TD d'Algèbre 4

Série 2: Diagonalisation & trigonalisation.

Exercice 1.
Soient $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que la matrice AB est diagonalisable. Montrer que la matrice BA est diagonalisable.

Exercice 2.
Soient a_1 et a_2 deux réels tels que $(a_1,a_2) \neq (0,0)$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le polynôme caractéristique de A.

2) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $a_1a_2 > 0$.

3) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si $a_1a_2 \neq 0$.

Exercice 3.
Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que 2 soit valeur propore de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 3 \end{pmatrix}$. Montrer alors que A est diagonalisable et déterminer ses éléments propores.

Exercice 4.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Donner le polynôme caractéristique de A et ses valeurs propores.

2) Déterminer les sous-espaces propores de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

3) Déterminer v_1, v_2, v_3 tels que $Av_1 = v_1$, $Av_2 = 3v_2$, et $Av_3 = v_2 + 3v_3$.

4) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (v_1, v_2, v_3).

Exercice 5.
Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & ab & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & cd \\ 0 & 0 & 1 & d \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 6.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que $(f + Id_E)^3 \circ (f - 2Id_E) = 0$ et $(f + Id_E)^3 \circ (f - 2Id_E) \neq 0$. L'endomorphisme f est-il trigonalisable ? Est-il diagonalisable ?

Exercice 7.
Calculer A^n pour :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$