Université Mohammed Premier
Faculté Pluridisciplinaire de Nador
Département de Maths et Informatique

Année universitaire: 2019-2020
Module: M20. SMP. S3
Responsable: T. Serraj

Durée: 1h30 **Examen d'Analyse Numérique et Algorithmique** 15/01/2020

Session Normale

Calculatrice non programmable est autorisée (échange interdit).
Documents et téléphones portables sont interdits.

Question de cours : (2 pts)
Rappeler la méthode de Newton pour approcher les solutions d'une équation de type $f(x) = 0$.

Exercice 1 (8 pts)
(Utiliser des valeurs approchées à trois chiffres après la virgule).
On considère l'équation :

$$(E): \; x^3 + 10x = 20 - 2x^2.$$

1. Écrire (E) sous forme $f(x) = 0$, avec f une fonction à préciser.
2. Montrer que cette équation admet une unique solution réelle s dans l'intervalle [1,2].
3. Donner les trois premières valeurs approchées x_1, x_2 et x_3 de s en utilisant la méthode de dichotomie.
4. On considère le schéma itératif suivant : $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{20}{x_n^2+2x_n+10} & \text{pour } n = 0, 1, 2, \cdots \\ x_0 \in [1,2] \end{cases}$

   a) Vérifer qu'on peut utiliser ce schéma pour trouver une valeur approchée de s.

   b) Étudier la convergence de cette méthode (on donne $sup_{x\in[1,2]} \left|\frac{-40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}\right| \leqslant \frac{12}{25}$).

   c) Pour $x_0 = 1$, calculer x_1, x_2 et x_3.

Exercice 2 (6 pts)
On considère l'intégrale suivante : $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$.

1. Calculer la valeur exacte de I.
2. Évaluer numériquement cette intégrale en utilisant la méthode des trapèzes composite avec $n = 4$ sous-intervalles.
3. Quel nombre de sous-intervalles n faut-il choisir pour avoir une erreur d'intégration inférieure à 10^{-4} ?

Exercice 3 (4 pts)
Soit (S) le système linéaire suivant : $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 6 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - 4 &= 0 \\ -x_2 + 4x_3 - 6 &= 0 \end{cases}$

1) Montrer que le système (S) admet une solution unique et trouver cette solution par la méthode d'éliminations de Gaus.

2) Montrer que la méthode de Jacobi converge pour le système (S) et approcher la solution de (S) par cette méthode avec trois itérations à partir de $x^{(0)} = (0, 0, 0)$.