TD d'Algèbre 4

Série 1: Endomorphismes.

Exercice 1.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension finie n, et soit u un endornorphismes de E tel que : $u^3 + u = 0$.

1) Montrer que l'espace $Im(u)$ est stable par u et calculer $u^2(x)$ pour $x \in Im(u)$.

2) Soit v l'endomorphisme induit par u sur $Im(u)$. Montrer que v est un isomorphisme.

Exercice 2.
Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que f et g commutent, montrer que $Im(f)$ et $ker(f)$ sont stables par g. Que peut-on dire de la réciproque ?

Exercice 3.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et soient f et g des endomorphismes de E tels que :

$$f \circ g - g \circ f = Id_E \, (*)$$

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $f \circ g^k - g^k \circ f = kg^{k-1}$.

2) Pour tout polynôme $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ de $\mathbb{K}[X]$, on pose :

$$P(g) = a_n g^n + \ldots + a_1 g + a_0 Id_E.$$

a) Montrer que l'application u, de $\mathbb{K}[X]$ vers $\mathcal{L}(E)$, qui à tout polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ associe l'endomorphisme $u_P = f \circ P(g) - P(g) \circ f$, est linéaire.

b) En déduire que pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, on a $u_P = P'(g)$ où $P'(X)$ désigne le polynôme dérivé de $P(X)$.

3) On suppose maintenant que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension finie n, $n \geq 1$.

a) Montrer que la famille $(Id_E, g, g^2, \ldots, g^{n^2})$ est liée.

b) En déduire qu'il existe un polynôme $A(X) \in \mathbb{K}[X]$, non nul, tel que $A(g) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

c) En utilisant les résultats ci-dessus, montrer que si E est de dimension finie n, $n \geq 1$, il n'existe pas de couple (f, g) d'endomorphismes de E vérifiant la relation $(*)$.

Exercice 4.
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension finie n, et u un endomorphisme de E que l'on suppose nilpotent (i.e. il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = \underbrace{u \circ u \circ \ldots \circ u}_{k fois} = 0_{\mathcal{L}(E)}$).

1) Montrer que $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2) On pose $v = Id_E + 2u + 3u^2 + \ldots + nu^{n-1}$. Montrer que v est un automorphisme de E et exprimer v^{-1} en fonction de u.

3) Soient f et g des endomorphismes de E tels que $(f \circ g)^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $(g \circ f)^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 5.
Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$. On suppose que E est le seul sous-espace vectoriel non nul stable par u.

1) L'endomorphisme u possède-t-il des valeurs propres ?

2) Montrer que pour tout $x \in E \backslash \{0_E\}$, la famille $\{x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\}$ est une base de E. Quelle est la forme de la matrice de u dans cette base ?

3) Montrer que cette matrice ne dépend pas du choix de x.