الكلية متعددة التخصصات الناظور

ⵜⴰⵖⵍⵓⵜ ⵜⴰⵣⵉⵣⴰⵡⵉⵜ ⵏ ⵍⵏⴰⴹⵓⵔ

Faculté Pluridisciplinaire de Nador

# STATISTIQUE

## Dépendance linéaire entre deux caractères

**Filière:** SVI S3

**Professeur:** Toufik Chaayra

# Statistique descriptive bivariée

- Série statistique bivariée
- On s'intéresse à deux variables *X et Y. Ces deux variables sont mesurées sur les n unités d'observation.*
- Pour chaque unité, on obtient donc deux mesures. La série statistique est alors une suite de *n couples des* valeurs prises par les deux variables sur chaque individu :
    - (x1,y1), …,(xn,yn)

# Exemple

On mesure le poids *Y et la taille X de 20 individus.*

| yi | xi | xi*yi |
|---|---|---|
| 60 | 155 | 9300 |
| 61 | 162 | 9882 |
| 64 | 157 | 10048 |
| 67 | 170 | 11390 |
| 68 | 164 | 11152 |
| 69 | 162 | 11178 |
| 70 | 169 | 11830 |
| 70 | 170 | 11900 |
| 72 | 178 | 12816 |
| 73 | 173 | 12629 |
| 75 | 180 | 13500 |
| 76 | 175 | 13300 |
| 78 | 173 | 13494 |
| 80 | 175 | 14000 |
| 85 | 179 | 15215 |
| 90 | 175 | 15750 |
| 96 | 180 | 17280 |
| 96 | 185 | 17760 |
| 98 | 189 | 18522 |
| 101 | 187 | 18887 |
| **Total** 1549 | 3458 | 269833 |

# Analyse des variables

- Les variables *x et y peuvent être analysées séparément. On peut calculer tous les paramètres dont les* moyennes et les variances :

- La moyenne $\overline{x}, \overline{y}$
- La variance $s_X^2, s_Y^2$

# Covariance

- La *covariance est définie:*

$$\operatorname{cov}(X,Y) = s_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

- Remarque:
  - La covariance peut prendre des valeurs positives, négatives ou nulles.
  - Quand $x_i = y_i$*; pour tout* $i = 1, \ldots, n$*; la covariance est égale à la variance.*

# Théorème

- La covariance peut s'écrire aussi sous la forme suivante:

$$\mathrm{cov}(X,Y) = s_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{xy}$$

- Démonstration: à faire

# Corrélation

- Le *coefficient de corrélation est la covariance divisée par les deux écart-types marginaux:*

$$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y}$$

# Corrélation

- Le coefficient de corrélation mesure la dépendance linéaire entre deux variables X et Y:
- Si le coefficient de corrélation est égal à 1 ou proche de un, il y a une forte dépendance linéaire entre X et Y.
- Si le coefficient de corrélation est nul ou proche de zéro, il n'y a pas de dépendance linéaire. On peut
- cependant avoir une dépendance non-linéaire avec un coefficient de corrélation nul.

# Exemple

On mesure le poids *Y et la taille X de 20 individus.*

| yi | xi | xi*yi |
|---|---|---|
| 60 | 155 | 9300 |
| 61 | 162 | 9882 |
| 64 | 157 | 10048 |
| 67 | 170 | 11390 |
| 68 | 164 | 11152 |
| 69 | 162 | 11178 |
| 70 | 169 | 11830 |
| 70 | 170 | 11900 |
| 72 | 178 | 12816 |
| 73 | 173 | 12629 |
| 75 | 180 | 13500 |
| 76 | 175 | 13300 |
| 78 | 173 | 13494 |
| 80 | 175 | 14000 |
| 85 | 179 | 15215 |
| 90 | 175 | 15750 |
| 96 | 180 | 17280 |
| 96 | 185 | 17760 |
| 98 | 189 | 18522 |
| 101 | 187 | 18887 |
| **Total** 1549 | 3458 | 269833 |

$$\bar{Y} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} y_i = 77{,}45$$

$$\bar{X} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = 172{,}9$$

$$\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i y_i = 13491{,}65$$

$$s_{XY} = Cov(X,Y) = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i y_i - \bar{X}\bar{Y} = 100{,}545$$

$$s_Y = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} y_i^2 - \bar{Y}^2} = 12{,}74$$

$$s_X = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i^2 - \bar{X}^2} = 9{,}469619$$

$$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} = 0{,}83 = 83\%$$

**Conclusion: puisque le coefficient de corrélation est proche de 1 alors il y a une forte corrélation directe Entre la variable 'poids Y' et la variable 'taille X'.**

# Droite de régression

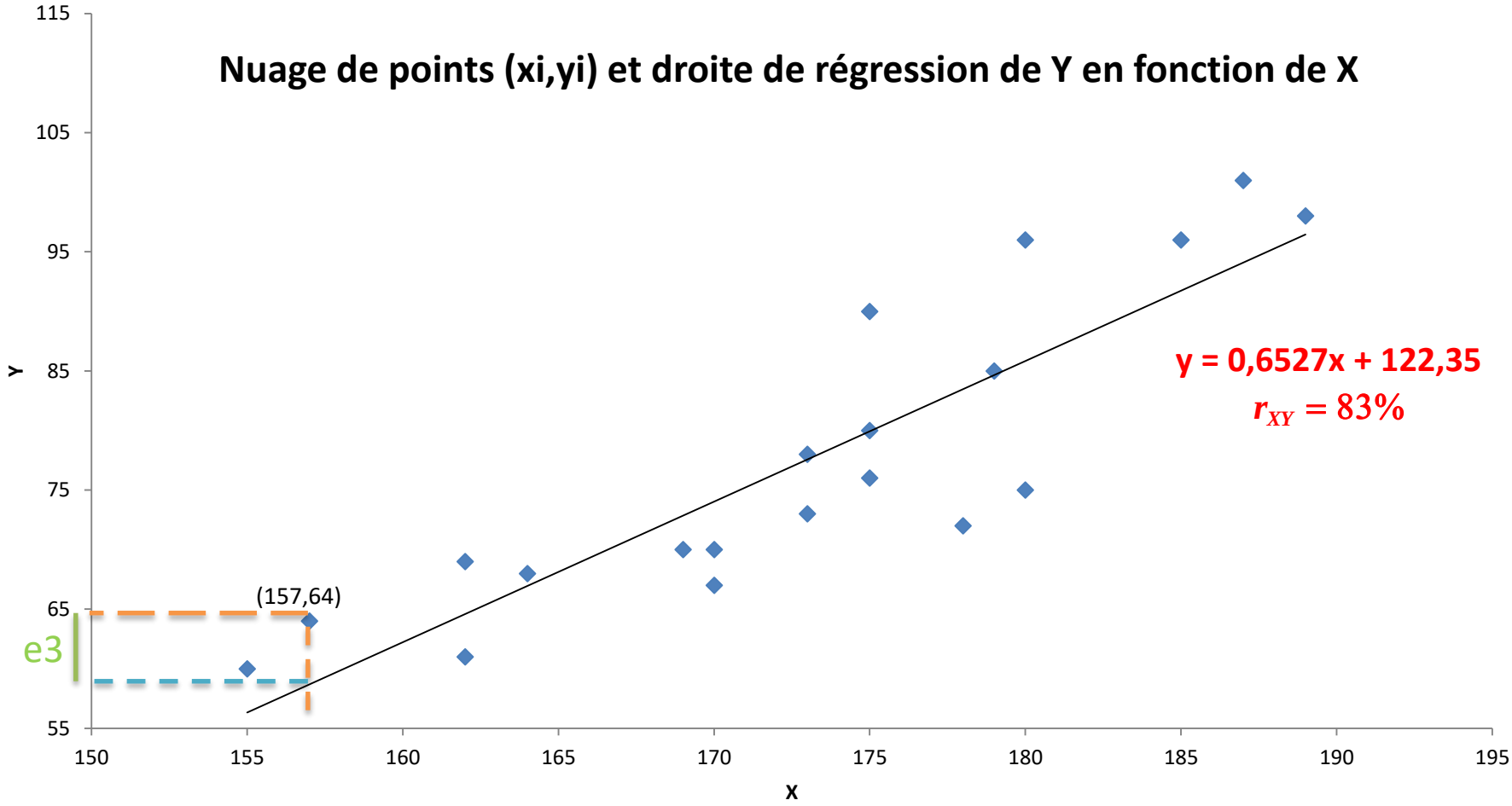
- La *droite de régression est la droite qui ajuste au mieux un nuage de points au sens des moindres carrées.*

- On considère que la variable *X est explicative et que la variable Y est dépendante. L'équation d'une* droite est

$$y = bx + a$$

où $b = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}, \quad a = \bar{Y} - b\bar{X}$

# Représentation de nuages de points (xi,yi) et droite de régression de Y en fonction de X



# Droite de régression

- Le problème consiste à identifier une droite qui ajuste bien le nuage de points. Si les coefficients *a et b étaient* connus, on pourrait calculer les résidus de la régression définie par:

$$e_i = y_i - bx_i - a$$

# Droite de régression

- Pour déterminer la valeur des coefficients *a et b on utilise le principe des moindres carrées qui consiste à* chercher la droite qui minimise la somme des carrés des résidus :

$$M(a,b)=\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$

# Théorème

- Les coefficients a et b sont donnés par:

$$b = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}, \quad a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

## Démonstration

Puisque les estimateurs a et b minimisent $M(a, b)$, alors

$$\frac{dM(a,b)}{da} = 0$$
$$\frac{dM(a,b)}{db} = 0$$

On a

$$\frac{dM(a,b)}{da} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i) = 0$$

$$\frac{dM(a,b)}{db} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - a - bx_i) = 0$$

Alors

$$\frac{dM(a,b)}{da} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i) = \sum_{i=)}^{n} y_i - na - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\frac{dM(a,b)}{db} = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - a - bx_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\frac{dM(a,b)}{da} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i) = n\bar{y} - na - bn\bar{x} = 0$$

$$\frac{dM(a,b)}{db} = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - a - bx_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

Par la suite

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\bar{y} - b\bar{x})\sum_{i=1}^{n} x_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - b(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i) - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - bns_x^2 - n\bar{y}\bar{x} = 0$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$ns_{xy} - bns_x^2 = 0$$

ET alors

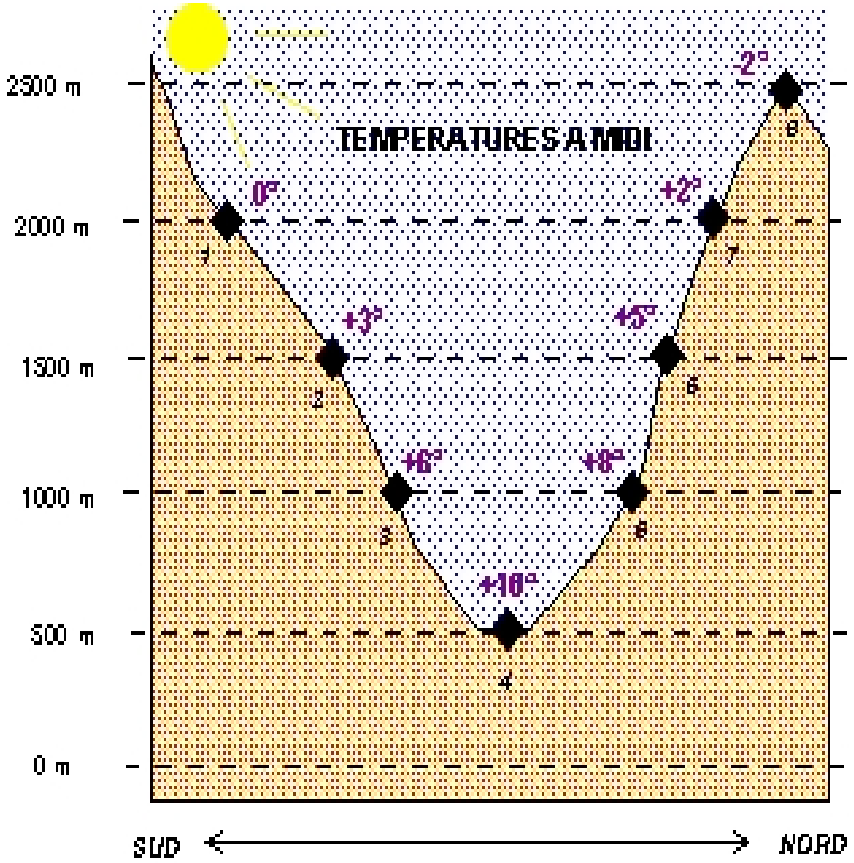
$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

# Exemple

**Tableau : Paramètres caractéristiques de la température (Y) et de l'altitude (X) de 8 stations météorologiques d'une vallée alpine (données imaginaires)**

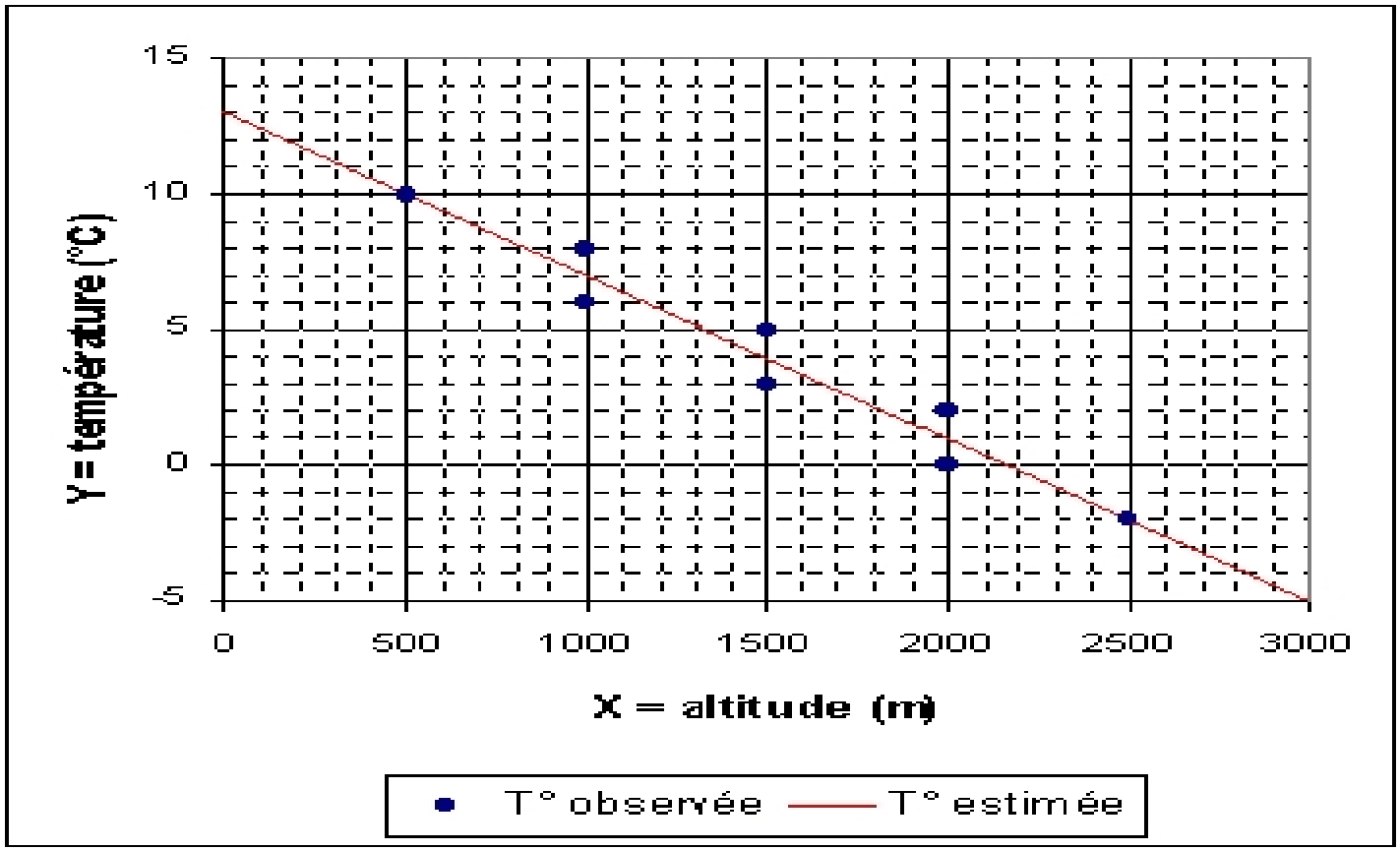
| i | (Xi) | (Yi) | (Xi-mX) | (Yi-mY) | (Xi-mX)(Yi-mY) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2000 | 0 | 500 | -4 | -2000 |
| 2 | 1500 | 3 | 0 | -1 | 0 |
| 3 | 1000 | 6 | -500 | 2 | -1000 |
| 4 | 500 | 10 | -1000 | 6 | -6000 |
| 5 | 1000 | 8 | -500 | 4 | -2000 |
| 6 | 1500 | 5 | 0 | 1 | 0 |
| 7 | 2000 | 2 | 500 | -2 | -1000 |
| 8 | 2500 | -2 | 1000 | -6 | -6000 |
| moyenne | mX = 1500 | mY = 4 | 0 | 0 | -2250 |
| écart-type | 612 | 3.8 | - | - | - |



# Exemple

On déduit de la valeur de la covariance (-2250) et de celle des deux écarts-type (654 pour X et 4.04 pour Y) l'existence d'une très forte corrélation linéaire négative entre les deux variables :
r(X,Y) = Cov(X,Y) / [ect(X) * ect(Y)] =-0.85.
Même si l'on tient compte du nombre réduits d'observation (8 stations météorologiques soit 7 degrés de liberté) cette corrélation apparaît hautement significative : il y a moins d'une chance sur 1000 que le hasard ait pu engendrer une corrélation aussi forte entre les deux variables X et Y. La forme du nuage de point croisant les valeurs de X et de Y  est par ailleurs parfaitement linéaire

**Figure :Droite de régression exprimant la température en fonction de l'altitude pour 8 stations météorologiques d'une vallée alpine (données imaginaires)**




y=-0,005x+11,87

# Exemple

Ce qui justifie la recherche d'un ajustement à l'aide d'une droite.
Il reste à déterminer le **sens de la relation**, c'est-à-dire l'hypothèse faite sur la variable explicative (indépendante) et la variable à expliquer (dépendante). Dans l'exemple choisi, il paraît assez naturel de supposer que la température (Y) dépend de l'altitude (X) et non pas l'inverse, de sorte que l'on va chercher à la température Y en fonction de l'altitude X. Mais la détermination de la relation inverse ne serait pas totalement absurde et l'on pourrait imaginer ... qu'un alpiniste se serve d'un thermomètre pour déterminer l'altitude à laquelle il se trouve (en supposant que les conditions climatiques soient "normales" et qu'il n'y ait pas ce jour là de phénomène d'inversion thermique).