Université Mohammed Premier
Faculté Pluridisciplinaire de Nador
Département de Mathématiques

Filières SMA
Semestre S3
Année universitaire: 2021-2022

TD d'Analyse 4
Série 3: Séries de fonctions

Exercice 1.
On considère la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 0} \frac{e^{-\sqrt{n}x}}{\sqrt{n^3}+1}$$

1) Montrer que cette série est convergente pour $x \geq 0$ et divergente pour $x < 0$.

2) Montrer que sa somme est une fonction continue si $x \geq 0$ et dérivable si $x > 0$.

Exercice 2.
Montrer que la série de fonctions de terme général

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n+x}, \quad n \geq 1.$$

est uniformément convergente sur [0,1], mais qu'elle n'est pas absolument convergente.

Exercice 3.
1) Montrer que la série de fonctions de terme général

$$h_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2+n}, \quad n \geq 1,$$

converge pour tout x de $\mathbb{R}$.

2) Donner une majoration du reste d'ordre n de cette série.

3) Montrer qu'elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$ mais qu'il n'existe aucune partie de $\mathbb{R}$ où la convergence est normale.

Exercice 4.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des séries de fonctions

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x}{1+n^\alpha x^2}$, $(\alpha > 0)$ sur $\mathbb{R}$.

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ sur $[-1,1]$.

Exercice 5.
Soit la série de fonctions

$$g(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g.

2) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_g.

Exercice 6.
Soit la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 0} ne^{-nx}.$$

1) Montrer que cette série converge uniformément sur $I_a = [a, +\infty[$, $a > 0$. Soit $f(x)$ sa somme.

2) Calculer $\int_a^b f(x)dx$ pour $0 < a < b$.

3) En déduire la valeur de $f(x)$.

Exercice 7.
Soit la série de fonctions de terme général

$$u_n(x) = \begin{cases} x^{n+1}\ln(x), & x \in]0,1] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

1) Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n(x)$.

2) Peut-on avoir la convergence unifome pour la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$?

Exercice 8.
On considère la série de fonctions de terme général

$$u_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Soit $f(x)$ sa somme.

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I_a = [a, +\infty[$.

3) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$?