Université Mohammed Premier
Faculté Pluridisciplinaire de Nador
Département de Mathématiques

Filières SMA
Semestre S3
Année universitaire: 2021-2022

TD d'Analyse 4

Série 5: Séries de Fourier

Exercice 1.
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi,\pi]$ par $f(x)=x^2$.

1) Déterminer la série de Fourier de f.

2) En déduire les sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2};\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2};\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 2.

1) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction impaire 2π-périodique définie sur $]0,\pi]$ par $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$.

a) Tracer la courbe de f sur $]-2\pi,2\pi]$.

b) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

c) En déduire la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}.$$

2) Soit g la fonction 2π-périodique définie sur $[0,\pi]$ par :

$$g(x)=\begin{cases} xf(1), & \text{si } x\in[0,1]\\ f(x), & \text{si } x\in[1,\pi]\end{cases}$$

a) Tracer la courbe de g sur $]-2\pi,2\pi]$.

b) Déterminer la série de Fourier de g.

c) En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2=\frac{\pi-1}{2}.$$

Exercice 3.
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[0,2\pi]$ par $f(x)=\cosh(x-\pi)$.

1) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

2) Montrer que cette série de Fourier converge vers f.

3) En déduire les sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2};\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

4) La série de Fourier de f converge-t-elle uniformément vers f ? Justifier votre réponse.

Exercice 4.
Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction périodique de période 4 définie sur $]-2,2]$ par

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ x, & \text{si } \quad 0 \leq x < 2. \end{cases}$$

1) Tracer la courbe de h sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de h.

3) Montrer que cette série de Fourier converge vers h.

4) En déduire les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Exercice 5.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = |\cos x|$

1) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

2) En déduire la valeur

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}.$$

Exercice 6.
Développer en série de Fourier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \max(\sin(x),0).$$

Exercice 7.

1) Déterminer la série de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x - E(x),$$

où $E(\centerdot)$ désigne la partie entière de x.

2) Cette série de Fourier converge-t-elle vers la fonction f ? Justifier votre réponse.