Filière : SMPC
Module : Analyse 1
Année Universitaire : 2022–2023

Université Mohamed Premier
Faculté Pluridisciplinaire -Nador
Département de Mathématiques

Feuille de TD 3

Exercice 1 -Prolongement par continuité.

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. On note $\tilde{f}$ la fonction prolongée. Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais $\tilde{f}'$ n'est pas continue en 0.

Exercice 2 -Fonction dérivable.

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $\begin{cases} f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} g(x) = \dfrac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ g(1) = 1 \end{cases}$

Exercice 3 -Fonction dérivable.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $x = 0$.
2. Étudier l'existence de $f''(0)$.
3. On veut montrer que pour $x < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}}$ où P_n est un polynône.
   (a) Trouver P_1 et P_2.
   (b) Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P_n' pour $n \geq 1$.

Exercice 4 -Théorème des accroissements finis (TAF).

1. En appliquant le théorème des accroissements finis a $f(x) = \ln(x)$ sur $[n, n+1]$ où $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que
$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$
2. Montrer que pour tout x, y réels, on a $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$

Exercice 5 -Théorème de Rolle.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. En utilisant le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $x \in |0, 1|$ tel que
$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$

Exercice 6 -Fonction convexe.

Soit $g(x) = \ln(\ln(x))$

1. Donner D_g.
2. Montrer que g est concave sur D_g.
3. En déduire l'inégalité suivante :
$$\forall a > b > 1; \quad \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) > \sqrt{\ln a \ln b}.$$

Exercice 7 -Fonction monotone.

1. On considère la fonction définie sur l'intervalle $I =]-1, 1[$ par
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \arcsin\left(x^2\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
   (a) Étudier la continuité de f sur I.
   (b) Étudier la dérivabilité de f sur I et calculer sa dérivée.
2. Vérifier que $\arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$ pout tout $x \in [-1, 1]$.

Exercice 8 -Développement limité (DL).

1. Donner le DL_0^6 de $f(x) = \cos x \sin 4x$.
2. Donner le DL_0^4 de $g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$.
3. Donner le DL_0^4 de $h(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.
4. Donner le DL_0^3 de $k(x) = (\cos x)^{\sin x}$.
5. Donner le DL_0^4 de $\ell(x) = \cos x \ln(1+x)$.
6. Donner le DL_0^5 de $q(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.
7. Donner le DL_0^3 de $\sqrt{1 + \sin x}$ et DL_0^4 de $e^{\sin x}$.
8. Donner le DL_0^3 de $\dfrac{1}{1+e^x}$.