الكلية متعددة التخصصات الناظور

ⵜⴰⵖⵉⵡⴰⵏⵜ ⵜⴰⵎⵜⵉⵙⵏⴰⵏⵜ ⵏ ⵏⴰⴹⵓⵔ

Faculté Pluridisciplinaire de Nador

Analyse I

Chapitre 3 : Fonctions Dérivables

Toufik Chaayra

Département : Mathématiques

Filière : SMPC - S1

Année universitaire : 2022/2023

t.chaayra@gmail.com

17 Novembre, 2022

Plan

Définitions

Définition 1

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ avec $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathcal{D}$.

- On dit que la fonction f est dérivable en x_0 (resp. dérivable à droite en x_0, dérivable à gauche en x_0) ssi la fonction $x \to \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ possède une limite finie en x_0 (resp. limite finie à droite en x_0, limite finie à gauche en x_0).
- Cette limite est alors appelée nombre dérivé de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$ (resp. nombre dérivé de f à droite en x_0 et est notée $f'_d(x_0)$, nombre dérivé de f à gauche en x_0 et est notée $f'_g(x_0)$)

Exemple

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = |x|.$$

La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Définition 2

- On dit qu'une fonction f est dérivable sur l'intervalle I ssi elle est définie sur I et si elle est dérivable en tout $x_0 \in I$.
- On appelle alors fonction dérivée de f, et on note f', la fonction qui à tout x_0 de I associe le nombre dérivé $f'(x_0)$.

Théorème 1

- Si une fonction f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.
- Si f est dérivable sur un intervalle I alors elle est continue sur I.

Preuve : Soit f une fonction dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
Posons $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, on a

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = 0,$$

puisque $\lim_{x \to x_0} x - x_0 = 0$ alors $\lim_{x \to x_0} f'(x)(x - x_0) = 0$.
Donc, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$ i.e. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (f est continue en x_0).

Remarque

Attention, la réciproque de ce théorème est fause.

Exemple

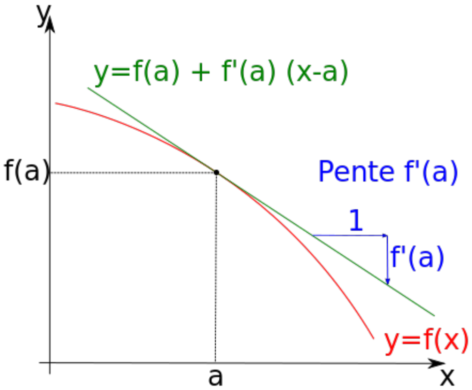
La fonction $x \to |x|$ est continue en 0 (car $\lim\limits_{x\to 0} |x| = |0| = f(0)$), mais elle est n'est pas dérivable en 0 en effet,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Donc $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ alors f n'est pas dérivable en 0.

Propriété 1

Si f est dérivable en a, la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ s'appelle la tangente à la courbe représentative de f en a.



La tangente à la courbe représentative de f en a.

Exemple

La fonction $f : x \to \ln(x)$ est dérivable en 1, donc la courbe représentative de f admet une tangente au point $A(1, 0)$ d'équation $y = x - 1$.

3.1.1 Opérations sur les dérivées

Propriétés

- **Somme et produit** : Soient I un intervalle et $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables. Alors $f+g$ et $f \times g$ sont dérivables, et

$$(f+g)' = f' + g' \text{ et } (f \times g)' = f'g + fg'$$

- **Quotient** : Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $a \in I$. Si de plus $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

- **Composée** : Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$, $a \in I,\ b \in J$ avec $b = f(a)$.
  On suppose que f est dérivable en a et g est dérivable en b.
  Alors gof est dérivable en a et

$$(gof)'(a) = f'(a).g'(f(a))$$

Exemple

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h : x \longmapsto \sin(3x^2 + 2)$.

$$\begin{array}{cccccc} h: & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 3x^2+2 & \longmapsto & \sin(3x^2+2) \end{array}$$

Les deux fonctions mises en jeu sont alors : $f : x \mapsto 3x^2 + 2$ et $g : x \mapsto \sin(x)$.
On a bien $h = gof$.
f est définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 6x$.
g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f(I) \subset \mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \cos(x)$.
Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (gof)'(x) = f'(x)g'(f(x)) = 6x\cos(3x^2 + 2).$$

Propriété (Réciproque)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et vérifie $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur I, alors

- f réalise une bijection de I sur $f(I) = J$,
- la réciproque $f^{-1} : J \to I$ est dérivable et, pour tout $b \in J$,

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

- En particulier, les tangentes en $(a, f(a))$ à $\mathcal{C}_f$ et en $(f(a), a)$ à $\mathcal{C}_f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple

La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est une bijection de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ de fonction réciproque $f^{-1} : x \mapsto e^x$ de $\mathbb{R} \mapsto]0, +\infty[$, et de fonction dérivée f' avec $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f^{-1})'(x) = (e^x)' = (\ln^{-1})'(x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x.$$

3.1.2 Fonction dérivée et sens de variation

Théorème 2

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

1. $\forall x \in]a,b\left[,\ f'(x) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f\right.$ est croissante ;
2. $\forall x \in]a,b\left[,\ f'(x) \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f\right.$ est décroissante ;
3. $\forall x \in]a,b\left[,\ f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f\right.$ est constante ;
4. $\forall x \in]a,b\left[,\ f'(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f\right.$ est strictement croissante ;
5. $\forall x \in]a,b\left[,\ f'(x) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f\right.$ est strictement décroissante.

Remarque

La réciproque au point (4) (et aussi au (5)) est fausse.
Par exemple la fonction $x \to x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Fonction dérivée et sens de variation

Exemple

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x + 3$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car : f est un polynôme).
La fonction dérivée est : $f'(x) = x - 1$ qui s'annule en 1.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(1) = \dfrac{5}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

f est décroissante sur $]-\infty, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.

3.1.3 Dérivées successives

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée. Si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable, on note $f'' = \left(f'\right)'$ la **dérivée seconde** de f.
Plus généralement on note :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \quad \text{et} \quad f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

Si la dérivée n-ième de f, $f^{(n)}$, existe, on dit que f est n **fois dérivable**.

Théorème (Formule de Leibniz)

$$(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)} \cdot g + C_n^1 f^{(n-1)} \cdot g^{(1)} + \cdots + C_n^k f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} + \cdots + f \cdot g^{(n)}.$$

Autrement dit :

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$

Exemple

Calculons la dérivée n^{ieme} de la fonction f définie par $f(x) = x^2 e^x$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $U(x) = x^2$ et $V(x) = e^x$ donc $f(x) = U(x) \times V(x)$
On applique la formule de Leibniz :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p U^{(p)}(x) V^{(n-p)}(x),$$

où : $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
Or $\forall x \in \mathbb{R} \quad U'(x) = 2x$ et $U''(x) = 2$, donc à partir de $p = 3, 4, 5, \ldots, n$, on a

$$U^{(p)}(x) = 0 \text{ et } V^{(p)}(x) = e^x.$$

D'où :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= C_n^0 U^{(0)}(x) V^{(n)}(x) + C_n^1 U^{(1)}(x) V^{(n-1)}(x) + C_n^2 U^{(2)}(x) V^{(n-2)}(x) \\ &= x^2 e^x + 2nxe^x + n(n-1)e^x \end{aligned}$$

Théorème de Rolle

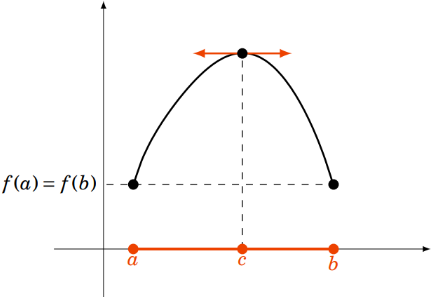
Théorème 3

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Interprétation géométrique :
il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.



Exemple

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie par :

$$f(x) = 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 8x$$

f est continue sur $[0,1]$, est dérivable sur $]0,1[$, et on a $f(0) = 0 = f(1)$.
Donc d'après le Théorème de Rolle : $\exists c \in \,]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$

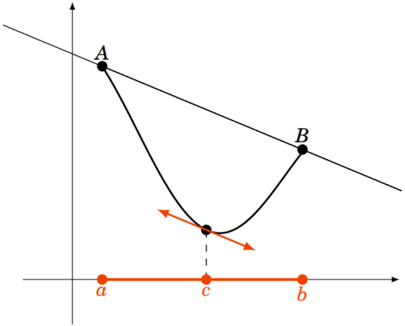
Théorème des accroissements finis

Théorème 4

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Interprétation géométrique :
il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.



Exemple

Soit f une fonction continue sur $[2,5]$ et dérivable sur $]2,5[$ et telle que

$$\forall x \in]2,5[, \; 1 \leqslant f'(x) \leqslant 4.$$

Montrer que $3 \leqslant f(5) - f(2) \leqslant 12$.
Puisque f est continue sur $[2,5]$ et dérivable sur $]2,5[$, alors $\exists c \in]2,5[$ tel que

$$f(5) - f(2) = (5-2)f'(c) \quad \text{(d'après Théorème des TAF)}$$

Et comme $\forall x \in]2,5[, \; 1 \leqslant f'(x) \leqslant 4$ alors on a :

$$\begin{aligned} 1 \leqslant f'(c) \leqslant 4 &\Rightarrow 1 \leqslant \frac{f(5)-f(2)}{5-2} \leqslant 4 \\ &\Rightarrow 3 \leqslant f(5) - f(2) \leqslant 12 \end{aligned}$$

Corollaire (Inégalité des accroissements finis (IAF))

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert.
S'il existe une constante M tel que $\forall x \in I,\ \left|f'(x)\right| \leqslant M$ alors

$$(\forall x, y \in I), \quad |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$$

Exemple

Soit $f(x) = \sin(x)$, tel que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Comme $f'(x) = \cos x$ alors $\forall x \in \mathbb{R},\ \left|f'(x)\right| \leqslant 1$.
L'inégalité des accroissements finis s'écrit alors :

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}), \quad |\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|.$$

En particulier si l'on fixe $y = 0$ alors on obtient

$$|\sin x| \leqslant |x|$$

Règle de l'Hôpital

Théorème 5

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que

1. Si $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $(\forall x \in I \setminus \{x_0\})\ g'(x) \neq 0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (fini ou non), on a
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
2. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (fini ou non), on a
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
3. Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (fini ou non), on a
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Règle de l'Hôpital

Exemple

Calculer la limite en 1 de $h(x) = \dfrac{\ln\left(x^2+x-1\right)}{\ln(x)}$.

La fonction h est définie sur $I = \left]\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$.

On vérifie que :

- $f(x) = \ln\left(x^2+x-1\right), f(1) = 0,$ f est dérivable tel que $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-1}$,
- $g(x) = \ln(x),\ g(1) = 0,$ g est dérivable tel que $g'(x) = \dfrac{1}{x}$,
- On a $I = \left]\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[,\ x_0 = 1$, alors g' ne s'annule pas sur $I\setminus\{x_0\}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} x.\frac{2x+1}{x^2+x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x}{x^2+x-1} = 3.$$

Donc

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)} = 3$$

Remarques

- Si $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ n'est pas une forme indéterminée en x_0, et si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ et $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existent, ces deux limites sont en général distinctes.

  En effet, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2}{2x+1} = \dfrac{1}{3}$ mais $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left(x^2\right)'}{(2x+1)'} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x}{2} = 1.$
- On peut réappliquer la règle de l'hôpital succéssivement autant de fois que les hypothèses sont vérifiées.

Exemple

1.
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 - x^2}{x^3 - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3 - 2x}{3x^2 - 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{12x^2 - 2}{6x - 2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

2.
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x} \left(\left\langle \frac{+\infty}{+\infty} \right\rangle\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{e^x} \left(\left\langle \frac{+\infty}{+\infty} \right\rangle\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$