TD d'Analyse 4

Série 1: Séries numériques

Exercice 1.
Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

(1) $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$; (2) $u_n = \dfrac{\cosh(n)}{\cosh(2n)}$; (3) $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; (4) $u_n = \dfrac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$;
(5) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(n!)^{1/n}}$; (6) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$; (7) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + (-1)^{n-1}}$; (8) $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$;
(9) $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$; (10) $u_n = \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$; (11) $u_n = (-1)^n \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$;
(12) $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$; (13) $u_n = \dfrac{1}{(\ln 2)^2 + ... + (\ln n)^2}$; (14) $u_n = \dfrac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Exercice 2.
Etudier en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

$$(1)\ u_n = \int_0^{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}} \frac{\sqrt{|x|}}{x+1}dx;\quad (2)\ u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+\alpha}}\right);\quad (3)\ u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right).$$

Exercice 3.
Etudier en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

$$(1)\ u_n = e^{-n^\alpha};\ (2)\quad u_n = \frac{\ln n}{n^\alpha};\ (3)\quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(-1)^n + n^\alpha}}.$$

Exercice 4.
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les séries suivantes sont aussi convergentes

$$(1)\ \sum \max(u_n,v_n);\quad (2)\ \sum \sqrt{u_n v_n};\quad (3) \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

Exercice 5.
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2) Même question avec $v_n = \dfrac{u_n}{u_1 + ... + u_n}$. On pourra étudier $\ln(1-v_n)$ dans le cas de la divergence.

Exercice 6.
Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour $n \in \mathbb{N}$: $\quad a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$

1) Etudier la convergence de la suite (a_n).

2) Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

3) Déterminer la nature de la série de terme général a_n^2.

4) Déterminer la nature de la série de terme général a_n à l'aide de la série $\sum \ln\left(\dfrac{a_n+1}{a_n}\right)$.

Exercice 7.
Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature des séries suivantes :

$$(a)\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)^2};\quad (b)\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)};\quad (c)\ \sum_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n\ln(n)}.$$

Exercice 8.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons $A_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$.

1) Montrer que la suite (X_n) défnie par $X_n = A_n - \ln n$ converge vers une limite γ. Sa limite est appelé la constante d'Euler. Donner un équivalent de la suite A_n.

2) Étudier la série de terme généal $u_n = \frac{A_n}{n^\alpha}$.

3) Étudier la série de terme général $v_n = \alpha^{A_n}$.

4) Étudier la série de terme général $w_n = A_n \alpha^n$.

Exercice 9.
Soit la série de terme général u_n définie par :

$$\begin{cases} u_{2n} = \dfrac{1}{n+1}, \\ u_{2n+1} = \ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right), \quad (n \geq 0.) \end{cases}$$

1) Montrer que la série $\sum u_n$ est alternée, convergente, et a pour somme la constante d'Euler γ.

2) En déduire pour $n \geq 1$, les inégalités

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} < \gamma + \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 10.
Étudier la série de terme général v_n définie par :

$$\begin{cases} v_{2n} = \dfrac{1}{2n} + a \sin\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right), \\ v_{2n+1} = \dfrac{-1}{2n+1}, \qquad (a \in \mathbb{R}^+,\ \alpha \in]0, +\infty[). \end{cases}$$

Exercice 11.
Soit $f : [1, +1[\to R$ de classe $\mathcal{C}^1$ strictement positive telle que $\dfrac{xf'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

1) On suppose $\ell > -1$ ou $\ell = -1^+$. Montrer la divergence de la série $\sum\limits_{n \geq 1} f(n)$.

2) On suppose $\ell < -1$. Montrer la convergence de la série $\sum\limits_{n \geq 1} f(n)$.

Exercice 12.
Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante de réels strictement positifs.

1) On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer que la série de terme général $v_n = n(u_n - u_{n+1})$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

2) Réciproquement, on suppose que la série de terme général $n(u_n - u_{n+1})$ converge. Montrer que la série de terme général u_n converge si, et seulement si, la suite (u_n) converge vers 0.

3) Donner un exemple de suite (u_n) qui ne converge pas vers 0, alors que la série de terme général $n(u_n - u_{n+1})$ converge.

Exercice 13.
Soit (u_n) une suite numérique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{2^n} \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k u_k$.

1) On suppose dans cette question la série $\sum u_n$ absolument convergente. En observant un produit de Cauchy, montrer que la série $\sum v_n$ converge et exprimer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.

2) On suppose dans cette question que la suite (u_n) tend vers 0. Déterminer la limite de (v_n)

3) On suppose dans cette dernière question la série $\sum u_n$ convergente. Montrer la convergence de $\sum v_n$ et déterminer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.

Exercice 14.

1) Justifier que $\displaystyle\sum_{n=1, n\neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{3}{4p^2}$.

2) En déduire que $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1, n\neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} \neq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1, p\neq n}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2}$.

Cette étude montre que l'on ne peut pas permuter deux sommes infinies sans moult justifications !

Exercice 15.

On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sommables.

1) Soit $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

2) Pour $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, on pose $(u \star v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$. Montrer que $u \star v \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (u \star v)_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n.$$

3) Montrer que la loi $\star$ ainsi définie est commutative, associative et possède un élément neutre.

4) La structure $(\ell^1(\mathbb{Z}), \star)$ est-elle un groupe ?