Université Mohamed Premier
Faculté Pluridisciplinaire -Nador
Département de Mathématiques

Feuille de TD 4 -Supplémentaire-

Exercice 1 Suite de Cauchy.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.
3. En déduire que (u_n) n'est pas une suite de Cauchy.
4. En déduire que (u_n) tend vers $+\infty$

Exercice 2 Suite de Cauchy.

Soit (u_n) une suite positive, décroissante, et tendant vers 0. On pose :

$$v_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_n$$

1. Soient p et k deux entiers. Montrer que $0 \leq u_p - u_{p+1} + u_{p+2} - \cdots + (-1)^k u_{p+k} \leq u_p$.
2. En déduire que (v_n) est une suite de Cauchy, et conclure sur la convergence de (v_n).

Exercice 3 Calcule des limites en utilisant le développement limité.

1. Donner un équivalent simple de $\sin(x) - x$ en 0. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$.
2. Donner un équivalent simple de $\frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos(x)}$ en 0. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos(x)}$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x\left(\ln(1+x) + 1 - c^x\right)}{\sin(x) - x}$$

En utilisant des développements limités, montrer que la fonction f admet, un prolongement par continuité en $x = 0$ et donner ce prolongement.

Exercice 5

Soit $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$, on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

1. Déterminer le développement limité au voisinage de l'infini à l'ordre 2 de la fonction g
2. En déduire l'équation réduite de l'asymptote (Δ) à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.
3. Préciser la position de la courbe (C_f) par rapporl à l'asymptote (Δ).