الكلية متعددة التخصصات الناظور

ⵜⴰⵖⵉⵡⴰⵏⵜ ⵜⴰⵎⵜⵉⵜⵙⵏⵉⵜ ⵏ ⵏⴰⴹⵓⵔ

Faculté Pluridisciplinaire de Nador

Analyse I

Chapitre 1 : Suites Réelles

Toufik Chaayra

Département : Mathématiques
Filière : SMPC - S1
Année universitaire : 2022/2023

13 Octobre, 2022

Plan

Suites Numériques

Définition 1

Une suite numérique est une application u définie d'une partie I de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u: \quad I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n) = u_n \end{aligned}$$

Le nombre réel $u(n) = u_n$ s'appelle le terme général de la suite.
La suite définie par l'application u est notée $(u_n)_{n \in I}$ ou tout simplement (u_n) si $I = \mathbb{N}$.
L'ensemble $\{u(n) : n \in I\}$ est appelé ensemble des valeurs de la suite.

Exemple

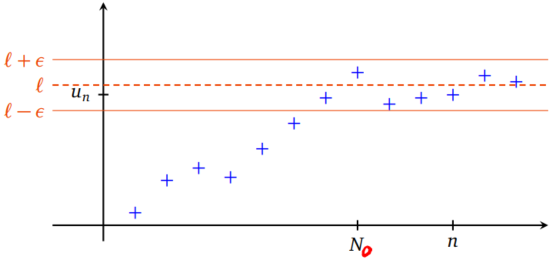
- $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.
- $u_n = (-1)^n, n \geq 1$.

Définition 2

On dit que la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} : n \geq N_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon,$$

on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \to \ell$



Remarque

Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

Théorème d'Archimède

Pour tout nombre réel x, il existe un entier naturel n tel que : $x < n$.

Preuve : Raisonnons par absurde :
Supposons le contraire c'est-à dire qu'il existe $x \in \mathbb{R}$, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ (est majoré dans $\mathbb{R}$) tel que : $x \geq n$ par suite $\mathbb{N}$ admet une borne supérieure.
Soit $M = \sup(\mathbb{N})$ donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M - \varepsilon < n$ car $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant. Or, si on prend $\varepsilon = 1$, on aura $M < n + 1$ ce qui est absurde car $n + 1 \in \mathbb{N}$ et M est un majorant de $\mathbb{N}$.

Exemple

La suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ converge vers 0 .

En effet, soit $\varepsilon > 0$, appliquons le théorème d'Archimède pour $\dfrac{1}{\varepsilon}$, il existe alors $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{\varepsilon} < N_0$, il suffit donc de prendre $N_0 = E\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + 1$.
Rappelons que $E(x)$ représente la partie entière de x ; c'est le plus grand entier tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

Définition 3 : (Divergence vers $\pm\infty$)

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle, diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), si $\forall A > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_0$

$$u_n > A \quad \text{(resp. } u_n < -A\text{)}$$

Propriété 1

Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Preuve : On procède par l'absurde.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente ayant deux limites $\ell \neq \ell'$.
Choisissons $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < \dfrac{|\ell - \ell'|}{2}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe N_1 tel que $n \geq N_1$ implique $|u_n - \ell| < \epsilon$.
De même $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell'$, il existe N_2 tel que $n \geq N_2$ implique $\left|u_n - \ell'\right| < \epsilon$.

Notons $N = \max(N_1, N_2)$, on a alors pour ce N :

$$\forall n \geq N;\ |u_n - \ell| < \epsilon \quad \text{et} \quad \left|u_n - \ell'\right| < \epsilon$$

Donc $\left|\ell - \ell'\right| = \left|\ell - u_n + u_n - \ell'\right| \leq |\ell - u_n| + \left|u_n - \ell'\right|$ (d'après l'inégalité triangulaire).
On en tire $\left|\ell - \ell'\right| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon < \left|\ell - \ell'\right|$.
On vient d'aboutir à l'inégalité $\left|\ell - \ell'\right| < \left|\ell - \ell'\right|$ qui est impossible.
Bilan : notre hypothèse de départ est fausse et donc $\ell = \ell'$.

C.Q.F.D.

Suite majorée, minorée, bornée

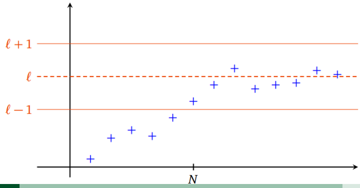
Définition 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire : $\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M$

Propriété 2

Toute suite convergente est bornée.



Suite majorée, minorée, bornée

Preuve : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers le réel ℓ.
En appliquant la définition de limite avec $\epsilon = 1$, on obtient qu'il existe un entier naturel N tel que pour $n \geq N$ on ait $|u_n - \ell| \leq 1$, et donc pour $n \geq N$ on a

$$|u_n| = |\ell + (u_n - \ell)| \leq |\ell| + |u_n - \ell| \leq |\ell| + 1.$$

Donc si on pose

$$M = \max\left(|u_0|, |u_1|, \cdots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1\right),$$

on a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$.

C.Q.F.D.

Remarque

La réciproque est fausse.

Exemple

La suite $(-1)^n, n \geq 1$, est bornée mais n'est pas convergente.

Définition 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Théorème 1

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Preuve : Notons $A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.
Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, disons par le réel ℓ, l'ensemble A est majorée par ℓ, et de plus il est non vide est bornée, donc il admet une borne supérieure : notons $\ell = \sup A$.
Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
Soit $\epsilon > 0$. Par la caractérisation de la borne supérieure, il existe un élément u_{N_0} de A tel que $\ell - \epsilon < u_{N_0} \leq \ell$. Mais alors pour $n \geq N_0$ on a $\ell - \epsilon < u_{N_0} \leq u_n \leq \ell$ (car (u_n) est croissante), et donc $|u_n - \ell| \leq \epsilon$. C.Q.F.D.

Suites monotones

Remarque

- Une suite croissante et qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.
- Une suite décroissante et qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$.

Exemple : **Laissé en exercice**

1. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

est une suite croissante et majorée par 2, donc elle converge.

2. La suite harmonique $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

est une suite croissante mais n'est pas majorée, donc elle tend vers $+\infty$.

Opération élémentaires sur les suites convergentes

Propriété 3

Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles.
Si (u_n) converge vers l_1 et (v_n) converge vers l_2. Alors

1. La suite $(u_n + v_n)$ converge vers $l_1 + l_2$.
2. La suite produit $(u_n v_n)$ converge vers $l_1 l_2$.
3. La suite $(|u_n|)$ converge vers $|l_1|$.
4. Si $l_1 \neq 0$, alors il existe un entier N tel que $u_n \neq 0$ si $n \geq N$ et la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq N}$ converge vers $\frac{1}{l_1}$

Propriétés d'ordre des suites réelles convergentes

Propriété 4

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$
2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq u_n$. Alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Preuve : En posant $w_n = v_n - u_n$, on se ramène à montrer que si une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \geq 0$ et converge, alors $\lim_{n\to+\infty} w_n \geq 0$.

On procède par l'absurde en supposant que $\ell = \lim_{n\to+\infty} w_n < 0$.

En prenant $\epsilon = \left|\frac{\ell}{2}\right|$ dans la définition de limite, on obtient qu'il existe un entier naturel N tel que $n \geq N$ implique $|w_n - \ell| < \epsilon = -\frac{\ell}{2}$.

En particulier on a pour $n \geq N$ que $w_n < \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} < 0$, une contradiction.

C.Q.F.D.

Remarque

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$.
2. Attention : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, on ne peut pas affirmer que la limite est strictement positive mais seulement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$. Par exemple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ est à termes strictement positifs, mais converge vers zéro.

Théorème de gendarme

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites réelles telles que : $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a :

1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Preuve : Soit $\epsilon > 0$; puisque les suites $(u_n)_n$, et (w_n) convergent vers ℓ, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \epsilon)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_2 \Rightarrow |w_n - \ell| \leq \epsilon).$$

En notant $N_0 = \mathrm{Max}\,(N_1, N_2)$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq N_0 \Rightarrow \begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n \\ |u_n - \ell| \leq \epsilon \\ |w_n - \ell| \leq \epsilon \end{cases} \Rightarrow -\epsilon \leq u_n - \ell \leq v_n - \ell \leq w_n - \ell \leq \epsilon \Rightarrow |v_n - \ell| \leq \epsilon.$$

Donc la suite $(v_n)_n$ converge vers ℓ.

C.Q.F.D.

Exemple

Etudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+3} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^2}; \quad n \geq 1.$$

u_n est la somme de $2n+2$ termes majorés par $\frac{n}{n^2+1}$ et minorés par $\frac{n}{(n+1)^2}$, donc quelque soit $n \in N^*$

$$(2n+2)\frac{n}{(n+1)^2} \leq u_n \leq (2n+2)\frac{n}{n^2+1}.$$

La suite de terme général $v_n = \frac{n(2n+2)}{(n+1)^2}$ est convergente et a pour limite 2.

La suite de terme général $w_n = \frac{n(2n+2)}{n^2+1}$ est convergente et a pour limite 2.

Par conséquent la suite $(u_n)_n$ converge et a pour limite 2.

Remarque

Si $u_n \leq v_n \leq w_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l'$, et $l \neq l'$, on ne peut rien dire de v_n.

Exemple

$$u_n = -2 + \frac{1}{n}, \qquad w_n = 2 + \frac{1}{n}.$$
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -2, \qquad \lim_{n \to +\infty} w_n = 2$$

- Si on prend $v_n = \dfrac{1}{n}$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ et $u_n \leq v_n \leq w_n$.
- Si on prend $v_n = (-1)^n$ n'a pas de limite bien que : $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Remarque

1. Si $u_n \to u \in \mathbb{R}$ et $v_n \to +\infty$. Alors
   a) $u_n + v_n \to +\infty$ et $\dfrac{1}{v_n} \to 0^+$.
   b) Si $u > 0, u_n v_n \to +\infty$.
   c) Si $u < 0, u_n v_n \to -\infty$.
   d) Si $u = 0$, on ne peut rien dire de la limite de la suite $(u_n v_n)$. (forme indéterminée)

2. Si $u_n \to u \in \mathbb{R}$ et $v_n \to -\infty$. Alors
   - $a)$ $u_n + v_n \to -\infty$, et $\dfrac{1}{v_n} \to 0^-$.
   - $c)$ Si $u > 0 \quad u_n v_n \to -\infty$.
   - $d)$ Si $u < 0 \quad u_n v_n \to +\infty$.
   - $e)$ Si $u = 0$ on ne peut rien dire de la limite de la suite $(u_n v_n)$.(forme indéterminée)
3. Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to -\infty$, on ne peut rien dire de la suite $(u_n + v_n)$. (forme indéterminée)
4. Si $u_n \to 0$ et $v_n \to 0$, on peut rien dire de $\dfrac{u_n}{v_n}$. (forme indéterminée)
5. Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to +\infty$, on peut rien dire de $\dfrac{u_n}{v_n}$. (forme indéterminée)

Exemple

1. $u_n = n, v_n = \dfrac{1}{n}$. (la limite du produit est 1)
2. $u_n = n, v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. (limite du produit est $+\infty$).
3. $u_n = n, v_n = \dfrac{1}{n^2}$. (limite du produit est 0)

4. $u_n = n+1, v_n = -n \Rightarrow u_n + v_n \to 1$.
5. $u_n = n+1, v_n = -n^2 \Rightarrow u_n + v_n \to -\infty$
6. $u_n = n + (-1)^n, v_n = -n \Rightarrow u_n + v_n$ n'a pas de limite.
7. $u_n = n+1$ et $v_n = n$, le rapport tend vers 1
8. $u_n = n+1$ et $v_n = \sqrt{n}$, le rapport tend vers $+\infty$
9. $u_n = n+1$ et $v_n = n^2$, le rapport tend vers 0
10. $u_n = \frac{1}{n}, v_n = \frac{1}{n^2}$, le rapport tend vers $+\infty$
11. $u_n = \frac{1}{n^2}, v_n = \frac{1}{n}$, le rapport tend vers 0.
12. $u_n = \frac{1}{n}, v_n = \frac{1}{n+1}$, le rapport tend vers 1.

Remarque

6. Si $u_n \to \infty$ et $v_n \to 0$, on peut rien dire de $u_n^{v_n}$. (forme indéterminée)
7. Si $u_n \to 1$ et $v_n \to \infty$, on peut rien dire de $u_n^{v_n}$. (forme indéterminée)

13. $u_n = \sqrt{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$, $u_n^{v_n} \to 1$.

14. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $v_n = n$, $u_n^{v_n} \to \exp(1)$.

Suite récurrente

Définition 5

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par le couple (a, f), où a est un réel et f une fonction réelle de variable réelle, telle que

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

est appelée suite récurrente (simple).

Propriété 5

Soit f une fonction <u>continue</u> sur $I = [a, b]$ telle que $\underline{f(I) \subset I}$ et soit (u_n) la suite définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$ donné. On a :

1. Si (u_n) converge vers ℓ alors $\ell = f(\ell)$.
2. Si f est croissante alors (u_n) est monotone et convergente.

Suite récurrente

Preuve :

1. La condition $f(I) \subset I$ implique que $u_n \in I$ pour tout n.
   Si $u_n \to \ell$ alors $f(u_n) \longrightarrow f(\ell)$, grâce à la continuité de f en ℓ.
   D'autre part les suites (u_n) et (u_{n+1}) ayant la même limite, on conclut que $\ell = f(\ell)$.
2.
   - 1^{er} cas : Si $u_0 \leq u_1$, la suite (u_n) est croissante, en effet (par récurrence) : Si $u_n \leq u_{n+1}$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2}$.
     La suite (u_n) étant croissante majorée par b donc convergente.
   - 2^e cas : Si $u_0 \geq u_1$, on montre de la même façon que (u_n) est décroissante minorée par a donc convergente.

C.Q.F.D.

Exemple

1. Soit la suite (u_n) définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \\ u_0 \geq 0 \end{cases}$$

Si $u_0 \in [0, 2[$ alors (u_n) est croissante, majorée. Si $u_0 \geq 0$ alors (u_n) est décroissante, minorée.

2. Etudier la suite

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n^2} \\ u_0 > 0 \end{cases}$$

Pour cet exemple on utilisera le lemme suivant :

Lemme 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
Si les sous suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et tend vers ℓ.

Propriété 6

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue et **décroissante**. Soit $u_0 \in [a,b]$ et la suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors :

- La sous-suite (u_{2n}) converge vers une limite ℓ vérifiant $f \circ f(\ell) = \ell$.
- La sous-suite (u_{2n+1}) converge vers une limite ℓ' vérifiant $f \circ f\left(\ell'\right) = \ell'$.

Suites extraites ou sous-suites

Définition 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Une suite extraite ou (sous-suite) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Remarque

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.
On montre facilement par récurrence que pour tout n, on a $\varphi(n) \geq n$.

Propriété 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, si et seulement si pour toute suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$.

Suites extraites ou sous-suites

Preuve :

$\Rightarrow$) Soit $\epsilon > 0$. D'après la définition de limite, il existe un entier naturel N tel que $n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon$.
Comme l'application φ est strictement croissante, vérifiant pour tout n, on a $\varphi(n) \geq n$.
Ceci implique en particulier que si $n \geq N$, alors aussi $\varphi(n) \geq N$, et donc $\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \epsilon$.
Donc la définition de limite s'applique aussi à la suite extraite.

$\Leftarrow$) Il suffit de prendre $\varphi(n) = n$ C.Q.F.D.

Corollaire 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si elle admet une sous-suite divergente, ou bien si elle admet deux sous-suites convergeant vers des limites distinctes, alors elle diverge.

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$. Alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1 (en fait, ces deux sous-suites sont constantes).
On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Suites extraites ou sous-suites

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Suites adjacentes

Définition 7

On dit que deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

1. La suite (u_n) est croissante.
2. La suite (v_n) est décroissante.
3. La suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Propriété 6

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes alors elles convergent vers la même limite.

Preuve : Supposons que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.
Montrons, par absurde, que $u_n \leq v_n$ pour tout n.
Supposons qu'il existe N tel que $\alpha = u_N - v_N > 0$,
donc pour $n \geq N$ on a : $u_n \geq u_N$ et $v_N \geq v_n$, par suite

$$u_n - v_n \geq u_N - v_N = \alpha > 0$$

pour tout $n \geq N$ ce qui est impossible (car $u_n - v_n$ tend vers 0).

Par suite, $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$, on en déduit que :
La suite (u_n) est croissante majorée par v_0 donc convergente vers l.
La suite (v_n) est décroissante minorée par u_0 donc convergente vers l'.
La suite $(u_n - v_n)$ converge vers $l - l' = 0$ donc $l = l'$.

C.Q.F.D.

Exemple

1. Les suites données par (u_n) et $(v_n)_{n\geq 1}$

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}, \quad n \geq 1,$$

sont adjacentes.
En effet :
La suite (u_n) est croissante, car : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \geq 0.$
La suite (v_n) est décroissante, car :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{1}{n(n+1)(n+1)!}\left[n + n(n+1) - (n+1)^2\right] \\ &= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} \leq 0. \end{aligned}$$

Suites adjacentes

De plus $v_n - u_n = \dfrac{1}{n.n!} \to 0.$
Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On en déduit que (u_n) et (v_n) convergent.

2. Les suites données par (u_n) et $(v_n)_{n\geq 1}$

$$u_n = 1 - \frac{1}{n},\ v_n = 1 + \frac{1}{n}$$

sont adjacentes.

Voici enfin deux théorème très souvant utilisés pour calculer des limités de suites.

Suites de Cauchy

Définition 8

Une suite réelle $(u_n)_n$ est dite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall p \geq q \geq n_0, \quad |u_p - u_q| \leq \epsilon$$

Propriété 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est de Cauchy } \Leftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}$$

Preuve :

$\Leftarrow$) Si $(u_n)_n$ converge vers a, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0, |u_n - a| \leqslant \epsilon$.
Donc

$$\forall n \geqslant m \geqslant n_0 \quad |u_n - u_m| \leqslant |u_n - a| + |a - u_m| \leqslant 2\epsilon$$

Suites de Cauchy

Preuve :

$\Rightarrow$) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$ fixé, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq n_0, |u_p - u_q| \leq \epsilon$.
Donc en particulier $\forall p \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} |u_p| &\leq |u_p - u_{n_0}| + |u_{n_0}| \\ &\leq \epsilon + |u_{n_0}| \end{aligned}$$

Et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n| \leq \max\left(\max_{n<n_0} |u_n|, \epsilon + |u_{n_0}|\right),$$

i.e. $(u_n)_n$ est bornée et donc par Bolzano-Weiertrass, on peut en extraire une sous-suite convergente, $u_{\varphi(n)} \to a$.
Donc il existe n_1 tel que pour tout $n \geq n_1, \left|u_{\varphi(n)} - a\right| \leq \epsilon$. On a donc, pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$,

$$|u_n - a| \leq \left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| + \left|u_{\varphi(n)} - a\right| \leq 2\epsilon \ \text{ (car } \varphi(n) \geq n \geq \max(n_0, n_1)\text{)}$$

Donc la suite $(u_n)_n$ est convergente.

C.Q.F.D.

Suites arithmétiques

Définition 9

Une suite (u_n) est dite arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

Le nombre réel r est appelé la raison de la suite arithmétique (u_n).

Propriété 9

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors

$$u_n = u_0 + nr \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Preuve : Raisonnons par récurrence : Pour $n = 0$, on a $u_0 = u_0$. Supposons que la propriété est vraie pour n, et montrons qu'elle reste également vraie pour $n + 1$.
On a par définition :

$$u_{n+1} = u_n + r = (u_0 + nr) + r = u_0 + (n + 1)r$$

donc la propriété est vraie pour $n + 1$. Ce qui prouve que la propriété est vraie $\forall n$.

Remarque

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r = 0$ la suite (u_n) est constante.
- Si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Propriété 10

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

Preuve : Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq p \leq n$, alors

$$u_p + u_{n-p} = u_0 + pr + u_0 + (n-p)r = u_0 + u_n,$$

il en résulte, si on écrit : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_p + \cdots + u_n$ et $S_n = u_n + u_{n-1} + \cdots + u_{n-p} + \cdots + u_0$, en faisant la somme, on aura $2S_n = (n+1)(u_0 + u_n)$.

C.Q.F.D.

Remarque

Si le premier terme de la suite est u_1, alors

$$S_n = n\frac{u_1 + u_n}{2}.$$

Exemple

1. La suite (u_n) définie par $u_n = n$ est arithmétique de raison 1, donc :

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. La suite (u_n) définie par $u_n = 2n + 1$ est arithmétique de raison 2, donc :

$$S_n = 1 + 3 + \ldots + (2n+1) = \frac{(n+1)(1+2n+1)}{2} = (n+1)^2.$$

Suites géométriques

Définition 10

Une suite (u_n) est dite géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = qu_n$$

Le nombre réel q est appelé la raison de la suite géométrique (u_n).

Remarque

Si $q = 0$, tous les termes de la suite sont nuls sauf, peut être, u_0.
Nous supposerons dans la suite que $q \neq 0$.

Propriété 10

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, alors : $u_n = q^n u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Suites géométriques

Preuve : Pour $n = 0$, on a $u_0 = q^0 u_0 = u_0$.
Supposons la propriété vraie pour n et montrons qu'elle reste vraie pour $n + 1$.
On a par définition : $u_{n+1} = qu_n = q\left(q^n u_0\right) = q^{n+1} u_0$.
Ce qui prouve que la propriété est vraie pour tout n.

C.Q.F.D.

Propriété 11

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, alors :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ si } q \neq 1$$

$$S_n = (n+1)u_0 \text{ si } q = 1$$

En particulier, si $0 < |q| < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = u_0 \dfrac{1}{1 - q}$.

Suites géométriques

Preuve : On a : $S_n = u_0 + qu_0 + \cdots + q^n u_0 = u_0 \left(1 + q + \cdots + q^n\right)$ donc

$$S_n - qS_n = (1-q)S_n = u_0\left(1 - q^{n+1}\right)$$

par suite

- Si $q \neq 1$, on a :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

- Si $q = 1$, on a : $u_n = u_0$ pour tout n et S_n contient $n+1$ termes. Donc

$$S_n = (n+1)u_0$$

- Si $0 < |q| < 1$ alors $q^n \to 0$, d'où

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = u_0 \frac{1}{1-q}.$$

C.Q.F.D.