Université Mohamed Premier
Faculté Pluridisciplinaire -Nador
Département de Mathématiques

Feuille de TD 1 – Suites réelles

Exercice 1 -Suites auxiliaires.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 & = & 1+\sqrt{2} \\ u_{n+1} & = & 1+\sqrt{u_n^2-2u_n+4} \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Justifier que $\forall n > 1, u_n \geq 1$.
3. On pose $v_n = (u_n - 1)^2$
   (a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.
   (b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 2 -Suites auxiliaires.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

1. Donner la suite auxiliaire (v_n) permettant l'étude de la suite (u_n).
2. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 3 -Limites des suites explicites.

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}, \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n+2}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{3n-2\sin\frac{1}{n}}{4n+\sin\frac{1}{n}},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \tan\left(\frac{\pi n+1}{3n+4}\right), \quad \lim_{n\to+\infty} \arctan\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}; \ (\forall n \geq 1).$$

Exercice 4 -Suites récurrentes.

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+2}$

1. Etudier les variations de f et déterminer $f([0,2])$.
2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,2]$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.
   (c) Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 5 -Suites récurrentes.

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que $f(0)=0$, $f(1)=1$ et

$$\forall x \in]0,1[,\ f(x) < x.$$

1. On définit par récurrence une suite $(u_n)_{n\geq 0}$:

$$\begin{cases} u_0 \in [0,1[\\ \forall n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et donner sa limite.

2. On définit par récurrence une suite $(v_n)_{n\geq 0}$:

$$\begin{cases} v_0 = 1/2 \\ \forall n \geq 0,\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2-\sqrt{v_n}}. \end{cases}$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge et donner sa limite.

Exercice 6 -Suites adjacentes.

Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a, \quad v_0 = b, \quad 0 < a < b < 2a \\ u_n v_n = ab, \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < v_n$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante.
3. (a) Montrer $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - u_{n+1} < \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$.
   (b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.
   (c) Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
4. Déterminer les limites des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.