axe z, le mouvement de M varie d'une façon uniforme. On déduit que la trajectoire de M dans l'espace est hélicoïdale.

2) Vitesse et accélération de M: (3)

* Dans la base cartésienne :

On a $\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{e_x} + y(t)\,\vec{e_y} + z(t)\,\vec{e_z}$

$= 3\cos t\,\vec{e_x} + 3\sin t\,\vec{e_y} + 4t\,\vec{e_z}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = -3\sin t\,\vec{e_x} + 3\cos t\,\vec{e_y} + 4\vec{e_z}}$$

avec $\left.\frac{d\vec{e_x}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{e_y}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{e_z}}{dt}\right|_R = \vec{0}$

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = -3\cos t\,\vec{e_x} - 3\sin t\,\vec{e_y}}$$

* Dans la base cylindrique :

On a $\overrightarrow{OM} = \rho(t)\,\vec{e_\rho} + z(t)\,\vec{e_z}$

On sait que $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{9\cos^2 t + 9\sin^2 t}$

$\Rightarrow \rho = 3$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = 3\,\vec{e_\rho} + 4t\,\vec{e_z}$

$\Rightarrow \vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = 3 \cdot \left.\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right|_R + 4\,\vec{e_z}$

La base cylindrique n'est pas fixe dans R.

Elle est une base tournante. (4)

Or $\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \end{cases}$

$$\Rightarrow \left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R = -\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e}_x + \dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{e}_y$$
$$= \dot{\varphi}\left(-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y\right)$$
$$= \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

On sait que $\tan\varphi = \dfrac{y}{x} = \dfrac{3\sin t}{3\cos t} = \tan t$

$$\Rightarrow \varphi = t \Rightarrow \dot{\varphi} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(M/R) = 3\,\vec{e}_\varphi + 4\,\vec{e}_z}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = 3 \cdot \left.\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_R$$

Or $\left.\dfrac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_R = -\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{e}_x - \dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e}_y$

$$= -\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}(M/R) = -3\,\vec{e}_\rho}$$

Exercice 2 :

5

$$\begin{cases} \rho(t) = \rho_0\, e^{-\varphi(t)} \\ \varphi(t) = \frac{t}{a} \\ z(t) = -a \end{cases}$$

ρ_0 et a des ctes

1) Vecteur position en coordonnées cylindriques :

On a $\overrightarrow{OM} = \rho(t)\,\vec{e}_\rho + z(t)\,\vec{e}_z$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} = \rho_0\, e^{-t/a}\,\vec{e}_\rho - a\,\vec{e}_z}$$

2) Vitesse de M et son module :

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = -\frac{\rho_0}{a}\, e^{-t/a}\,\vec{e}_\rho + \rho_0\, e^{-t/a} \left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R$$

On sait que $\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi = \frac{1}{a}\,\vec{e}_\varphi$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(M/R) = \frac{\rho_0}{a}\, e^{-t/a}\left[-\vec{e}_\rho + \vec{e}_\varphi\right]}$$

$$\|\vec{V}(M/R)\| = \frac{\rho_0}{a}\, e^{-t/a}\sqrt{(-1)^2 + 1^2}$$

$$\boxed{\|\vec{V}\| = \frac{\sqrt{2}\,\rho_0}{a}\, e^{-t/a}}$$

3) Accélération de M et son module : 6

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = -\frac{\rho_0}{a^2}\, e^{-t/a}\left[-\vec{e}_\rho + \vec{e}_\varphi\right]$$

$$+\frac{\rho_0}{a}\, e^{-t/a}\left[-\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_R\right]$$

Or $\left.\dfrac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi = \dfrac{1}{a}\,\vec{e}_\varphi$

et $\left.\dfrac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_R = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho = -\dfrac{1}{a}\,\vec{e}_\rho$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(M/R) = -\frac{\rho_0}{a^2}\, e^{-t/a}\left[-\vec{e}_\rho + \vec{e}_\varphi\right] + \frac{\rho_0}{a}\, e^{-t/a}\left[-\frac{1}{a}\vec{e}_\varphi - \frac{1}{a}\vec{e}_\rho\right]$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(M/R) = -\frac{\rho_0}{a^2}\, e^{-t/a}\left[-\vec{e}_\rho + \vec{e}_\varphi + \vec{e}_\varphi + \vec{e}_\rho\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}(M/R) = -\frac{2\rho_0}{a^2}\, e^{-t/a}\,\vec{e}_\varphi}$$

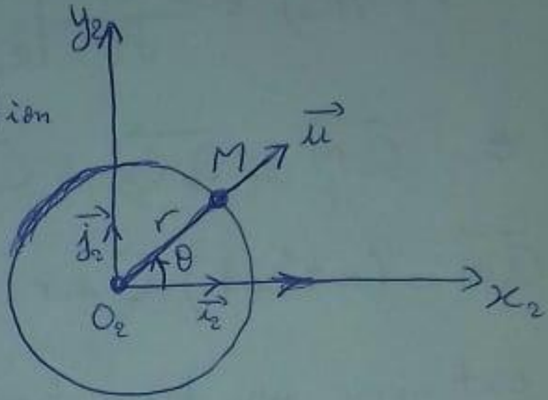
$$\boxed{\|\vec{\gamma}\| = \frac{2\rho_0}{a^2}\, e^{-t/a}}$$

7

Exercice 3 :

1) Vecteur position $\overrightarrow{O_2M}$ dans $(\vec{i_2}, \vec{j_2})$:

On choisit un vecteur unitaire $\vec{u}$ dans la direction de $\overrightarrow{O_2M}$.



On a : $\overrightarrow{O_2M} = r\,\vec{u}$

Or $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i_2} + \sin\theta\,\vec{j_2}$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{O_2M} = r\cos\theta\,\vec{i_2} + r\sin\theta\,\vec{j_2}}$$

2) Vitesses absolue et relative :

$$\vec{V_r} = \vec{V}(M/R_2) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_2}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(M/R_2) = -r\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{i_2} + r\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{j_2}$$

avec r une cte, $\theta = \omega t$ donc variable

et $\left.\frac{d\vec{i_2}}{dt}\right|_{R_2} = \left.\frac{d\vec{j_2}}{dt}\right|_{R_2} = \vec{0}$ car c'est une base (fixe) de R_2.

$$\boxed{\vec{V}(M/R_2) = -r\omega \sin(\omega t)\,\vec{i_2} + r\omega \cos(\omega t)\,\vec{j_2}}$$ 8

$$\vec{V_a} = \vec{V}(M/R_1) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1}$$

Or : $\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{O_1M} = (at^2+b)\,\vec{i_1} + r\cos\theta\,\vec{i_2} + r\sin\theta\,\vec{j_2}$$

Il faut avoir une base homogène :

On a $\vec{i_1} \,//\, \vec{i_2} \Rightarrow \vec{i_1} = \vec{i_2}$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{O_1M} = (at^2+b+r\cos\theta)\,\vec{i_2} + r\sin\theta\,\vec{j_2}}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(M/R_1) = (2at - r\dot{\theta}\sin\theta)\,\vec{i_2} + (at^2+b+r\cos\theta)\left.\frac{d\vec{i_2}}{dt}\right|_{R_1} + r\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{j_2} + r\sin\theta\left.\frac{d\vec{j_2}}{dt}\right|_{R_1}$$

On a $(\vec{i_2}, \vec{j_2})$ une base de R_2 $\Rightarrow$ sa dérivée temporelle dans R_1 n'est pas forcément nulle.

On sait que : 9

$$\left.\frac{d\vec{i_2}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{i_2}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{i_2}$$

$$= \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{i_2}$$

$$\left.\frac{d\vec{j_2}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{j_2}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{j_2}$$

$$= \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{j_2}$$

Or R_2 est en translation rectiligne / R_1

$$\Longrightarrow \vec{\Omega}(R_2/R_1) = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \left.\frac{d\vec{i_2}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{j_2}}{dt}\right|_{R_1} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{V}(M/R_1) = \left(2at - r\omega \sin(\omega t)\right)\vec{i_2} + r\omega \cos(\omega t)\,\vec{j_2}}$$

On peut déduire la vitesse d'entrainement $\vec{V_e}$ par la loi de composition des vitesses :

On a $\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e}$

10

$$\Rightarrow \vec{V}_e = \vec{V}_a - \vec{V}_r$$

$$= (2at - r\omega\sin(\omega t))\,\vec{i}_2 + r\omega\cos(\omega t)\,\vec{j}_2$$

$$+ r\omega\sin(\omega t)\,\vec{i}_2 - r\omega\cos(\omega t)\,\vec{j}_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}_e = 2at\,\vec{i}_2}$$

La vitesse d'entrainement est variable $\Longrightarrow$ R_2 est en translation rectiligne non uniforme ~~xxxx~~ $/R_1$ suivant l'axe $\vec{i}_2$.

3) Les accélérations :

$$\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(M/R_2) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R_2)}{dt}\right|_{R_2}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_r = -r\omega^2\cos(\omega t)\,\vec{i}_2 - r\omega^2\sin(\omega t)\,\vec{j}_2}$$

$$\vec{\gamma}_e = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_{R_1} + \frac{d\vec{\Omega}(R_2/R_1)}{dt}\wedge\overrightarrow{O_2M}$$

$$+ \vec{\Omega}(R_2/R_1)\wedge\left[\vec{\Omega}(R_2/R_1)\wedge\overrightarrow{O_2M}\right]$$

Or $\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \vec{0} \Longrightarrow \vec{\gamma}_e = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_{R_1}$

11

$$\boxed{\vec{\gamma}_e = 2a\,\vec{i}_1}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_c = 2\,\vec{\Omega}(R_2/R_1)\wedge\vec{V}_r = \vec{0}}$$

On peut déduire l'accélération absolue par la loi de composition des accélérations.

On a $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$

$= -r\omega^2\cos(\omega t)\,\vec{i}_2 - r\omega^2\sin(\omega t)\,\vec{j}_2 + 2a\,\vec{i}_2 + \vec{0}$

avec $\vec{i}_1 = \vec{i}_2$ (ils sont parallèles)

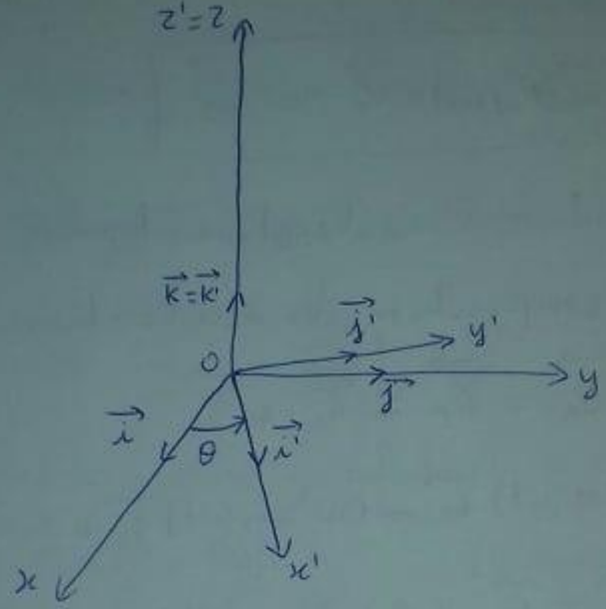
$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\gamma}_a = \left(2a - r\omega^2\cos(\omega t)\right)\vec{i}_2 - r\omega^2\sin(\omega t)\,\vec{j}_2}$$

Dans le cas où R_2 est en translation rectiligne uniforme $/R_1$, c-à-d sa vitesse d'entrainement est constante $\Longrightarrow \vec{\gamma}_e = \vec{0}$. Dans ce cas on aura : $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r$

par la loi de composition des accélérations.

Exercice 4 :

12



1) Les dérivées temporelles des vecteurs unitaires de R' :

On a $\left.\dfrac{d\vec{i}'}{dt}\right|_{R'} = \left.\dfrac{d\vec{j}'}{dt}\right|_{R'} = \left.\dfrac{d\vec{k}'}{dt}\right|_{R'} = \vec{0}$

$(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ est une base (fixe) de R'.

Dans R maintenant :

$$\left.\frac{d\vec{i}'}{dt}\right|_{R} = \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{i}'$$

R' tourne autour de l'axe Z avec une vitesse ω

$\Rightarrow \vec{\Omega}(R'/R) = \omega . \vec{k}$

$$\Rightarrow \left.\frac{d\vec{i'}}{dt}\right|_R = \omega . \vec{k'} \wedge \vec{i'} = \omega \vec{j'}$$

13

$$\left.\frac{d\vec{j'}}{dt}\right|_R = \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{j'} = \omega . \vec{k'} \wedge \vec{j'} = -\omega \vec{i'}$$

$$\left.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right|_R = \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{k'} = \omega . \vec{k'} \wedge \vec{k'} = \vec{0}$$

$$\vec{k'} = \vec{k} \Longrightarrow \left.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_R = \vec{0}$$

2) Vitesse et accélération relatives de M :

$$\vec{V_r} = \vec{V}(M/R') = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_{R'}$$ (l'origine est le même)

Or $\vec{OM} = a t^2 \vec{i'}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(M/R') = 2 a t \vec{i'}}$$

$$\vec{\gamma_r} = \vec{\gamma}(M/R') = \left.\frac{d\vec{V}(M/R')}{dt}\right|_{R'}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}(M/R') = 2a \vec{i'}}$$

3) Vitesse et accélération absolues de M : (14)

* Méthode directe :

$$\vec{V}_a = \vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = 2at\,\vec{i'} + at^2 \left.\frac{d\vec{i'}}{dt}\right|_R$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(M/R) = 2at\,\vec{i'} + at^2\omega\,\vec{j'}}$$

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = 2a\,\vec{i'} + 2at.\left.\frac{d\vec{i'}}{dt}\right|_R$$

$$+ 2at\omega\,\vec{j'} + at^2\omega \left.\frac{d\vec{j'}}{dt}\right|_R$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = 2a\,\vec{i'} + 2at\omega\,\vec{j'} + 2at\omega\,\vec{j'} - at^2\omega^2\,\vec{i'}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}(M/R) = (2a - at^2\omega^2)\,\vec{i'} + 4at\omega\,\vec{j'}}$$

* Loi de composition des vitesses et des accélérations

On a $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$

Or $\vec{V}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M}$

15

$$\Rightarrow \vec{V_e} = \vec{0} + \omega.\vec{k'} \wedge at^2\vec{i'} = at^2\omega\,\vec{j'}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(M/R) = \vec{V}(M/R') + \vec{V_e}$$

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = 2at\,\vec{i'} + at^2\omega\,\vec{j'}}$$

On a $\vec{\gamma_a} = \vec{\gamma_r} + \vec{\gamma_e} + \vec{\gamma_c}$

Or $\vec{\gamma_e} = \left.\dfrac{d^2\vec{OO'}}{dt}\right|_R + \dfrac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O'M})$

$$= \vec{0} + \vec{0} + \omega.\vec{k'} \wedge (\omega.\vec{k'} \wedge at^2\vec{i'})$$

$$= \omega\vec{k'} \wedge at^2\omega\,\vec{j'} = -at^2\omega^2\,\vec{i'}$$

et $\vec{\gamma_c} = 2\,\vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{V_r}$

$$= 2.\omega.\vec{k'} \wedge 2at\,\vec{i'} = 4at\omega\,\vec{j'}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(M/R) = 2a\,\vec{i'} - at^2\omega^2\,\vec{i'} + 4at\omega\,\vec{j'}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}(M/R) = (2a - at^2\omega^2)\,\vec{i'} + 4at\omega\,\vec{j'}}$$

Université Mohamed Premier
Faculté Pluridisciplinaire
Nador

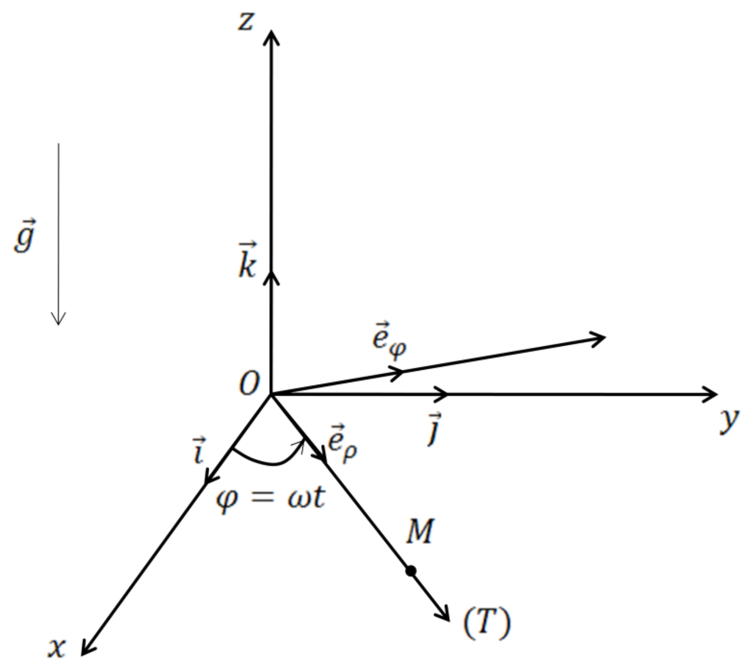
Année Universitaire : 2019/2020
Filière : SVI, S2
Travaux dirigés de Physique II

Série : N° 3

<u>Mécanique du point matériel</u>

Exercice 1

Soit $R(O, xyz)$ un référentiel orthonormé direct Galiléen, muni de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit M un point matériel de masse m. Le point M glisse sans frottement le long de la tige (T) qui tourne dans le plan horizontal (xOy) autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω $(avec\ \varphi = \omega t\ \ et\ \ \omega > 0)$. M est soumis, en plus de son poids $\vec{P}$, à la réaction de la tige $\vec{R}$. Dans ces conditions, le mouvement de M le long de la tige suit la loi $\overrightarrow{OM} = at\vec{e}_\rho$ (t étant le temps et a une constante positive). $R^{'}(O,\ \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ est le référentiel relatif liée à la tige.



<u>N.B : toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base</u> $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$

1) Calculer la vitesse $\vec{V}(M/R)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ de M dans R.

2) Calculer la vitesse $\vec{V}(M/R')$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/R')$ de M dans R'.

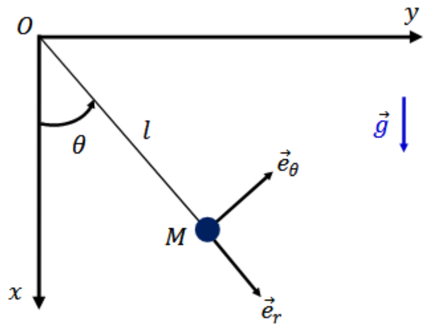
3) Calculer la vitesse d'entrainement, l'accélération d'entrainement et l'accélération de Coriolis.

4) En appliquant le principe fondamental de la dynamique (PFD) dans R', trouver les composantes de la réaction $\vec{R}$ sachant que $\vec{R} = R_\varphi \vec{e}_\varphi + R_k \vec{k}$.

Exercice 2

On considère un pendule simple constitué d'un objet ponctuel M de masse m, accroché à un fil inextensible de longueur l et de masse négligeable. Son mouvement a lieu dans le plan vertical (xOy) du référentiel fixe $R(O, xyz)$.

On écarte le pendule d'un angle θ de sa position d'équilibre $(\theta = 0)$ et on le lâche sans vitesse initiale. Les forces de frottement sont supposées inexistantes. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre g considéré comme uniforme.



1) Exprimer les forces appliquées sur le point M dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.
2) Calculer $\vec{V}(M/R)$ et $\vec{\gamma}(M/R)$ respectivement les vecteurs vitesse et accélération de M dans R.
3) En appliquant le PFD dans le référentiel Galiléen R, établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas de faibles oscillations.
4) Etablir l'expression de la tension T du fil.

Correction

Mécanique du point matériel
série 3

Exercice 1 :

$R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ absolu

$R'(O, \vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{k})$ relatif en rotation / R

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\Omega}(R'/R) = \omega . \vec{k}}$$

Les deux référentiels ont le même origine, O,

$\vec{OM} = a t \, \vec{e_\rho}$ (avec a une cte)

1) Vitesse et accélération de M dans R :

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_R = a\,\vec{e_\rho} + a t \left.\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right|_R$$

Or, $\vec{e_\rho}$ est un vecteur unitaire dans R' :

$$\left.\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right|_R = \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{e_\rho} = \omega . \vec{k} \wedge \vec{e_\rho} = \omega . \vec{e_\varphi}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{V}(M/R) = a\,\vec{e_\rho} + a \omega t\,\vec{e_\varphi}}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = a.\left.\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right|_R + a\omega\,\vec{e_\varphi} + at\omega.\left.\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt}\right|_R$$

Or $\left.\dfrac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right|_R = \omega.\,\vec{e_\varphi}$

et $\left.\dfrac{d\vec{e_\varphi}}{dt}\right|_R = \vec{\Omega}(R'/R)\wedge\vec{e_\varphi} = \omega.\vec{k}\wedge\vec{e_\varphi} = -\omega\,\vec{e_\rho}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}(M/R) = -a\omega^2 t\,\vec{e_\rho} + 2a\omega\,\vec{e_\varphi}}$$

2) Vitesse et accélération de M dans R' :

$$\vec{V}(M/R') = \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right|_{R'} = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_{R'} = a\,\vec{e_\rho} + at.\left.\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right|_{R'}$$

Or, $\vec{e_\rho}$ est un vecteur unitaire (fixe) dans R'

$$\Rightarrow \left.\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right|_{R'} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(M/R') = a\,\vec{e_\rho}}$$

$$\vec{\gamma}(M/R') = \left.\frac{d\vec{V}(M/R')}{dt}\right|_{R'} = a.\left.\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right|_{R'}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}(M/R') = \vec{0}}$$

3) Vitesse d'entrainement, accélération d'entrainement et accélération de Coriolis:

$$\vec{V_e} = \left.\frac{d\vec{OO'}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{O'M}$$

$$= \vec{0} + \omega.\vec{k} \wedge at\,\vec{e_\rho}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{V_e} = a\omega t\,\vec{e_\varphi}}$$

$$\vec{\gamma_e} = \left.\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}\right|_R + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O'M})$$

$$= \vec{0} + \vec{0} + \omega.\vec{k} \wedge (\omega.\vec{k} \wedge at\,\vec{e_\rho})$$

$$= \omega.\vec{k} \wedge a\omega t\,\vec{e_\varphi}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\gamma_e} = -a\omega^2 t\,\vec{e_\rho}}$$

$$\vec{\gamma_c} = 2\vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{V_r}$$

$$= 2\omega.\vec{k} \wedge a\,\vec{e_\rho}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\gamma_c} = 2a\omega\,\vec{e_\varphi}}$$

4) Principe Fondamental de la Dynamique dans R' :

R' est un référentiel non Galiléen car $\vec{\gamma}_e \neq \vec{0}$

$\Rightarrow$ PFD dans R' s'écrit :

$$\vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} + \sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{\gamma}(M/R')$$

Les forces d'inertie sont :

* $\vec{F}_{ie} = -m\,\vec{\gamma}_e = a\,m\,\omega^2 t\,\vec{e}_\rho$
* $\vec{F}_{ic} = -m\,\vec{\gamma}_c = -2\,m\,a\,\omega\,\vec{e}_\varphi$

Les forces extérieures exercées sur M sont :

* Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{k}$
* Réaction de la tige : $\vec{R} = R_\varphi\,\vec{e}_\varphi + R_k\,\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} + \vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{\gamma}(M/R')$$

dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ on écrit :

$$\begin{pmatrix} a m \omega^2 t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2ma\omega \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R_\varphi \\ R_k \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$(2) \Rightarrow \boxed{R_\varphi = 2 m a \omega}$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{R_k = m g}$$

Exercice 2 :

$R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ absolu

soit $R'(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ un référentiel relatif en rotation / R.

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\Omega}(R'/R) = \dot{\theta} . \vec{k}}$$

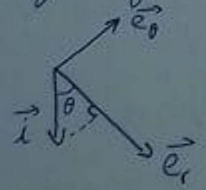
avec $\dot{\theta}$ la vitesse angulaire de R'/R

Attention : $\dot{\theta}$ n'est pas constante !

1) Les forces appliquées sur M :

* Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg . \vec{i}$

Il faut faire la projection de $\vec{i}$ sur $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$

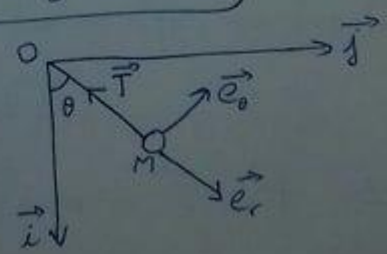


$$\vec{i} = \cos\theta \, \vec{e}_r - \sin\theta \, \vec{e}_\theta$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{P} = mg\cos\theta \, \vec{e}_r - mg\sin\theta \, \vec{e}_\theta}$$

* Tension du fil :

$$\boxed{\vec{T} = -T\,\vec{e}_r}$$



2) Vitesse et accélération de M dans R :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_R$$

Or, on a $\vec{OM} = l\,\vec{e_r}$

$$\Rightarrow \vec{V}(M/R) = l\,\frac{d\vec{e_r}}{dt}\Big|_R$$

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt}\Big|_R = \vec{\Omega}(R'/R)\wedge\vec{e_r} = \dot{\theta}.\vec{k}\wedge\vec{e_r} = \dot{\theta}.\vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(M/R) = l\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\Big|_R = l\,\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} + l\,\dot{\theta}\,\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}\Big|_R$$

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}\Big|_R = \vec{\Omega}(R'/R)\wedge\vec{e_\theta} = \dot{\theta}\,\vec{k}\wedge\vec{e_\theta} = -\dot{\theta}\,\vec{e_r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}(M/R) = -l\,\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + l\,\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta}}$$

3) Principe Fondamental de la Dynamique dans R :

R est un référentiel Galiléen, donc :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{\gamma}(M/R)$$

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\,\vec{\gamma}(M/R)$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{k}} + \begin{pmatrix} -T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} -l\dot{\theta}^2 \\ l\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

de l'équation (2) on obtient :

$$-mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}$$

$$\Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Pour des faibles oscillations $\Longrightarrow$ θ est très petite

$$\Longrightarrow \sin\theta \simeq \theta$$

$$\Longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

c'est l'équation différentielle du mouvement.

~~3)~~ 4) L'expression de T :

De l'équation (1) au-dessus on obtient :

$$mg\cos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{T = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2}$$