Université Mohammed Premier
Faculté Pluridisciplinaire de Nador
Département de Mathématiques

Filières SMA
Semestre S3
Année universitaire: 2021-2022

TD d'Analyse 4

Série 4: Séries entières

Exercice 1.
Calculer le rayon de convergence des séries entières :

a) $\sum_{n\geq 1} n^n z^{3n}$;

b) $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$;

c) $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$;

d) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\ln n}} z^n$;

e)$\sum_{n\geq 1} \frac{z^{n^2}}{n}$;

f) $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) z^n$.

Exercice 2.
Soit la série entière :

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

1) Déterminer le rayon de convergence de cette série.

2) Calculer $S(x)$ pour $x\in]-1,1[$.

3) Montrer que cette série converge uniformément sur $[0,1]$.

4) En déduire la relation

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

Exercice 3.
Déterminer le développement en série entière avec le rayon de convergence de chacune des fonctions suivantes

1) $f(x)=\dfrac{e^x}{1-x}$.

2) $g(x)=\dfrac{\sin(x)}{x(1+x^2)}$.

Exercice 4.
Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n.$$

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.

2) Pour tout $x\in]-1,1[$, exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

Exercice 5.
On considère la série entière

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n.$$

On note f sa somme.

1) Calculer le rayon de convergence de cette série entière et déterminer le domaine de définition de f.

2) Déterminer l'expression de f sur son domaine de définition.

Exercice 6.
Soit f la fonction définie sur $]-1, 1[$ par :

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1) Justifier que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

2) Montrer que f est solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y' - xy = 1.$$

3) Déterminer le développement en série entière de f sur $]-1, 1[$.

Exercice 7.
Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière dont le rayon de convergence R est strictement positif. On note f sa somme sur $]-1,1[$.

1) Trouver des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les coefficients a_n pour que f satisfasse l'équation différentielle

$$xy'' + 2y' + xy = 0.$$

2) On suppose que ces conditions sont vérifiées. Déterminer les a_n lorsque $a_0 = 1$.

3) Quelle est la valeur de R ? Quelle est la fonction f obtenue ?