Université Mohammed Premier
Faculté Pluridisciplinaire de Nador
Département de Mathématiques et Informatique
Nador

Deuxième Année Universitaire
Semestre 3
Filière : SMA

NOTES DE COURS ET TRAVAUX DIRIGÉS D'ALGÈBRE 4

Préparé par le Professeur
T. SERRAJ

Année universitaire : 2019-2020
Version : 1.0

Table des matières

1. Préface

Ces notes de cours sont destinées en premier lieu aux étudiants de la faculté pluridisciplinaire de Nador, de la filière SMA semestre 3.

Généralement, la réduction des matrices et des endomorphismes occupe une place prépondérante dans tout cours d'algèbre linéaire. Toutefois, ce terme de réduction cache de nombreuses réalités et perspectives.

D'une part, réduire un endomorphisme f d'un espace de dimension finie, c'est trouver une base dans laquelle l'endomorphisme f est « bien compris » et « facilement manipulable ». En pratique, cela revient à pouvoir déterminer une matrice de l'endomorphisme avec une forme particulière : diagonale (dans le meilleur des cas), diagonale par blocs, triangulaire ...

Pour une matrice carrée M, l'équivalent de cette démarche consiste à chercher une matrice d'une forme particulière semblable à M : en effet, la formule de changement de bases pour la matrice d'un endomorphisme n'est autre que la traduction de la similitude de deux matrices.

D'autre part, réduire un endomorphisme (respectivement une matrice) c'est comprendre l'ensemble de toutes les matrices qui lui sont associées (respectivement sa classe de similitude) ; pour ce faire, on cherche une matrice réduite qui décrit simplement, qui caractérise cet ensemble.

Pour ceux qui s'intéressent ou veulent approfondir l'un ou l'autre des sujets traités, je recommande les références citées à la fin de ce polycopié. Prière à toute personne utilisant ce document de bien vouloir signaler toute erreur ou remarque pertinente au auteur de ce polycopié à l'e-mail : staoufik.fpn@gmail.com, et ce dans le but de l'améliorer.

2. Polynômes d'endomorphismes

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel, non réduit à zéro, sur un corps commutatif $\mathbb{K}$.

2.1. **Valeurs et vecteurs propores.**

2.1.1. *Définitions.*

Définition 1 (Eléments propores)**.** Soit f un endomorphisme de E.

- Une valeur propre λ de f est un scalaire tel que $f - \lambda Id_E$ n'est pas injective, c'est-à-dire tel qu'il existe $x \in E$ non nul qui satisfait $f(x) = \lambda x$.
- Un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ est un vecteur x non nul tel que $f(x) = \lambda x$.
- Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ est le sous-espace $E_\lambda(f) = ker(f - \lambda Id_E)$. On le note E_λ s'il n'y a pas ambiguïté sur l'endomorphisme considéré.
- L'ensemble des valeurs propres de f est appelé le sepectre de f et on le note $Sp(f)$.

Proposition 1. *Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes forment une famille libre.*

Preuve

Procédons par récurrence sur le cardinal N de la famille de vecteurs propres considérée.

- Si $N = 1$, alors la famille ne contient qu'un vecteur qui est non nul (car vecteur propre) donc la famille est libre.
- Soit $N \in \mathbb{N}^*$, supposons que toute famille de N vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes soit libre et considérons $\{x_1, \dots, x_{N+1}\}$ une famille de $N+1$ vecteurs propres associées aux valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$.

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_{N+1}) \in \mathbb{K}^{N+1}$.

$$\text{Si } \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i x_i = 0_E,$$

alors :

$$f(\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i x_i) = 0_E,$$

c'est à dire que

$$\sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i \alpha_i x_i = 0_E.$$

En combinant ces deux relations,

$$\sum_{i=1}^{N} (\lambda_{N+1} - \lambda_i)\alpha_i x_i = 0_E.$$

D'après notre hypothèse de récurrence, pour tout $i \in [\![1\,,N]\!]$, $\alpha_i = 0$ (car $\lambda_{N+1} \neq \lambda_i$ par hypothèse). On en déduit que α_{N+1} est aussi nul, car x_{N+1} est non nul. Nous avons donc montré la liberté.

Corollaire 1. *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Tout endomorphisme de E admet au plus n valeurs propres distinctes.*

Preuve

Une famille constituée de vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres est libre (d'après la proposition précédente) et de cardinal le nombre de valeurs propres distinctes. Or, le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace, d'où le résultat.

Remarque 1.

Le nombre de valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension infinie n'est pas borné comme l'on peut le voir avec les exemples suivants.

Exemple 1.

- L'endomorphisme φ de $\mathbb{K}[X]$ définie par $\varphi(P) = XP'$ admet tous les entiers naturels comme valeur propre puisque $\varphi(X^n) = nX^n$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
- L'endomorphisme de dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admet tous les réels comme valeurs propre, en effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{at}$ est un vecteur propre associé à la valeur propore a.

Proposition 2. *Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.*

Preuve

Soit $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_N}$ des sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Soit x un élément de la somme de ces sous-espaces propres ; supposons que x admette deux décompositions distinctes sur cette somme

$$x = \sum_{k=1}^{N} x_i = \sum_{k=1}^{N} x_i'.$$

Alors $\sum_{k=1}^{N}(x_i - x_i') = 0_E$, or chacun des termes de cette somme est soit nul, soit un vecteur propre. D'après le résultat précédent, $x_i - x_i' = 0$ pour tout $i \in [\![1 \ ; \ N]\!]$ (sinon on aurait trouvé une combinaison linéaire nulle non triviale de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes). On obtient l'unicité de la décomposition de x et, par conséquent, les espaces $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_N}$ sont en somme directe.

2.2. **Polynômes d'endomorphismes.** Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Par convention, on note :

- $f^0 = Id_E \in \mathcal{L}(E)$ et $A^0 = I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si f et A sont non-nuls.
- Si $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_p X^p$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Alors on note : $P(f) = \alpha_0 Id_E + \alpha_1 f + \ldots + \alpha_p f^p$ et $P(A) = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_p A^p$.

Proposition 3. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors l'application :*

$$\begin{aligned} \Phi : \ \ \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ P &\longmapsto P(f) \end{aligned}.$$

est à la fois un morphisme d'anneaux et une application linéaire.

Preuve

Soient $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_p X^p$ et $Q(X) = \beta_0 + \beta_1 X + \ldots + \beta_q X^q$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On peut supposer que $q \leq p$ et on écrit $Q(X) = \beta_0 + \beta_1 X + \ldots + \beta_p X^p$ avec $\beta_j = 0$ pour $(q < j \leq p)$. On a :

$$(P+Q)(X) = P(X) + Q(X) = \sum_{i=0}^{p} (\alpha_i + \beta_i) X^i.$$

$$(PQ)(X) = P(X)Q(X) = \sum_{0 \leq i,j \leq p} \alpha_i \beta_i X^{i+j}.$$

Alors :

$$\Phi(P+Q) = \sum_{i=0}^{p} (\alpha_i + \beta_i) f^i = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i f^i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i f^i = P(f) + Q(f) = \Phi(P) + \Phi(Q).$$

et

$$\Phi(PQ) = \sum_{0 \leq i,j \leq p} (\alpha_i \beta_i) f^{i+j} = (\sum_{i=0}^{p} \alpha_i f^i) \circ (\sum_{j=0}^{p} \beta_j f^j) = P(f) \circ Q(f) = \Phi(P) \circ \Phi(Q).$$

d'où, Φ est un morphisme d'anneaux. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$(\lambda P)(X) = \lambda\alpha_0 + \lambda\alpha_1 X + \ldots + \lambda\alpha_p X^p.$$

et :

$$\Phi(\lambda P) = (\lambda P)(f) = \lambda\alpha_0 + \lambda\alpha_1 f + \ldots + \lambda\alpha_p f^p = \lambda\Phi(P).$$

Ce qui montre que Φ est une application linéaire.

Remarque 2.

Idem,on démontre $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application :

$$\begin{array}{rl} \Psi : & \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & P \longmapsto P(A) \end{array}.$$

est à la fois un morphisme d'anneaux et une application linéaire.

Proposition 4. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors l'ensemble $\mathbb{K}[f] = \{P(f) : P \in \mathbb{K}[X]\}$ est une sous-algèbre commutatif de $\mathcal{L}(E)$.*

Preuve

D'après la proposition précédente, Φ est à la fois une application linéaire et un morphisme d'anneaux, alors $Im(\Phi) = \mathbb{K}[f]$ est à la fois un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$.

Montrons maintenant que $\mathbb{K}[f]$ est un commutatif : Soient $g, h \in \mathbb{K}[f]$, et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $g = \Phi(P)$ et $h = \Phi(Q)$, on a :

$$g \circ h = \Phi(P) \circ \Phi(Q) = \Phi(PQ) = \Phi(QP) = \Phi(Q) \circ \Phi(P) = h \circ g.$$

Remarque 3.

- De même, on montre que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[A] = \{P(A) : P \in \mathbb{K}[X]\}$ est une sous-algèbre commutatif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

$$Q\, divise\, P \Rightarrow Ker(Q(f)) \subset Ker(P(f)).$$

En effet, si Q divise P, alors $P = UQ$ où $U \in \mathbb{K}[X]$. Soit $x \in Ker(Q(f))$, or $P(f) = U(f) \circ Q(f)$ donc $P(f)(x) = U(f)(Q(f)(x)) = 0$, d'où $x \in Ker(P(f))$.

Théorème 1 (Lemme des noyaux)**.** *Soient $P_i \in \mathbb{K}[X]$, $1 \leqslant i \leqslant k$, des polynômes deux à deux premiers entre eux, $P = P_1P_2 \dots P_k$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

$$Ker(P(f)) = Ker(P_1(f)) \oplus Ker(P_2(f)) \oplus \dots \oplus Ker(P_k(f)).$$

Preuve

Par récurrence sur k, on a :

Pour $k = 1$, il n'y a rien à démontrer.

Pour $P = P_1P_2 \dots P_kP_{k+1}$, posons $Q = P_1P_2 \dots P_k$ et supposons par la suite que $Ker(Q(f)) = Ker(P_1(f)) \oplus Ker(P_2(f)) \oplus \dots \oplus Ker(P_k(f))$. Comme $Q \mid P$ et $P_{k+1} \mid P$ alors : $Ker(Q(f)) \subseteq Ker(P(f))$ et $Ker(P_{k+1}(f)) \subseteq Ker(P(f)))$ par conséquent :

$$(*)\ Ker(Q(f)) + Ker(P_{k+1}(f)) \subseteq Ker(P(f)).$$

D'autre part, comme Q et P_{k+1} sont premiers entre eux, le théorème de Bézout assure l'existence de deux pôlynomes U et V vérifiant $1 = VP_{k+1} + UQ$. Alors :

$$(**)\ V(f) \circ P_{k+1}(f) + U(f) \circ Q(f) = Id_E.$$

Soit $x \in Ker(P(f))$, Posons $y = V(f) \circ P_{k+1}(f)(x)$ et $z = U(f) \circ Q(f)(x)$, l'égalité $(**)$ implique que $x = y + z$. Or $Q(f)(y) = V(f) \circ P(f)(x) = 0$ et $P_{k+1}(f)(z) = U(f) \circ P(f)(x) = 0$, alors $y \in Ker(Q(f))$ et $z \in Ker(P_{k+1}(f))$ et $x = y + z \in Ker(Q(f)) + Ker(P_{k+1}(f))$ donc

$$(***)\, Ker(P(f)) \subseteq Ker(Q(f)) + Ker(P_{k+1})(f).$$

D'après $(*)$ et $(***)$ on a :

$$Ker(P(f)) = Ker(Q(f)) + Ker(P_{k+1})(f).$$

De plus, si $x \in Ker(Q(f)) \cap Ker(P_{k+1})(f)$ alors :

$$x = V(f) \circ P_{k+1}(f)(x) + U(f) \circ Q(f)(x) = 0$$

d'où :

$$Ker(P(f)) = Ker(Q(f)) \oplus Ker(P_{k+1}(f)) = Ker(P_1(f)) \oplus Ker(P_2(f)) \oplus \dots \oplus Ker(P_{k+1}(f)).$$

2.3. **Polynôme minimal.**

Définition 2. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Un polynôme non nul $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit annulateur de f (resp. de A) si $P(f) = 0$ (resp. $P(A) = 0$).

Exemple 2.

Soit $\Pi \in \mathcal{L}(E)$ une projection (c.à.d $\Pi^2 = \Pi$), alors Π est annulée par le polynôme $X^2 - X = X(X-1)$.

Exemple 3.

On considère l'endomorphisme :

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{K}[X] &\to \mathbb{K}[X] \\ Q &\mapsto XQ \end{aligned}$$

On remarque que $f^i(1) = X^i, \forall i \in \mathbb{N}$. Si $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_p X^p \in \mathbb{K}[X]$ est polynôme annulateur de f, donc $P(f)(1) = (\alpha_0 + \alpha_1 f + \ldots + \alpha_p f^p)(1) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_p X^p = P(x) = 0$, alors $P = 0$. Ce qui montre que f n'admet pas de polynôme annulateur.

Proposition 5. *Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un polynôme annulateur non nul.*

Preuve

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Alors, la famille $(f^k)_{k \in [\![0, n^2]\!]}$ comporte n^2+1 vecteurs de l'espace $\mathcal{L}(E)$, lequel est de dimension n^2, cette famille est donc liée. Il existe alors une famille de $(\alpha_k)_{k \in [\![0, n^2]\!]} \in \mathbb{K}^{n^2+1}$ de scalaires non tous nuls telle que

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k f^k = 0.$$

Par conséquent, le polynôme

$$\sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k X^k$$

est annulateur de f.

La connaissance d'un polynôme annulateur donne immédiatement des renseignements sur le spectre de f. Si on note $\mathcal{Z}(P)$ l'ensemble des racines d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, alors on a le résultat suivant :

Proposition 6. *Soit $P \in \mathcal{L}(E)$, si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de f donc :*

$$Sp(f) \subseteq \mathcal{Z}(P).$$

Preuve

Soient λ une valeur propore de f et x un vecteur propore associé à λ.

En posant $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_p X^p$, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 = P(f)(x) &= \alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \ldots + \alpha_p f^p(x) \\ &= \alpha_0 x + \alpha_1 \lambda x + \ldots + \alpha_p \lambda^p x \\ &= P(\lambda) x. \end{aligned}$$

D'où, $P(\lambda) = 0$.

Proposition 7. *L'ensemble $\mathcal{I}_f$ des polynômes annulateurs de l'endomorphisme f est un idéal de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ appelé idéal annulateur de f.*

Preuve

L'ensemble $\mathcal{I}_f$ est clairement un sous-groupe additif de $\mathbb{K}[X]$.

Si $P \in \mathcal{I}_f$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors $QP \in \mathcal{I}_f$ car :

$$(QP)(f) = Q(f) \circ P(f) = Q(f) \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Comme l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est euclidien, il est en particulier principal, donc chaque idéal de $\mathbb{K}[X]$ peut être engendré par un unique polynôme unitaire. Ceci justifie la définition suivante (conjointement avec l'hypothèse que l'espace E est de dimension finie donc que l'idéal des polynômes annulateurs est non réduit au seul polynôme nul).

Définition 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme minimal de f est l'unique polynôme unitaire, noté μ_f, qui engendre l'idéal des polynômes annulateurs.

Théorème 2. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, μ_f son polynôme minimal. Alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$: $P(f) = 0 \Leftrightarrow \mu_f$ divise P. En particulier $\mu_f(f) = 0$.*

En tenant compte du fait que toute matrice possède un polynôme minimal, on aura aussi le résultat suivant :

Théorème 3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors le polynôme mininal de A noté μ_A vérifie : pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$: $P(A) = 0$ implique μ_A divise P. En particulier $\mu_A(A) = 0$.*

Exemple 4. Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il admet un monôme comme polynôme annulateur. Si f est nilpotent, il admet un polynôme annulateur de la forme X^p. Par conséquent, le polynôme minimal est donc un monôme X^k avec $k \leqslant p$. Cet entier k est appelé indice de nilpotence de f.

Exemple 5. Si h est une homothétie de E, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $h = \lambda Id_E$. Par conséquent, $X - \lambda$ est un polynôme annulateur de degré 1, donc minimal. Un polynôme annulateur de h est donc un multiple de $X-\lambda$, c'est-à-dire un polynôme admettant λ comme racine.

Exemple 6. Si Π est un projecteur, alors un polynôme annulateur de Π est, par définition, X^2-X. Ce polynôme est le polynôme minimal de Π sauf si Π est l'identité ou l'application nulle (en effet, s'il n'est pas minimal, alors Π admet un polynôme annulateur de degré 1, donc est une homothétie.

Proposition 8. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur de degré N. Alors, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, $f^m \in Vect(f^k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$.*

Preuve

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme annulateur de degré N et $m \in \mathbb{N}$. Or $\mathbb{K}[X]$ est euclidien, alors il existe $(Q_m,R_m) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$X^m = Q_m(X)P(X) + R_m(X),$$

avec $deg\, R_m < deg\, P = N$. Alors, on trouve $f^m = R_m(f)$, d'où le résultat.

Remarque 4. On a $\mathbb{K}[f] = Vect(Id_E, f \;\ldots,\; f^{deg(\mu_f)-1})$ donc $dim\, \mathbb{K}[u] = deg(\mu_f)$.

Proposition 9. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme admettant un polynôme annulateur. Alors :*

$$Sp(f) = \mathcal{Z}(\mu_f).$$

Preuve

D'après la proposition 6, il suffit de montrer que $\mathcal{Z}(\mu_f) \subseteq Sp(f)$. Soint $\lambda \in \mathcal{Z}(\mu_f)$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\mu_f(X) = (X-\lambda)Q(X)$. Comme $deg(Q) < deg(\mu_f)$ alors $Q(f)$ n'est pas nul, donc il existe un vecteur x tel que $Q(f)(x) \neq 0$. Or $(f-\lambda Id_E)\circ Q(f)(x) = \mu_f(f)(x) = 0$, alors $\lambda \in Sp(f)$.

2.4. **Polynôme caractéristique.** Dans la suite de cette section, E est supposé de dimension finie $n \geq 1$.

Définition 4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\chi_A(X) = det(A - XI_n)$ est un polynôme en X appelé polynôme caractéristique de A.

Exemple 7. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On a :

$$\chi_A(X) = det(A - XI_2) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ -1 & 4-X \end{vmatrix}$$

$$X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3).$$

Le polynôme caractéristique, d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est de degré n selon le résulatat suivant :

Proposition 10. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *où* $n \geq 1$. *Alors :*

$$\chi_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} tr(A) X^{n-1} + \ldots + det(A).$$

Preuve :

Si $n = 1$ et $A = (a)$ est une matrice de taille 1×1. Alors $\chi_A(X) = det(A - XI_n) = a - X$ et $a = det(A)$. supposons que l'égalité est vraie pour toute matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, $n \geq 2$, et soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Alors, il vient :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} a_{11}-X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-X & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-X \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11} - X) \begin{vmatrix} a_{22}-X & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}-X \end{vmatrix} + Q_0(X),$$

où Q_0 est le polynôme de degré inférieur ou égale à $n-2$ donné par :

$$Q_0(X) = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33}-X & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & & \cdots & a_{nn}-X \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22}-X & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & & \cdots & a_{nn}-X \end{vmatrix} + \cdots$$

L'hypothèse de récurrence implique :

$$\chi_A(X) = (a_{11} - X)((-1)^{n-1}X^{n-1} + (-1)^{n-2}(a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn})X^{n-2}) + Q_1(X)$$

$$(-1)^n X^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})X^{n-1} + Q_2(X),$$

où Q_1 et Q_2 sont des polynômes de degré inférieur ou égale à $n-2$.

D'autre part, on a : $\chi_A(0) = det(A)$, par conséquent :

$$\chi_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} tr(A) X^{n-1} + \ldots + det(A).$$

Ce qui termine la preuve.

Exemple 8. Reprenons la matrice de l'exemple précédent. on a : $n = 2$, $tr(A) = 5$ et $det(A) = 6$. D'où,

$$\chi_A(X) = X^2 - 5X + 6.$$

Définition 5. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de f, noté $\chi_f(X)$, est le polynôme caractéristique de la matrice de f dans une base arbitriare de E.

Proposition 11. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n. Les racines de $\chi_f(X)$ sont exactement les valeurs propres de f, autrement dit :*

$$\mathcal{Z}(\chi_f) = Sp(f).$$

Preuve

Le scalaire λ est une racine de $\chi_f(X)$ si seulement si $det(f - \lambda Id_E) = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $f - \lambda Id_E$ n'est pas inversible, ce qui est équivalent à $f - \lambda Id_E$ n'est pas injectif, puisque E est de dimension finie, ce qui est la définition de λ valeur propre.

Définition 6 (Racines des polynômes)**.** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ est dite racine de P si $P(a) = 0$. Si a est une racine de P, alors $(X - a)$ divise P, on peut donc, écrire $P(X) = (X - a)Q_1(x)$. Si a est aussi racine de Q_1, on peut mettre à facteur $(X - a)$ dans Q_1 et écrire $P(X) = (X - a)^2 Q_2(X)$, et ainsi de suite, jusqu'à aboutir à une expression du type :

$$P(X) = (X - a)^k Q(X) \text{ } avec \text{ } Q(a) \neq 0.$$

On dit alors que a est racine d'ordre k de P.

Si $a_1, \ldots, a_p$ sont des racines deux à deux distinctes respectivement d'ordre $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, on peut écrire :

$$P(X) = (X - a_1)^{\alpha_1} \ldots (X - a_p)^{\alpha_p} Q(X),$$

avec $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$, Q n'ayant pas de racine dans $\mathbb{K}$.

D'après cette relation, un polynôme de degré n admet au plus n racines (en comptant chaque racine autant de fois que son ordre de multiplicité).

Définition 7 (Polynômes scindés)**.** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n. On dit que P est scindé dans $\mathbb{K}$ si P admet n racines dans $\mathbb{K}$ (en comptant chaque racine avec sa multiplicité).

Exemple 9. $P(X) = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$ est scindé dans $\mathbb{R}$. De même, $P(X) = X^3 - 4X + 5X - 2$ est scindé dans $\mathbb{R}$, car : $P(X) = (X-1)^2(X-2)$, donc il a trois racines $\{1, 1, 2\}$.

En revanche $P(X) = X^2 + 1$ est scindé dans $\mathbb{C}$ (car $P(X) = (X-i)(X+i)$) mais pas dans $\mathbb{R}$.

En d'autres termes, un polynôme est scindé si et seulement si il peut s'écrire sous la forme :

$$P(X) = a(X-a_1)^{\alpha_1} \dots (X-a_p)^{\alpha_p},$$

avec $a \in \mathbb{K}$, $a_i \neq a_j$ pour $i \neq j$ et $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = deg(P)$.

Théorème 4 (D'Alembert)**.** *Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé dans $\mathbb{C}$.*

Proposition 12. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si son polynôme caractéristique χ_A est scindé dans $\mathbb{K}$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ pour racines, on a :*

$$det(A) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \text{ et } tr(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

Preuve

En développant χ_A, on obtient :

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= (-1)^n(X^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)X^{n-1}) + \dots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \\ &= (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)X^{n-1} + \dots + \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.\end{aligned}$$

D'où $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ et $det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$.

Définition 8. Une valeur propore λ d'un endomorphisme est dite d'ordre de multiplicité $m(\lambda)$ si elle est racine d'ordre $m(\lambda)$ du polynôme caractéristique.

Définition 9. Soient f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f de multiplicité m ($m \in \mathbb{N}^*$). On appelle espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ, le sous-espace vectoriel de E, noté F_λ et défini par :

$$F_\lambda = Ker(f - \lambda Id_E)^m.$$

Proposition 13. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

$$1 \leq dim(E_\lambda(f)) \leq m(\lambda)$$

pour toute valeur propre λ de f.

Preuve

On pose $p = dim(E_\lambda(f))$ et $\chi_f(X) = (X-\lambda)^{m(\lambda)}Q(X)$ avec $Q(\lambda) \neq 0$. Il est clair que $p \geq 1$. On pose $F = Ker(f - \lambda Id.)$ Soit $g = f_{|F} \in \mathcal{L}(E)$. Alors $g = \lambda Id$. En effet,

$$x \in F \Rightarrow g(x) = f(x) = \lambda x \in F.$$

Par suite,

$$\chi_g(X) = det(\lambda Id - XId) = det((\lambda - X)Id) = (\lambda - X)^p det(Id) = (\lambda - X)^p.$$

En utilisant le fait que, χ_g divise χ_f, on obtient que $(\lambda - X)^p$ divise $\chi_f(X)$ et donc divise $(X-\lambda)^p$ puisque $Q(\lambda) \neq 0$. D'où $p \leq m(\lambda)$.

2.5. Théorème de Cayley-Hamilton.

Théorème 5 (Théorème de Cayley-Hamilton)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :*

$$\chi_f(f) = 0 \textit{ et } \chi_A(A) = 0.$$

Preuve

Voir [2]

3. Diagonalisation et trigonalisation

Soit E un $\mathbb{K}$-espave vectoriel de dimension fini n.

3.1. **Diagonalisation.**

Définition 10. Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si, et seulement si, elle est semblable à une matrice diagonale.

Exemple 10.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ donné par : $f(x,y) = (3x - 4y, 2x - 3y)$, la matrice de f dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. On considère une autre base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ formée des vecteurs $e'_1 = (1,1)$ et $e'_2 = (2,1)$, on obtient $f(e'_1) = -e'_1$ et $f(e'_2) = e'_2$. Ainsi la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonale donc f est diagonale.

Exemple 11.

La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. En effet, A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ puisque $B = P^{-1}AP$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3.1.1. *Critères de diagonalisation.*

Théorème 6. *$f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E formée de vecteurs propres.*

Preuve

Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ est une base formée de vecteurs propres correspondants aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ on a :

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, f(v_n) = \lambda_n v_n.$$

Ainsi la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

et donc f est diagonalisable.

Réciproquement, s'il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ où la matrice de f est diagonale :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

En regardant les colonnes de la matrice, on voit que $f(e_1) = a_{11}e_1, f(e_2) = a_{22}e_2, \dots, f(e_n) = a_{nn}e_n$ ce qui signifie que les vecteurs e_i sont des vecteurs propres.

Théorème 7. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de f.*

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) f est diagonalisable.

(2) E est somme directe des espaces propres : $E = E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}(f)$.

(3) $dim\, E = dim\, E_{\lambda_1}(f) + dim\, E_{\lambda_2}(f) + \dots + dim\, E_{\lambda_p}(f)$.

Preuve

(1) $\Rightarrow$ (2), soit $\mathcal{B}$ une base de E formée de vecteurs popores de f. On pose :

$$F = E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}(f),$$

comme F contient tous les vecteurs propores de f. On a $\mathcal{B} \subseteq F$. D'où, $E = Vect\{\mathcal{B}\} \subseteq F$, donc $E = F$.

(2) $\Rightarrow$ (3) est évidente.

(3) $\Rightarrow$ (1). Pour tout $i \in [\![1\ ;\ p]\!]$, on considère une base $\mathcal{B}_i$ de $E_{\lambda_i}(f)$. Alors $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_i$ est une famille libre formée de vecteurs propores de f. Or,

$$Card(\mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{p} Card(\mathcal{B}_i) = \sum_{i=1}^{p} dim\, E_{\lambda_i}(f) = dim\, E.$$

Par suite, $\mathcal{B}$ est une base de E. Ce qui montre que f est diagonalisable.

Proposition 14. *Si un endomorphisme f d'un espace vectoriel E admet $n = dim\, E$ valeurs propres deux à deux distinctes, alors f est diagonalisable.*

Preuve

Si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors une famille de vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs propres est libre et de cardinal n, donc c'est une base. On a trouvé une base de vecteurs propres de f, donc f est diagonalisable.

Exemple 12.

Une matrice triangulaire avec des coefficients diagonaux deux à deux distincts est diagonalisable (car ses valeurs propres sont précisément ces coefficients diagonaux).

Corollaire 2. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si son polynôme caractéristique χ_f est scindé à racines simples, alors f est diagonalisable.*

Preuve

Les racines de χ_f sont les valeurs propres de f. L'hypothèse implique que f admet n valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable d'après la proposition précédente.

Théorème 8. *Un endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.*

Preuve

($\Rightarrow$) Si f est diagonalisable, il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres de f ; notons $(\lambda_k)_{k\in[\![1\ ;\ m]\!]}$ les valeurs propres distinctes. Le polynôme $P(X) = \prod_{k=1}^{m}(X - \lambda_k)$ est annulateur de f. En effet, pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$, en notant λ_{k_i} la valeur propre associée à e_i, on obtient :

$$P(f)(e_i) = \prod_{k=1}^{m}(f - \lambda_k Id_E)(e_i) = \prod_{k=1,\, k\neq k_i}^{m}(f - \lambda_k Id_E) \circ (f - \lambda_{k_i} Id_E)(e_i) = 0.$$

($\Leftarrow$) Soit

$$P(X) = \prod_{k=1}^{m}(X - \lambda_k), avec\, \lambda_k \neq \lambda_j\, si\, k \neq j,$$

un polynôme annulateur de f scindé à racines simples. Puisque les $(\lambda_k)_{k\in[\![1\ ;\ m]\!]}$ sont deux à deux distincts, les polynômes $(X - \lambda_k)_{k\in[\![1\ ;\ m]\!]}$ sont premiers entre eux. En appliquant le lemme des noyaux, on obtient la décomposition :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{m} Ker(f - \lambda_k Id_E)$$

comme somme directe de sous-espaces propore de f. Par conséquent f est diagonalisable.

Ce résultat admet la reécriture immédiate suivante :

Théorème 9. *Un endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal μ_f est scindé à racines simples.*

Théorème 10. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

$$f \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K}, \\ m(\lambda) = dim\, E_\lambda(f) \text{ pour tout } \lambda \in Sp(f). \end{cases}$$

Preuve

Posons

$$\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{m(\lambda_i)},$$

où $\lambda_i \in Sp(f)$, pour $1 \leq i \leq k$.

($\Rightarrow$) Supposons que f est diagonalisable, alors $E = E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f) \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k}(f)$ et $\chi_f(X) = \chi_{f_{|E_{\lambda_1}(f)}}(X) \ldots \chi_{f_{|E_{\lambda_k}(f)}}(X)$, or $f_{|E_{\lambda_i}(f)} = \lambda_i Id_E$, donc $\chi_{f_{|E_{\lambda_i}(f)}}(X) = (X - \lambda_i)^{n_i}$ où $n_i = dim(E_{\lambda_i}(f))$ pour $1 \leq i \leq k$. D'où,

$$\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{n_i},$$

alors, $m(\lambda_i) = n_i$ par identification.

($\Leftarrow$) Réciproquement, on a :

$$\sum_{i=1}^{k} dim(E_{\lambda_i}(f)) = \sum_{i=1}^{k} m(\lambda_i) = n,$$

ce qui prouve que f est diagonalisable.

Exemple 13.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ donné par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Le polynôme caractéristique de f est $\chi_f(X) = -(X-1)^2(X-2)$, donc χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$ et de plus on a : $Sp(f) = \{1, 2\}$, avec $m(1) = 2$ et $m(2) = 1$.

Comme $1 \leqslant dimE_2(f) \leqslant m(2) = 1$, donc $dimE_2(f) = m(2) = 1$.

D'autre part, soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$u \in E_1(f) \Leftrightarrow x - y + z = 0 \Leftrightarrow z = y - x \Leftrightarrow u = (x, y, y - x) \Leftrightarrow u = x(1, 0, -1) + y(0, 1, 1).$$

Il vient que $e'_1 = (1, 0, -1)$ et $e'_2 = (0, 1, 1)$ est une base de $E_1(f)$, donc $dim(E_1(f)) = m(1) = 2$, par la suite, f est diagonalisable.

Corollaire 3. *Un endomorphisme f d'un espace de dimension n est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.*

3.2. **Trigonalisation.**

Définition 11. Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si, et seulement si, elle est semblable à une matrice triangulaire.

Exemple 14.

Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, or $B = P^{-1}AP$, la matrice A est trigonalisable.

Exemple 15.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ donné par : $f(x,y) = (-3x + 2y, \, -8x + 5y)$, la matrice de f dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$. On considère une autre base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ formée des vecteurs $e'_1 = (1,2)$ et $e'_2 = (1,3)$, on obtient $f(e'_1) = e'_1$ et $f(e'_2) = 2e'_1 + e'_2$. Ainsi, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire donc f est trigonalisable.

3.2.1. *Critères de trigonalisation.*

Théorème 11. *Un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, il admet un polynôme annulateur scindé, soit encore si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé.*

Preuve

Si l'endomorphisme f est trigonalisable, il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire. En calculant le polynôme caractéristique de f écrit dans cette base, on trouve que celui-ci est scindé : il est égal au produit des termes $(a_{ii} - X)$ où les a_{ii} sont les termes diagonaux de la matrice de f dans cette base.

Réciproquement, supposons que f admet un polynôme annulateur scindé

$$P(X) = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}.$$

D'après le lemme des noyaux, l'espace E est la somme directe des $F_{\lambda_i} = Ker(f - \lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$, et il suffit donc de montrer que l'endomorphisme induit par f sur chacun de ces sous-espaces F_{λ_i} est trigonalisable.

Chacun de ces endomorphismes induits est la somme d'une homothétie $\lambda_i Id_E$ et d'un endomorphisme nilpotent $f - \lambda_i Id_E$. Il existe donc une base de F_{λ_i} telle que $f - \lambda_i Id_E$

s'écrit sous la forme d'une matrice triangulaire supérieure : l'endomorphisme induit par f sur F_{λ_i} est donc trigonalisable. En concaténant les bases obtenues pour chacun de ces sous-espaces, on obtient une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

Corollaire 4. *Tout endomorphisme sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (respectivement toute matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{C}$) est trigonalisable.*

Preuve

C'est une application directe du résultat ci-dessus en remarquant que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos (théorème de D'Alembert-Gauss), donc que tous les polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés.

Corollaire 5. *Si f est un endomorphisme trigonalisable et si F est un sous-espace stable par f (c'est à dire $f(F) \subset F$), alors l'endomorphisme induit $f_{|F}$ est trigonalisable.*

Preuve

Il suffit de remarquer que $\chi_{f_{|F}}$ divise le polynôme scindé χ_f donc est scindé.

Remarque 5.

Pratiquement, la trigonalisation, comme la diagonalisation éventuelle, commence par la recherche des valeurs propres et des sous-espaces propres ; dans ceux qui sont de dimension égale à la multiplicité de la valeur propre associées, on choisit une base de vecteurs propres ; dans les autres, une base incomplète de vecteurs propres : on complète ce système par des vecteurs non propres, souvent des vecteurs de la base canonique.

Exemple 16.

Voir TD.

Théorème 12 (Décomposition de Dunford-Jordan)**.** *Soit f un endomorphisme annulant un polynôme scindé. Alors, il existe un unique couple d'endomorphismes (d, n) tel que :*

- $f = d + n$;
- *d et n commutent ;*
- *d est diagonalisable ;*
- *n est nilpotent.*

De plus, les endomorphismes d et n sont des polynômes en f.

Preuve

On pose

$$P(X)=\prod_{i=1}^{m}(X-\lambda_i)^{\alpha_i},$$

d'après le lemme des noyaux :

$$E=\bigoplus_{k=1}^{m} Ker(f-\lambda_k Id_E)^{\alpha_k}.$$

Pour tout $i\in\{1,\ldots,m\}$, on considère la projection p_i définie par :

$$p_i:\ E\longrightarrow Ker(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$$

$$x_1+\ldots+x_m\mapsto x_i.$$

Soit $\mathcal{B}_i$ une base de $Ker(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$, $1\leq i\leq m$. Posons $d=\lambda_1p_1+\ldots+\lambda_m p_m$. Pour $e\in\mathcal{B}_i$, on a $d(e)=\lambda_i e$. Alors, $\mathcal{B}=\bigcup\mathcal{B}_i$ est une base de E formée de vecteurs propres de d, d'où d est diagonalisable.

On a $p_i\in\mathbb{K}[f]$ pour tout i, donc $d\in\mathbb{K}[f]$ et $n=f-d\in\mathbb{K}[f]$. Or $\mathbb{K}[f]$ est un sous-anneau commutatif, alors $n\circ d=d\circ n$.

Montrons que n est nilpotent. Soit $x=x_1+\ldots+x_m$ avec $x_i\in Ker(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$. On a $d(x_i)=\lambda_i x_i$ et $n^{dim(E)}(x_i)=(f-\lambda_i Id_E)^{dim(E)}(x_i)=0$ puisque $dim(E)\geq k_i$ pour tout $i\in\{1,\ldots,m\}$, d'où $n^{dim(E)}(x)=n^{dim(E)}(x_1+\ldots+x_m)=0$.

Soit (d,n) le couple construit précédemment et (d',n') un couple satisfaisant aux conditions de la proposition. Chacun de ces quatre endomorphismes commute avec f donc laisse stable les sous-espaces $Ker(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$ pour $k\leq m$. Notons (d_k,n_k) et (d'_k,n'_k) les endomorphismes induits par ces endomorphismes sur le sous-espace $Ker(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$. Les endomorphismes n_k et n'_k commutent (le premier est un polynôme en f et le second commute avec $f=n'+d'$) et sont tous les deux nilpotents, donc leur différence est nilpotente (d'indice inférieur au égal à la somme de leurs indices). Or, $n_k-n'_k=d'_k-\lambda_k Id_E$ est diagonalisable. Le seul endomorphisme diagonalisable et nilpotent est l'endomorphisme nul ; d'où $d'=\lambda_k Id_E$ et $n_k=n'_k$ et par conséquent $d=d'$ et $n=n'$.

4. Réduction du Jordan

4.1. **Base et matrice de Jordan.**

Définition 12. On appelle matrice (ou bloc) de Jordan une matrice carrée de la forme :

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K}),\ \text{où } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } k \in \mathbb{N}^*.$$

Proposition 15. *Soit $J_k(\lambda)$ un bloc de Jordan d'ordre k, on a :*

- $\chi_J(X) = (-1)^k (X-\lambda)^k$,
- $\mu_J(X) = (X-\lambda)^k$,
- $dim\, E_\lambda = 1$.

Preuve

La vérification est immédiate : il suffit d'effectuer les calculs.

Définition 13. On appelle matrice réduite de Jordan toute matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_r}(\lambda_k) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

où $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et $k_i \in \mathbb{N}^*$ pour $1 \leq i \leq r$, et $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_r$.

Définition 14. Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit jordanisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est une matrice réduite de Jordan. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite jordanisable si, et seulement si, elle est semblable à une matrice réduite de Jordan.

Théorème 13 (de Jordan)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on suppose que χ_f est scindé.*

(1) Supposons d'abord que f n'a qu'une seule valeur propore et que :

$$\chi_f(X) = (-1)^n (X-\lambda)^n,\ \mu_f(X) = (X-\lambda)^\beta,\ dim\, E_\lambda = \gamma$$

il existe alors une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$Mat(f)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & & & 0 \\ & J_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_\gamma(\lambda) \end{pmatrix} = \widetilde{J}(\lambda),$$

où :

- *les $J_k(\lambda)$ sont des blocs de Jordan,*
- *l'ordre du plus grand bloc est β,*
- *le nombre des blocs est γ.*

(2) Si f admet les valeurs propores $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ de multiplicité $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$, c'est à dire si :

$$\chi_f(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X-\lambda_p)^{\alpha_p} \text{ avec } (\lambda_i \neq \lambda_j)$$

alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$Mat(f)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \widetilde{J}_1(\lambda_1) & & & 0 \\ & \widetilde{J}_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \widetilde{J}_\gamma(\lambda_p) \end{pmatrix}.$$

Exemple 17.

Soit $dim\, E = 5$, $\chi_f(X) = -(X-\lambda)^5$, $\mu_f(X) = (X-\lambda)^3$ et $dim\, E_\lambda = 2$, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$Mat(f)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si $dim\, E = 5$, $\chi_f(X) = -(X-\lambda)^5$, $\mu_f(X) = (X-\lambda)^3$ et $dim\, E_\lambda = 3$, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$Mat(f)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Remarque 6.

Une matrice sous la forme de Jordan est diagonalisable si et seulement si elle est déja sous forme diagonale.

En effet, si elle n'est pas diagonale il y a un bloc de Jordan d'ordre $\beta > 1$, ce qui implique que dans le ploynôme minimal il y a au moins un facteur de type $(X-\lambda)^{\beta}$, donc $\mu_f(X)$ n'a pas toutes ses racines simples.

Preuve

Soit $\chi_f(X) = (-1)^n(X-\lambda)^n$. Puisque χ_f est scindé, f est trigonalisable. Il existe donc une base $\mathcal{B}'$ telle que :

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & & & * \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \overset{notation}{=} A.$$

Posons $A = \lambda I + N$ (ou, si l'on veut, $f = \lambda id + u$) avec :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = Mat_{\mathcal{B}'}(u).$$

u est nilpotent. Puisque la matrice λI de λId est la même en toute base, le problème revient à étudier la réduction des endomorphismes nilpotents.

Soit donc u un endomorphisme nilpotent et β son indice de nilpotence. On a $\mu_u(X) = X^{\beta}$. Donc u n'est pas diagonalisable que si $\beta = 1$, c'est à dire $u = 0$. Par la suite on supposera donc que $u \neq 0$.

Lemme 1. *Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence β. Les proporiétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $\beta = n$, c'est à dire le polynôme minimal est égal (au signe près) au polynôme caractéristique :

$$\chi_u(X) = (-1)^n X^n, \ \mu_u(X) = X^n.$$

(2) Il existe un vecteur $x \in E, x \neq 0$, tel que $\{x, u(x), u^2(x), \cdots, u^{n-1}(x)\}$ est une base de E (on dit que u est cyclique).

(3) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

(c'est à dire que u est représentable par un bloc de Jordan).

Preuve

L'équivalence de 2. et 3. est immédiate : $\mathcal{B}$ est justement la base $\{x, u(x), u^2(x), \cdots, u^{n-1}(x)\}$. Si 3. est vérifiée. Puisque $u^{n-1} \neq 0$, il existe $x \in E$, $x \neq 0$, tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$.

Posons :

$$\begin{cases} v_n = x, \\ v_{n-1} = u(x), \\ \cdots \\ v_k = u^{n-k}(x), \\ \cdots \\ v_1 = u^{n-1}(x) \end{cases}$$

On voit facilement que cette famille $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ est libre et donc elle est une base. En effet, soit :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = 0$$

c'est à dire :

$$\lambda_1 u^{n-1}(x) + \lambda_2 u^{n-2}(x) + \cdots + \lambda_{n-1} u(x) + \lambda_n x = 0.$$

En prenant l'image par $u^{n-1}, u^{n-2}, \cdots, u$ on trouve successivement : $\lambda_n = 0, \lambda_{n-1} = 0, \cdots, \lambda_2 = 0$; d'où $\lambda_1 u^{n-1}(x) = 0$, et puisque $u^{n-1}(x) \neq 0, \lambda_1 = 0$. Donc la famille $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ est une base et

$$Mat_{v_i}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Le théorème est ainsi démontré pour $\beta = n$.

Lemme 2. *Soit $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$, où les E_i sont des sous-espaces vectoriels stables par f. Si $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p$ sont des bases de $E_1, \cdots, E_p$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p\}$ de E est :*

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{M_1} & & & 0 \\ & \boxed{M_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{M_p} \end{pmatrix} \text{ où } M_i = Mat_{\mathcal{B}_i}(f|_{E_i}).$$

Preuve

En effet, soit $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \ldots, e_{n_1}\}$, ... $\mathcal{B}_p = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n_p}\}$. Puisque $f(E_i) \subset E_i$, on a :

$$\begin{cases} f(e_1) = a_{11}e_1 + \cdots + a_{1n_1}e_{n_1} \\ \cdots \\ f(e_{n_1}) = a_{n_11}e_1 + \cdots + a_{n_1n_1}e_{n_1}, \end{cases}$$

$$\cdots$$

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1) = b_{11}\varepsilon_1 + \cdots + b_{1n_p}\varepsilon_{n_p} \\ \cdots \\ f(\varepsilon_{n_p}) = b_{n_p1}\varepsilon_1 + \cdots + b_{n_pn_p}\varepsilon_{n_p}, \end{cases}$$

donc

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{M_1} & & & 0 \\ & \boxed{M_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{M_p} \end{pmatrix} \text{ où } M_i = (a_{ij}), \ldots, M_p = (b_{lm}).$$

d'après les lemmes 1 et 2, le problème revient à démontrer que : si u est un endomorphisme nilpotent, E est somme directe de sous-espaces stables par u, tels que la restriction de u à chacun de ces sous-espaces est un endomorphisme cyclique.

La construction de ces sous-espaces stables se fait comme dans le lemme 1 en choisissant certains vecteurs et en prenant leurs itérés par u.

Lemme 3. *En notant $K_p = ker(u^p)$, on la suite d'inclusions strictes :*

$$\{0\} = K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \cdots \subsetneq K_{\beta-1} \subsetneq K_\beta = E.$$

Preuve

En effet, $K_p \subset K_{p+1}$, car $u^p(x) = 0$ implique $u^{p+1}(x) = 0$. D'autre part, s'il existe $p \in \{1, 2, \ldots, \beta - 1\}$ tel que $K_p = K_{p+1}$, on aurait :

$$K_p = K_{p+1} = K_{p+2} = \cdots = K_\beta = E.$$

Donc p serait l'indice de nilpotence, ce qui est exclu, car $p < \beta$.

D'après le lemme 3, pour tout $p \in \{1, \ldots, \beta\}$ il existe un sous-espace vectoriel $M_p \neq \{0\}$ tel que $K_p = K_{p-1} \oplus M_p$. On sait que le suplémentaire de K_{p-1} n'est pas unique, mais tous les supplémentaires ont même dimension. Nous allons choisir les sous-espaces M_p de manière à ce que certains conditions (qui nous permettent de mener à bien la construction) soient satisfaites.

Lemme 4. *Il existe des sous-espaces vectoriels $M_1, M_2, \ldots, M_\beta$ non réduits à $\{0\}$, tels que :*

(1) $K_p = K_{p-1} \oplus M_p$, pour $p = 1, \ldots, \beta$
(2) $u(M_p) \subset M_{p-1}$, pour $p = 2, \ldots, \beta$

Preuve

Par récurrence (descendante) sur p.

- Si $p = \beta$, on choisit pour M_β un supplémentaire quelconque de $K_{\beta-1}$ dans K_β.
- Supposons avoir construit les sous-espaces $M_\beta, M_{\beta-1}, \ldots, M_p$ vérifiant 1) et 2) et montrons que l'on peut construire M_{p-1} vérifiant ces mêmes proprités.

  Remarquons tout d'abord que M_p vérifie :

  – $u(M_p) \subset K_{p-1}$

  – $u(M_p) \cap K_{p-2} = \{0\}$

En effet, soit $x \in M_p$. Puisque $M_p \subset K_p$, on a $u^p(x) = 0$, d'où $u^{p-1}(u(x)) = 0$, c'est à dire $u(x) \in K_{p-1}$, d'où $u(M_p) \subset K_{p-1}$.

Soit $y \in u(M_p) \cap K_{p-2}$: $y = u(x)$ avec $x \in M_p$ et $u^{p-2}(y) = 0$. On aura : $u^{p-1}(x) = 0$, c'est à dire $x \in K_{p-1}$ et par conséquent $x \in M_p \cap K_{p-1} = \{0\}$, d'où $x = 0$ et donc $y = 0$.

Ainsi $u(M_p)$ et K_{p-2} sont en somme directe et $K_{p-2} \oplus u(M_p) \subset K_{p-1}$.

Il s'ensuit qu'il existe un supplémentaire G_{p-1} de $K_{p-2} \oplus u(M_p)$ dans K_{p-1} :

$$K_{p-1} = K_{p-2} \oplus u(M_p) \oplus G_{p-1},$$

On pose alors :

$$M_{p-1} = u(M_p) \oplus G_{p-1}.$$

M_{p-1} vérifie 1) et 2).

Lemme 5.

$$E = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_\beta.$$

Preuve

En effet :

$$E = K_\beta = K_{\beta-1} \oplus M_\beta = K_{\beta-2} \oplus M_{\beta-1} \oplus M_\beta = K_{\beta-3} \oplus K_{\beta-2} \oplus M_{\beta-1} \oplus M_\beta$$
$$\cdots$$
$$= M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus \cdots \oplus M_\beta.$$

Nous allons maintenant construire une base de E en choisissant, par un procédé itératif, une base sur chaque espace M_i : cela permet de mettre en évidence les sous-espaces stables sur lesquels u est cyclique.

Remarquons tout d'abord que $u(M_p) \subset M_{p-1}$ et que l'on a :

Lemme 6. *L'image par u d'une base de M_p est une famille libre de M_{p-1} (pour $p \geq 2$).*

Preuve

En effet, soit $\{v_1, \ldots, v_r\}$ une base de M_p et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, tels que :

$$\lambda_1 u(v_1) + \ldots + \lambda_r u(v_r) = 0$$

on a $u(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r) = 0$, donc :

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r \in ker(u) = K_1 \subset K_{p-1}.$$

Ainsi $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r \in M_p \cap K_{p-1} = \{0\}$ et, puisque $v_1, \ldots, v_r$ sont indépendants, on a :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0.$$

Venons maintenant à la construction de la base de E :

- Dans M_β (que nous allons noter G_β), on prend une base quelconque.
- $M_{p-1} = u(M_p) \oplus G_{p-1}$ on prend l'image par u de la base construite sur M_p et on complète par une base quelconque de G_{p-1}.

On a ainsi les bases $\mathcal{B}_\beta, \mathcal{B}_{\beta-1}, \ldots, \mathcal{B}_1$ de $M_\beta, M_{\beta-1}, \ldots, M_1$:

$\mathcal{B}_\beta = \{\underbrace{v_1, \ldots, v_{n_\beta}}_{G_\beta}\}$

$\mathcal{B}_{\beta-1} = \{u(v_1), \ldots, u(v_{n_\beta}), \underbrace{w_1, \ldots, w_{n_{\beta-1}}}_{G_{\beta-1}}\}$

$$\mathcal{B}_{\beta-2} = \{u^2(v_1), \dots, u^2(v_{n_\beta}), u(w_1), \dots, u(w_{n_{\beta-1}}), \underbrace{z_1, \dots, z_{n_{\beta-2}}}_{G_{\beta-2}}\}$$

$\dots$

$$\mathcal{B}_1 = \{u^{\beta-1}(v_1), \dots, u^{\beta-1}(v_{n_\beta}), u^{\beta-2}(w_1), \dots, u^{\beta-2}(w_{n_{\beta-1}}), \dots, \underbrace{u(y_1), \dots, u(y_{n_2})}_{u(G_2)}, \underbrace{x_1, \dots, x_{n_1}}_{G_1}\}$$

Introduisons la notation suivante : pour $k = \beta, \beta - 1, \dots, 2, 1$ et $x \in G_k$, soit :

$$I_k(x) = Vect\{x, u(x), u^2(x), \dots, u^{k-1}(x)\}$$

Ainsi, par exemple :

$$I_\beta(v_1) = Vect\{v_1, u(v_1), u^2(v_1), \dots, u^{\beta-1}(v_1)\}$$

$$I_{\beta-1}(w_1) = Vect\{w_1, u(w_1), u^2(w_1), \dots, u^{\beta-2}(w_1)\}$$

Lemme 7. *On a :*

- $dim(I_k(x)) = k$,
- $I_k(x)$ *est stable par* u.
- *La restriction de* u *à* $I_k(x)$ *est cyclique.*

Preuve

La démonstration de ce lemme est une simple vérification.

Il est clair que E est somme directe de

$$I_\beta(v_1), \dots, I_\beta(v_{n_\beta}), I_{\beta-1}(w_1), \dots, I_{\beta-1}(w_{n_{\beta-1}}), \dots, I_1(x_1), \dots, I_1(x_{n_1})$$

d'où il suit immédiatement la partie 1 du théorème.

La partie 2 vient du fait que E est somme directe de sous-espaces caractéristiques et sur chaque espace caractéristique on applique la partie 1 du théorème.

Calcul des dimensions des blocs de Jordan :

Dans l'énoncé du théorème on a donné des indications sur la dimension des blocs de Jordan, qui sont suffisantes, en général, pour déterminer la forme de Jordan lorsque la dimension de E n'est pas trop grande. En fait, en analysant la démonstration, on voit que l'on peut calculer explicitement à l'aide de f le nombre des blocs de Jordan de taille donnée qui apparaissent dans la réduction.

Proposition 16. *Soit*

- $n_p(\lambda) :=$ *nombre de blocs de Jordan d'ordre* p *pour la valeur propore* λ;
- $K_p(\lambda) := Ker(f - \lambda Id_E)^p$.

On a alors :

$$n_p(\lambda) = 2dim(K_p(\lambda)) - dim(K_{p-1}(\lambda)) - dim(K_{p+1}(\lambda)).$$

Preuve

En effet, comme dans la démonstration du théorème, on peut se limiter à démontrer cela pour un endomorphisme nilpotent. Dans ce cas, $n_p(0) = dim(G_p)$.

Or $K_p = K_{p-1} \oplus M_p$, $M_p = u(M_{p+1}) \oplus G_p$ et $u\mid_{M_{p+1}}$ est injective. Ainsi :

$$dim(G_p) = dim(M_p) - dim(M_{p+1}),$$

et

$$dim(M_p) = dim(K_p) - dim(K_{p-1}),$$

d'où la formule.

Corollaire 6. *Pour toute matrice carrée A à coefficients dans $\mathbb{C}$, il existe une matrice réduite de Jordan J et une matrice inversible P, telles que $J = P^{-1}AP$.*

4.2. **Techniques pratiques de jordanisation en petites dimensions.** Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme de E. On suppose que le polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$, et que :

$$\chi_f(X) = (-1)^n(X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_p)^{\alpha_p},$$

où $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont les racines deux à deux distinctes de χ_f de multiplicité $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$. On désigne par $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Cas de n=2 :

Dans ce cas on a :

$$\chi_f(X) = (X - \lambda)^2 \, ou \, \chi_f(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \, (\lambda_1 \neq \lambda_2).$$

- Si $\chi_f(X) = (X - \lambda)^2$, alors il existe $x_0 \in E$ tel que $(f - \lambda Id_E)^2(x_0) = 0$. On pose $v_1 = (f - \lambda Id_E)(x_0)$ et $v_2 = x_0$, alors $\{v_1, v_2\}$ et une base de Jordan de f dans laquelle, f est représenté sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- Si $\chi_f(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors f est diagonalisable.

Cas de n=3 :

Dans ce cas on a :

$$\chi_f(X) = (X - \lambda)^3, \chi_f(X) = (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2) \, et \, \chi_f(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3).$$

- Si $\chi_f(X) = (X-\lambda)^3$, on commence par déterminer le sous-espace propre E_λ associé à λ, alors deux cas sont possibles :
  - Si $dim(E_\lambda) = 1$, alors $(f-\lambda Id_E)^2 \neq 0$, donc on peut choisir x_0, tel que $(f-\lambda Id_E)^2(x_0) \neq 0$. On pose $v_1 = (f-\lambda Id_E)^2(x_0)$, $v_2 = (f-\lambda Id_E)(x_0)$ et $v_3 = x_0$, alors $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de Jordan, dans laquelle f est représenté sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

  - Si $dim(E_\lambda) = 2$, alors $(f-\lambda Id_E)^2 = 0$, on peut choisir x_0, tel que $(f-\lambda Id_E)(x_0) \neq 0$, et on choisit $y \in E_\lambda$ tels que $\{(f-\lambda Id_E)(x_0), y\}$ soit une base de E_λ. On pose $v_1 = (f-\lambda Id_E)(x_0)$, $v_2 = x_0$ et $v_3 = y$, alors $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de Jordan, dans laquelle f est représenté sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- Si $\chi_f(X) = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors on commence par déterminer les sous-espaces propres E_{λ_1} et E_{λ_2}. Deux cas sont donc possibles :
  - Si $dim(E_{\lambda_1}) = 2$, alors f est diagonalisable.
  - Si $dim(E_{\lambda_1}) = 1$, alors f n'est pas diagonalisable, on choisit x_0, tel que $(f-\lambda_1 Id_E)^2(x_0) = 0$, et $(f-\lambda_1 Id_E)(x_0) \neq 0$. On pose $v_1 = (f-\lambda_1 Id_E)(x_0)$, $v_2 = x_0$ et on choisit un vecteur non nul v_3 de E_{λ_2}. Alors $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de Jordan, dans laquelle f est représenté sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

- Si $\chi_f(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ alors f est diagonalisable.

Cas de n=4 :

Dans ce cas on a :

$\chi_f(X) = (X-\lambda)^4$,

$\chi_f(X) = (X-\lambda_1)^3(X-\lambda_2)$,

$\chi_f(X) = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)^2$,
$\chi_f(X) = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$,
$\chi_f(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)(X-\lambda_4)$.

- Si $\chi_f(X) = (X-\lambda)^4$, on commence par chercher le sous-espace propre E_λ , alors trois cas sont possibles :
  - Si $dim(E_\lambda) = 1$, alors $(f-\lambda Id_E)^3 \neq 0$, on choisit x_0 tel que $(f-\lambda Id_E)^3(x_0) \neq 0$. On pose $v_1 = (f-\lambda Id_E)^3(x_0)$, $v_2 = (f-\lambda Id_E)^2(x_0)$, $v_3 = (f-\lambda Id_E)(x_0)$ et $v_4 = x_0$, alors $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de Jordan, dans laquelle f est représenté sous la forme :
$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$
  - Si $dim(E_\lambda) = 2$, alors $(f-\lambda Id_E)^3 = 0$, et deux cas sont possibles :
    * Si $(f-\lambda Id_E)^2 = 0$, on choisit deux vecteurs x_0 et y_0, tels que le système $\{x_0, y_0\}$ soit libre, $(f-\lambda Id_E)(x_0) \neq 0$ et $(f-\lambda Id_E)(y_0) \neq 0$, puis on pose $v_1 = (f-\lambda Id_E)(x_0)$, $v_2 = x_0$, $v_3 = (f-\lambda Id_E)(y_0)$ et $v_4 = y_0$. Ainsi $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de Jordan, dans laquelle f est représenté sous la forme :
$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$
    * Si $(f-\lambda Id_E)^2 \neq 0$, on choisit x_0 tel que $(f-\lambda Id_E)^2(x_0) \neq 0$ et on choisit $y \in E_\lambda$, tel que $\{(f-\lambda Id_E)^2(x_0), y\}$ soit une base de E_λ, puis on pose $v_1 = (f-\lambda Id_E)^2(x_0)$, $v_2 = (f-\lambda Id_E)(x_0)$, $v_3 = x_0$ et $v_4 = y$. Ainsi $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de Jordan, dans laquelle f est représenté sous la forme :
$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

– Si $dim(E_\lambda) = 3$, alors $(f - \lambda Id_E)^2 = 0$, on choisit x_0 tel que $(f - \lambda Id_E)(x_0) \neq 0$, et on choisit deux vecteurs y et z dans E_λ tels que $\{(f - \lambda Id_E)(x_0), y, z\}$ soit une base E_λ. On pose $v_1 = (f - \lambda Id_E)(x_0)$, $v_2 = x_0$, $v_3 = y$ et $v_4 = z$, alors $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de Jordan, dans laquelle f est représenté sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- Si $\chi_f(X) = (X - \lambda_1)^3(X - \lambda_2)$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. on commence par chercher le sous-espace propre E_{λ_1} , alors trois cas sont possibles :
  – Si $dim(E_{\lambda_1}) = 3$, alors f est diagonalisable.
  – Si $dim(E_{\lambda_1}) = 2$, on choisit x_0 tel que, $(f - \lambda_1 Id_E)^2(x_0) = 0$ et $(f - \lambda_1 Id_E)(x_0) \neq 0$. On choisit aussi $y \in E_{\lambda_1}$, tel que $\{(f - \lambda_1 Id_E)(x_0), y\}$ soit une base de E_{λ_1}, puis on pose $v_1 = (f - \lambda_1 Id_E)(x_0)$, $v_2 = x_0$, $v_3 = y$ et $v_4 \in E_{\lambda_2}$, $v_4 \neq 0$. Alors $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de Jordan, dans laquelle f est représenté sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

  – Si $dim(E_{\lambda_1}) = 1$, on choisit x_0 tel que, $(f - \lambda_1 Id_E)^3(x_0) = 0$ et $(f - \lambda_1 Id_E)^2(x_0) \neq 0$. En posant $v_1 = (f - \lambda_1 Id_E)^2(x_0)$, $v_2 = (f - \lambda_1 Id_E)(x_0)$, $v_3 = x_0$ et $v_4 \in E_{\lambda_2}$, $v_4 \neq 0$. Alors $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de Jordan, dans laquelle f est représenté sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

- Si $\chi_f(X) = (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2)^2$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. On cherche les sous-espaces propres E_{λ_1} et E_{λ_2} , alors trois cas sont possibles :
  – $dim(E_{\lambda_1}) = dim(E_{\lambda_2}) = 2$, alors f est diagonalisable.
  – $dim(E_{\lambda_1}) = 1$ et $dim(E_{\lambda_2}) = 2$. On choisit x_0 tel que, $(f - \lambda_1 Id_E)^2(x_0) = 0$ et $(f - \lambda_1 Id_E)(x_0) \neq 0$. Aussi, on choisit une base $\{v_3, v_4\}$ de E_{λ_2}, puis, en

posant $v_1 = (f - \lambda_1 Id_E)(x_0)$ et $v_2 = x_0$, on obtient $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ une base de Jordan, dans laquelle f est représenté sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

– $dim(E_{\lambda_1}) = dim(E_{\lambda_2}) = 1$. On choisit x_0 tel que, $(f - \lambda_1 Id_E)^2(x_0) = 0$ et $(f - \lambda_1 Id_E)(x_0) \neq 0$. Aussi, on choisit y_0 tel que, $(f - \lambda_2 Id_E)^2(y_0) = 0$ et $(f - \lambda_2 Id_E)(y_0) \neq 0$. En posant $v_1 = (f - \lambda_1 Id_E)(x_0)$, $v_2 = x_0$, $v_3 = (f - \lambda_2 Id_E)(y_0)$ et $v_4 = y_0$, on obtient $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ une base de Jordan, dans laquelle f est représenté sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

- Si $\chi_f(X) = (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. On cherche les sous-espaces propres E_{λ_1}, E_{λ_2} et E_{λ_3} , alors deux cas sont possibles :
  – $dim(E_{\lambda_1}) = 2$, alors f est diagonalisable.
  – $dim(E_{\lambda_1}) = 1$. On choisit un vecteur x_0 tel que, $(f - \lambda_1 Id_E)^2(x_0) = 0$ et $(f - \lambda_1 Id_E)(x_0) \neq 0$. Aussi, on choisit deux vecteurs non nuls v_3 de E_{λ_2} et v_4 de E_{λ_3}, puis, on pose $v_1 = (f - \lambda_1 Id_E)(x_0)$ et $v_2 = x_0$, on obtient $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ une base de Jordan, dans laquelle f est représenté sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

- Si $\chi_f(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)(X - \lambda_4)$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4$. Dans ce cas f est diagonalisable.

Exemple 18.

On considère f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice relativement à la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

On a :

$$\chi_A(X) = (X-2)^3(X-1).$$

$\lambda_1 = 1$ est une valeur propre simple, tandis que $\lambda_2 = 2$ est une valeur propre de multiplicité 3. On détermine les sous-espaces propres E_{λ_1} et E_{λ_2} associés aux valeurs propre 1 et 2.

Pour E_{λ_1}, On commence par chercher $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in Ker(A-I)$; un tel v_1 vérifie $(A-I)v_1 = 0$ et donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 0.x = 0 \\ -2t - x - 3y + z = 0 \\ -t + 2x + y + z = 0 \\ -t + x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

On a donc $E_{\lambda_1} = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$, d'où $dim(E_{\lambda_1}) = 1$.

Pour E_{λ_2}, On commence par chercher $w_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in Ker(A-2I)$; un tel w_1 vérifie $(A-2I)w_1 = 0$ et donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \quad - \quad x \qquad\qquad = 0 \\ -2t - \quad x + 2y + z = 0 \\ \;\; -t + 2x + \;\; y \qquad = 0 \\ -2t + \quad x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

On a donc $E_{\lambda_2} = Vect \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, d'où $dim(E_{\lambda_2}) = 1$.

Or $dim(E_{\lambda_2}) = 1 \neq m(2) = 3$, l'endomorphisme associé à A n'est pas diagonalisable. $\chi_f(X)$ est scindé, alors la matrice A trigonalisable, mieux encore, elle est jordanisable. Dans ce cas, la formule à l'origine de ce fait est :

$$\mathbb{R}^4 = Ker(f - Id) \oplus Ker(f - 2Id)^3.$$

On sait que :

$$Ker(f - 2Id) \subsetneq Ker(f - 2Id)^2 \subsetneq Ker(f - 2Id)^3.$$

Cherchons une famille libre de $Ker(f-2Id)^3$ qui est de dimension 3, or $w_1 \in Ker(f-2Id) \subsetneq Ker(f-2Id)^3$, on a déja un vecteur dans la base, on va compléter avec les deux vecteurs restants. Le Deuxième vecteur w_2 on va le chercher dans $Ker(f - 2Id)^2 \subsetneq Ker(f - 2Id)^3$. Il vérifie $(f - 2Id)^2(w_2) = 0$, (et $(f - 2Id)^3(w_2) \neq 0$,) c'est à dire $(f - 2Id)((f - 2Id)(w_2)) = 0$. Il suffit donc de prendre $(f - 2Id)(w_2) = w_1$ (car $(f - 2Id)(w_1) = 0$). Notons encore $w_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in Ker(A - 2I)^2$. On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} \quad - \quad x \qquad\qquad = 0 \\ -2t - \quad x + 2y + z = 1 \\ \;\; -t + 2x + \;\; y \qquad = 0 \\ -2t + \quad x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

On prend $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Reste le troisième vecteur w_3 que l'on va chercher dans $Ker(f - 2Id)^3$. On a donc $(f - 2Id)^2[(f - 2Id)(w_3)] = 0$; donc $(f - 2Id)(w_3) \in Ker(f - 2Id)^2$; or on sait que $w_2 \in Ker(f - 2Id)^2$, il suffit donc de résoudre $(f - 2Id)(w_3) = w_2$ et donc

$$\begin{cases} \quad - \ x \qquad\qquad = 0 \\ -2t - \ x + 2y + z = 2 \\ -t + 2x + \ y \qquad = 1 \\ -2t + \ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

ce qui permet de prendre $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La famille $\{v_1, w_1, w_2, w_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Remarquons qu'on a :

$$(f - 2Id)(w_2) = w_1 \Rightarrow Aw_2 = 2w_2 + w_1 \, et \, (A - 2I)w_3 = w_2 \Rightarrow Aw_3 = w_2 + 2w_3,$$

nous avons aussi $Av_1 = v_1$ et $Aw_1 = 2w_1$. Alors,

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice J est une matrice réduite de Jordan. $\{v_1, w_1, w_2, w_3\}$ est la seule base permettant d'avoir une telle structure. On aurait pu prendre par exemple d'autre vecteurs pour compéter la base (2 vecteurs de la base canonique, par exemple) : on aurait eu une matrice triangulaire supérieure mais ayant une structure (banale) pleine. Inutile pour des calculs de puissance, ou pour résoudre des équations différentielles.

5. Applications

5.1. **Calcul de la puissance d'une matrice.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, supposons que la matrice A est diagonalisable, il existe alors une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que : $D = P^{-1}AP$, c'est-à-dire $A = PDP^{-1}$. Donc :

$$A^k = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})}_{k\,fois} = PD^kP^{-1}.$$

D'autre part, si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ on a $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$, et donc A^k se calcule facilement par la formule :

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Exemple 19.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, donc $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$. Alors, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Pour les valeurs propres 2 et 3 on trouve :

- E_2 est définie par $-x - y = 0$ donc $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- E_3 est définie par $-2x - y = 0$ donc $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. En effectuant les calculs, on obtient :

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^{k+1} - 3^k & 2^k - 3^k \\ -2^{k+1} + 2.3^k & -2^k + 2.3^k \end{pmatrix}.$$

5.2. **Résolution d'un système de suites récurrentes.**

Exemple 20.

Illustrons cela sur un exemple. Il s'agit de déterminer deux suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$(1) \quad \begin{cases} U_{n+1} = U_n - V_n \\ V_{n+1} = 2U_n + 4V_n \end{cases} \text{et telles que } \begin{cases} U_0 = 2 \\ V_0 = 1 \end{cases}.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$. Le système (1) s'écrit :

$$X_{n+1} = AX_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

d'où, par récurrence :

$$X_n = A^n X_0 \text{ avec } X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On est ainsi ramené au calcul de A^n. Dans notre cas, compte tenu du résultat ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.2^n - 3^{n+1} \\ -5.2^n + 2.3^{n+1} \end{pmatrix},$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} U_n = 5.2^n - 3^{n+1} \\ V_n = -5.2^n + 2.3^{n+1} \end{cases}.$$

5.3. **Système différentiel linéaire à coefficients constants.** Soit à résoudre de système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} & = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \quad \vdots & \\ \frac{dx_n}{dt} & = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad \text{avec } a_{ii} \in \mathbb{R}, x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dérivables.}$$

Ce système s'écrit sous forme matricielle comme suite :

$$\frac{dX}{dt} = AX, \text{ où } A = (a_{ii}) \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Supposons que A est diagonalisable, il existe alors, une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que : $D = P^{-1}AP$. Si A est la matrice d'un endomorphisme f dans la base canonique $\mathcal{B}$, D sa matrice dans la base des vecteurs propores $\mathcal{B}'$, X est la matrice d'un vecteur x dans $\mathcal{B}$ et X' sa matrice dans $\mathcal{B}'$, alors on a : $X' = P^{-1}X$.

En dérivant cette relation, on obtient :

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}\frac{dX}{dt} = P^{-1}AX = P^{-1}APX' = DX'.$$

Ce système s'intègre facilement, car D est diagonale.

Ainsi, on peut résoudre le système $\frac{dX}{dt} = AX$ de la manière suivante :

- On diagonalise A si $D = P^{-1}AP$ est diagonale semblable à A.

- On intègre le système $\frac{dX'}{dt} = DX'$.
- On revient à X par $X = PX'$.

Exemple 21.

Soit le système suivant :
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 4y \end{cases}.$$

On a :
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
Le système $\frac{dX'}{dt} = DX'$ s'écrit :
$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt} = 2x' \\ \frac{dy'}{dt} = 3y' \end{cases},$$

ce qui donne immédiatement :
$$\begin{cases} x' = c_1 e^{2t} \\ y' = c_2 e^{3t} \end{cases},$$

et donc, en revenant à X par $X = PX'$:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \\ -c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{3t} \end{pmatrix},$$

c'est à dire :
$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \\ y = -c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{3t} \end{cases}.$$

Remarque 7.

Pour d'autres applications de la trigonalisation et la jordanisation veuillez voir les exercices de TD.

Références

[1] Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre,* Ellipse (1996).

[2] Roger Mansuy, *Réduction des endomorphismes,* Vuibert (2012).