Université Mohammed Premier
Faculté Pluridisciplinaire de Nador
Département de Mathématiques et Informatique
Nador

Deuxième Année Universitaire

Semestre 3

Filière : SMP

NOTES DE COURS ET TRAVAUX DIRIGÉS D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

Préparé par le Professeur
T. SERRAJ

Année universitaire : 2019-2020
Version : 1.1

Table des matières

Préface

Ces notes de cours sont destinées en premier lieu aux étudiants de la faculté pluridisciplinaire de Nador, de la filière SMP semestre 3. Le but étant d'initier les étudiants de cette filière à résoudre numériquement quelques problèmes mathématiques liés à la physique (approximation des solutions des équations de type $f(x) = 0$ et des systèmes linéaires, intérpolation, dérivations et intégrations numériques).

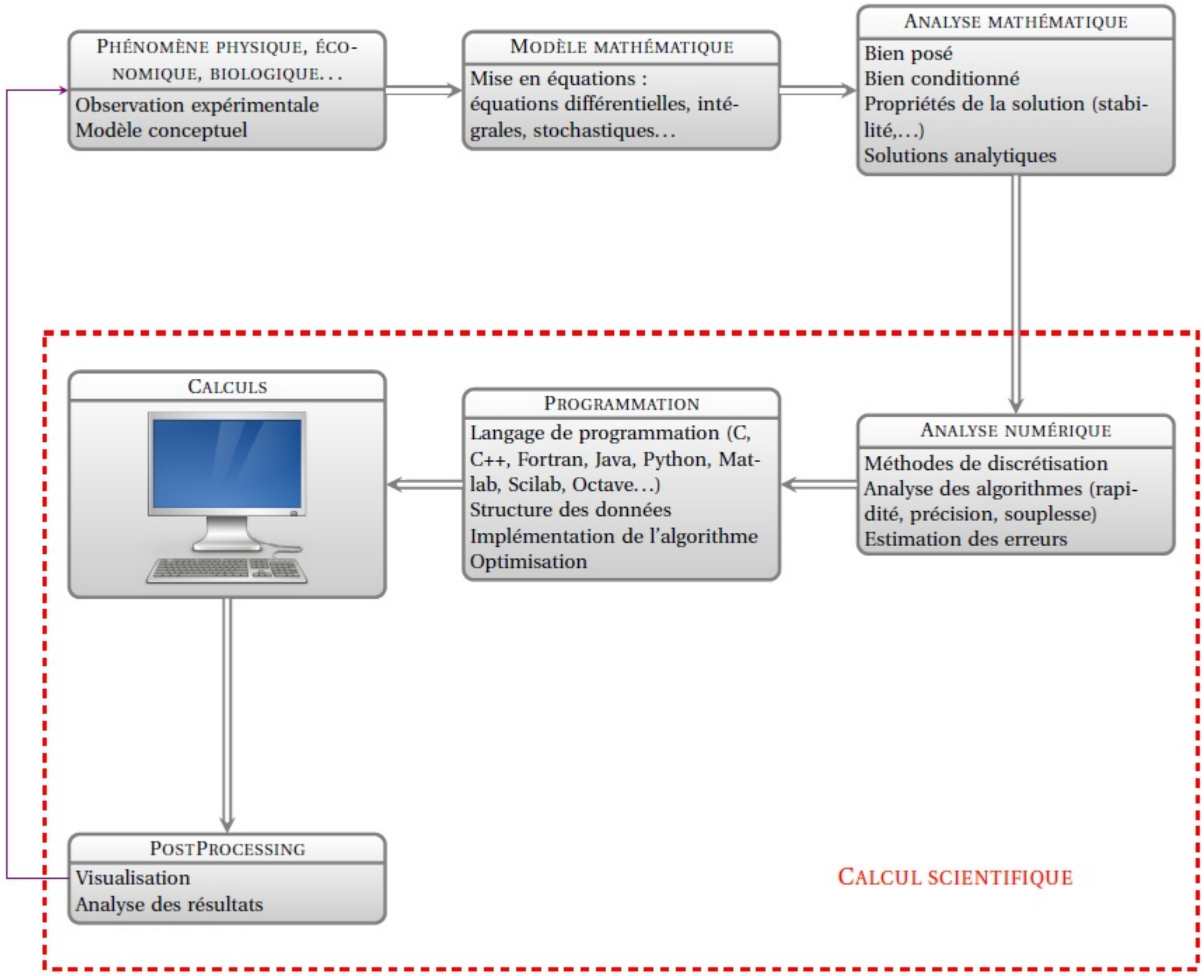
Généralement, une étude numérique d'un problème physique se déroule en trois étapes : la première concerne sa formalisation mathématique, la seconde concerne l'élaboration d'un modèle numérique, et la dernière concerne la mise en œuvre sur l'ordinateur de la méthode numérique adoptée pour résoudre le problème physique.

Pour ceux qui s'intéressent ou veulent approfondir l'un ou l'autre des sujets traités, je recommande les références citées à la fin de ce polycopié. Prière à toute personne utilisant ce document de bien vouloir signaler toute erreur ou remarque pertinente au auteur de ce polycopié à l'e-mail : staoufik.fpn@gmail.com, et ce dans le but de l'améliorer.

1. Introduction générale au calcul scientifique

1.1. **Modélisation et calcul scientifique :** Le calcul scientifique est la discipline qui permet de reproduire, sur un ordinateur, un phénomène ou un processus (physique, économique, ...) décrit par un modèle mathématique. Généralement, on peut définir un modèle comme un objet ou un concept utilisé pour représenter ou décrire une autre chose. Un modèle mathématique utilise des objets et des concepts mathématiques : des constantes, des variables, des fonctions, des équations, des opérateurs etc. Cette abstraction permet de construire des modèles (des descriptions) qui ont une validité et une utilité générales dans le monde réel en considérant des simplifications du système pris en considération. Les modèles mathématiques sont moins coûteux que les modèles physiques, ils permettent de prévoir l'évolution d'un système et d'étudier ses propriétés en fonction de stimuli différents sans répéter chaque expérimentation ou dans des situations non vérifiables expérimentalement. Cependant, il existe toujours des difficultés dans la construction d'un modèle mathématique, par exemple : les erreurs ou la non exhaustivité des données expérimentales et la difficulté (ou carrément l'impossibilité) de résolution exacte du modèle mathématique. Il convient cependant de rappeler qu'un modèle est une approximation de la réalité ; que sa pertinence et son utilité sont directement fonction des choix qui ont été faits lors de son élaboration. Une grande vigilance s'impose donc lors de l'utilisation d'un modèle par d'autres que ceux qui l'ont élaboré.

1.2. **Analyse mathématique et analyse numérique :** Pour l'analyse mathématique, Il faut tout d'abord s'assurer de l'existence et de l'unicité de la solution du modèle mathématique. S'il n'y a pas d'unicité, il faudra ajouter d'autres conditions pour choisir celle qui correspond au phénomène à l'étude. On étudiera ensuite les propriétés de la solution, notamment la stabilité : des petites perturbations admissibles des données doivent induire des petites perturbations de la solution. Aujourd'hui, l'ordinateur est un outil incontournable pour simuler et modéliser des systèmes complexes, mais il faut encore savoir exprimer nos problèmes (physiques, économiques, biologiques . . .) en langage formalisé des mathématiques pures sous la forme d'équations mathématiques (différentielles, intégrales . . .). Nous sommes habitués à résoudre les problèmes de façon analytique, alors que l'ordinateur ne travaille que sur des suites de nombres. On verra qu'il existe souvent plusieurs approches pour résoudre un même problème, ce qui conduit à des méthodes numériques et des algorithmes différents.



1.3. **Algorithmes et programmation informatique :** On appelle algorithme tout procédé de résolution d'un problème en un nombre fini d'étapes par l'application d'une série de règles prédéfinies. Un algorithme se décompose en données d'entrées, opérations, résultats. Un algorithme, pour être utile, doit satisfaire un certain nombre de conditions. Il doit être :

- Rapide : le nombre d'opérations de calcul pour arriver au résultat escompté doit être aussi réduit que possible ;
- Précis : l'algorithme doit savoir contenir les effets des erreurs qui sont inhérentes à tout calcul numérique (ces erreurs peuvent être dues à la modélisation, aux données, à la représentation sur ordinateur ou encore à la troncature) ;
- Souple : l'algorithme doit être facilement transposable à des problèmes différents.

Finalement, un programme informatique est la traduction d'un algorithme dans un langage compréhensible par un ordinateur. Programmer c'est donc : résoudre un problème de manière algorithmique et transmettre les instructions à un ordinateur en utilisant un langage de programmation tel que C, C++, Java, Python etc.

2. Approximation des solutions de l'équation $f(x) = 0$

2.1. **Introduction.** C'est seulement pour certaines équations bien particulières que les procédés classiques de résolution permettent d'exprimer les solutions exactes. Dans de nombreux cas, on peut seulement localiser les solutions, et en calculer des valeurs numériques approchées.

Dans ce chapitre, on va exposer les principales méthodes itératives de résolution d'une équation de la forme $f(x) = 0$, où f est une fonction continue définie sur un intervalle $[a,b]$. On se placera dans le cas où, localement, il y a une unique racine, pour en donner un algorithme d'approximation.

2.2. **Rappels et notations.**

Définition 1. Soit k un réel strictement positif et g une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction g est dite Lipschitzienne de rapport de k (encore dite k-Lipschitzienne) si pour tous x et y de $[a, b]$ on a : $|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$.

Définition 2. Soit g une fonction k-Lipschitzienne sur $[a, b]$. La fonction g est dite contractante de rapport de contraction k si $k \in]0, 1[$.

Théorème 1. *(des Valeurs Intermédiaires) Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Alors pour tout réel u appartenant à $f([a, b])$, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $u = f(c)$. Si de plus f est strictement monotone alors le point c est unique.*

Théorème 2. *(des Valeurs Intermédiaires cas particulier $u = 0$) Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ et vérifiant $f(a).f(b) \leq 0$, alors il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. Si de plus f est strictement monotone alors le point c est unique.*

Théorème 3. *(des Accroissements Finis) Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b - a).f'(c)$.*

Définition 3. Soit c un réel et f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. c est dit zéro de f si $f(c) = 0$

Définition 4. Soit c un réel et g une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. c est dit point fixe de g si $g(c) = c$.

Lemme 1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors la recherche des zéros de f est équivalente à la recherche des points fixes de la fonction g définie sur I par : $g(x) = x - f(x)$.*

Lemme 2. *Soit g une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. S'il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que : $|g'(x)| \leq k$ $\forall x \in [a, b]$ alors la fonction g est k- Lipschitzienne sur $[a, b]$.*

Définition 5. On dira que le réel s est une approximation du réel c avec la précision ε, si : $|c - s| \leq \varepsilon$.

Théorème 4. *Soit g une fonction k-contractante sur $[a, b]$ et à valeurs dans $[a, b]$, et (U_n) la suite récurrente définie par : $U_0 \in [a, b]$, U_0 donné et $U_{n+1} = g(U_n)$ pour tout $n \geqslant 0$. Alors :*

- *la suite (U_n) converge vers un réel c.*
- *la fonction g admet un point fixe unique*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $|U_n - c| \leq \frac{k^n}{k-1}|U_0 - U_1|$.*

2.3. **Méthode de la dichotomie.** Cette méthode consiste en une succession de divisions par deux de l'intervalle $[a,b]$ pour approcher de plus en plus la racine de l'équation $f(x) = 0$, jusqu'à ce qu'une précision ε soit atteinte.

2.3.1. *Hypothèses sur la fonction f.* On se place dans le cas où la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses :

- (H_1) : f est continue sur $[a,b]$
- (H_2) : f est strictement monotone sur $[a,b]$
- (H_3) : $f(a).f(b) \leq 0$

ce qui assure l'existence et l'unicité de la racine $c \in [a,b]$.

2.3.2. *Algorithme de la méthode.* Soit f une fonction vérifiant les hypothèses de H_1 à H_3. La méthode de dichotomie consiste à approcher c par encadrement, en réduisant à chaque étape la longueur de l'intervalle de moitié selon l'algorithme suivant :

- **Etape 1 :** On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$ on pose $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$, puis on teste : si $c_0 = c$ c'est terminé, sinon :
  - si $f(a_0).f(c_0) < 0$ alors $c \in [a_0,c_0]$ on pose alors $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$, puis $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
  - si $f(c_0).f(b_0) < 0$ alors $c \in [c_0,b_0]$ on pose alors $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$, puis $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.

- **Etape 2 :** on recommence le procédé de l'étape 1.
- **Etape** k **:** A chaque étape k du procédé, soit on tombe sur un $c_k = c$ soit on diminue la longueur de l'intervalle de moitié.

Remarque 1.

A l'étape k, c appartient à l'intervalle de travail, qui a pour longueur $\frac{b-a}{2^k}$. Donc, on peut calculer à l'avance le nombre maximal $n \in \mathbb{N}$ d'itérations assurant la précision ε.

Exemple 1.

On considère l'équation :

$$10x - 9e^{-x} = 0.$$

La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 10x - 9e^{-x}$ est continue, dérivable, et sa dérivée f' vérifie :

$$f'(x) = 10 + 9e^{-x} > 0.$$

donc f est strictement croissante sur $[0,1]$.

De plus $f(0) = -9$ et $f(1) \simeq 6{,}69$ sont de signes contraires. On peut donc utiliser la méthode de dichotomie pour calculer à 10^{-2} près la solution de l'équation proposée.

Le nombre n de termes à calculer doit vérifier :

$$\frac{1-0}{2^n} \leq 10^{-2}$$

soit

$$n \geqslant \frac{\ln(10^2)}{\ln(2)} \simeq 6{,}6438.$$

D'où $n = 7$.

a_k	c_k	b_k	$f(a_k)$	$f(c_k)$	$f(b_k)$
0	0,5	1	-9	-0,458775	0,689085
0,5	0,75	1	-0,458775	3,248701	0,689085
0,5	0,625	0,75	-0,458775	1,432647	3,248701
0,5	0,5625	0,625	-0,458775	0,496954	1,432647
0,5	0,53125	0,5625	-0,458775	0,021672	0,496954
0,5	0,515625	0,53125	-0,458775	-0,217895	0,021672
0,515625	0,5234375	0,53125	-0,217895	-0,097948	0,021672

à 10^{-2} près, la solution est 0,52.

2.4. **Méthode du point fixe.** Le principe de la méthode du point fixe est basé sur la construction d'une suite itérative approchant de plus en plus la racine exacte, son premier élément (appelé initialisation) pouvant être n'importe quel point de l'intervalle de travail $[a,b]$.

Dans cette section, nous décrivons la méthode du point fixe pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$. On peut toujours écrire cette équation sous la forme $\varphi(x) = x$.

Exemple 2.

L'équation $10x - 9e^{-x} = 0$ est équivalente à $\frac{9}{10}e^{-x} = x$.

Remarque 2.

Ne pas confondre la fonction f et la fonction φ.

2.4.1. *Hypothèse sur la fonction φ.* Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui vérifie les hypothèses suivantes :

- (H_1) φ est continue et dérivable sur $[a,b]$,
- (H_2) φ prend ses valeurs dans $[a,b]$,
- (H_3) $\exists k \in]0,1[: \forall x \in [a,b], |\varphi'(x)| \leq k$.

2.4.2. *Théorème du point fixe.* Lorsque φ vérifie les trois hypothèses de H_1 à H_3, il existe une unique racine c de l'équation $\varphi(x) = x$.

2.4.3. *Algorithme et estimation d'erreur.* On construit la suite des itérés de la manière suivante :

- On fixe un point quelconque $x_0 \in [a,b]$.
- On définit : $\begin{cases} x_1 = \varphi(x_0) \\ x_2 = \varphi(x_1) \\ \vdots \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) \end{cases}$

2.4.4. *Majoration d'erreur.* Si c est le point fixe de φ, on a :

- $|x_1 - c| = |\varphi(x_0) - \varphi(c)| \leq k|x_0 - c| < |x_0 - c|$
- $|x_2 - c| = |\varphi(x_1) - \varphi(c)| \leq k|x_1 - c| < |x_1 - c|$

On démontre par réccurence la majoration d'erreur suivante :

$$\forall n \geq 0, |x_n - c| \leq k^n|x_0 - c| \leq k^n|b - a|.$$

2.4.5. *Critère d'arrêt.* On fixe $\varepsilon > 0$. Pour que x_n soit une valeur approchée de c à ε près, il suffit que :

$$k^n|b-a| \leq \varepsilon$$

Soit :

$$n \geq \frac{\ln(\varepsilon) - \ln(|b-a|)}{\ln(k)}.$$

Pour calculer à 10^{-6} près, la solution, dans l'intervalle [0,1] de l'équation :

$$x = \frac{9}{10}e^{-x}$$

par la méthode du point fixe, on procède comme suit :

- On définit la fonction φ telle que $\varphi(x) = \frac{9}{10}e^{-x}$. Cette fonction est continue et dérivable sur [0,1].
- Pour vérifier l'hypothèse H_2, on étudie les variations de φ en calculant φ'. Comme $\varphi'(x) = -\frac{9}{10}e^{-x} < 0$, φ décroît de $\varphi(0) = 0{,}9$ à $\varphi(1) = 0{,}3311$. Donc, $\varphi(x)$ prend ses valeurs dans l'intervalle $[0{,}3311; 0{,}9] \subset [0;1]$, et H_2 est vérifiée.
- Pour vérifier H_3, il faut en général étudier les variations de φ' donc calculer φ''. Mais ici on a : $|\varphi'(x)| = \varphi(x)$, donc $|\varphi'(x)|$ a pour maximum $k = 0{,}9$.
- Le nombre n de termes à calculer pour obtenir une valeur approchée de la solution à 10^{-6} près est donné par :

$$n = E\left(\frac{\ln(10^{-6} - \ln(1-0))}{\ln(0{,}9)}\right) + 1 = 132.$$

- On calcule les itérés successifs en utilisant le système PARI/GP avec le code suivant :

$$x = 0; for(i = 0{,}132{,}x = 0.9 * exp(-x))$$

  On retrouve la valeur approchée 0.529833 à 10^{-6} près.

2.5. **Méthode de Newton.**

2.5.1. *Principe de la méthode.* Au voisinage de la racine c, la courbe de la fonction f peut être confondue avec la tengente en un point x_0 proche de c.

Alors :

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ (x \to x_0).$$

Remarque 3.

- La solution de $f(x) = 0$ peut donc être rapprochée par la résolution de
$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0.$$
- La solution $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ est une première approximation de c.

En réitérant le procédé ci-dessus, on construit la suite :
$$\begin{cases} x_0 \text{ fixé proche de } c \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n \geq 0 \end{cases}$$

Remarque 4. Cette suite est celle permettant de chercher le point fixe de la fonction
$$\varphi : x \mapsto \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

2.5.2. *Hypothèses sur la fonction f.* On suppose que f vérifie :

- (H_1) f est continue sur $[a,b]$,
- (H_2) f est strictement monotone sur $[a,b]$,
- (H_3) $f(a).f(b) < 0$,
- (H_4) f est dérivable sur $[a,b]$ et $f'(x) \neq 0$ sur $[a,b]$,
- (H_5) f est deux fois dérivable sur $[a,b]$.

Théorème 5. *Sous les hypothèses H_1 à H_5, et pour $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0)$ et $f''(x)$ soient de même signe, alors la suite des itérés de Newton converge vers c.*

2.5.3. *Majoration et estimation d'erreur :* Avec les mêmes notations du théorème précédent, on montre par réccurence que :
$$\frac{1}{2}M|x_n - c| \leq |\frac{1}{2}M(x_0 - c)|^{2^n}.$$
où
$$M = \max_{x \in [a,b]} |\varphi''(x)|.$$

Exemple 3.

L'étude de la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 10x - 9e^{-x} = 0$, permet de vérifier les hypothèses de H_1 à H_5. Partant de l'initialisation $x_0 = 0$, on calcule les huit premiers itérés de la méthode de Newton en utiilisant le code PARI/GP suivant :

```
x=0; for(i=1,8,x=x-(10*x-9*exp(-x))/(10+9*exp(-x));printf([i,x]));
```

On obtient les résultats suivantes :

[1, 0.47368421052631578947368421052631578947]

[2, 0.52927726786552800742195767664245082154]

[3, 0.52983291214996562812985700046991362441]

[4, 0.52983296563343391679256097661949172066]

[5, 0.52983296563343441213336643954542055990]

[6, 0.52983296563343441213336643954546304858]

[7, 0.52983296563343441213336643954546304858]

[8, 0.52983296563343441213336643954546304858]

3. Introduction à l'interpolation polynomiale

3.1. Le polynôme d'interpolation d'une fonction. On suppose connues les valeurs d'une fonction f en un nombre fini de points distincts selon le tableau suivant :

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	$\cdots$	f_n

Un tel tableau peut être le résultat des mesures expérimentales.

On cherche à approcher la fonction f par une fonction simple de type polynomial P_n de degré inférieur ou égal à n, telle que :

$$P_n(x_i) = f_i \text{ pour } i = 0, 1, \cdots, n.$$

On dit que P_n est le polynôme d'interpolation (ou l'interpolant) de f en : $x_0, x_1, \cdots, x_n$.

Théorème 6. *Il existe un unique polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que :*

$$P_n(x_i) = f_i \textit{ pour } i = 0, 1, \cdots, n.$$

Preuve

En écrivant $P_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, tel que $P_n(x_i) = f_i$ pour $i = 0, 1, \cdots, n$, on obtient un système équivalent à :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$ est dite matrice de Vandermonde dont le déterminant est égal à :

$$\prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Ce déterminant est différent de zéro puisque les points x_i sont distincts. D'où l'existence et l'unicité des a_i pour $i = 0, 1, \cdots, n$.

3.2. **Polynôme de Lagrange.**

Définition 6. On appelle polynôme de Lagrange d'indice $k = 0, 1, \cdots, n$ associé aux points : $x_0, x_1, \cdots, x_n$ le polynôme défini par :

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}.$$

Exemple 4.

Dans le cas $n = 2$, les trois polynômes de Lagrange sont :

- $L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$; $(k = 0)$.
- $L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$; $(k = 1)$.
- $L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$; $(k = 2)$.

Théorème 7. *Le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points : $x_0, x_1, \cdots, x_n$ est donné par :*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x).$$

Preuve

Cette relation découle facilement du fait que :

- $d^\circ P_n \leq n$,
- $L_k(x_k) = 1$ pour $k = 0, 1, \cdots, n$
- $L_k(x_j) = 0$ pour $j \neq k$,

d'où $\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\}$

$$P_n(x_k) = f_0.0 + \cdots + f_k.1 + \cdots + f_n.0 = f_k.$$

Exemple 5.

Soit f une fonction connue aux points : $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4$ de valeurs respectives : $f_0 = 3, f_1 = -1, f_2 = 3$.

Calculer $P_2(x)$, puis en déduire une approximation polynomiale de $f(2{,}5)$.

On a :

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f_k.L_k(x).$$

Alors :

$$P_2(x) = 3\frac{(x-2)(x-4)}{(0-2)(0-4)} - 1\frac{(x-0)(x-4)}{(2-0)(2-4)} + 3\frac{(x-0)(x-2)}{(4-0)(4-2)}$$

$$P_2(x) = x^2 - 4x + 3.$$

Donc

$$P_2(2{,}5) = 2{,}5^2 - 4 \times 2{,}5 + 3 = -0{,}75.$$

3.3. **Algorithme d'Aitken.** L'algorithme d'Aitken utilise une formule de récurrence permettant de calculer le polynôme d'interpolation d'une fonction connue en $n+1$ points, à partir de deux polynômes d'interpolation déterminés à partir de n de ces points.

Étant donné le tableau de valeurs d'interpolation :

x_0	x_1	$\cdots$	x_n
f_0	f_1	$\cdots$	f_n

on notera par commodité $P_n(x) = P_{\{x_0,\cdots,x_n\}}(x)$. Dans le cas d'un seul point d'interpolation $\{x_i\}$, on a : $P_{\{x_i\}}(x) = f_i$. On vérifie que, à partir des polynômes d'interpolation $P_{\{x_0,\cdots,x_{n-1}\}}(x)$ et $P_{\{x_1,\cdots,x_n\}}(x)$ construits respectivement sur les n points $\{x_0,\cdots,x_{n-1}\}$ et $\{x_1,\cdots,x_n\}$ on obtient le polynôme $P_{\{x_0,\cdots,x_n\}}(x)$ construit sur $n+1$ points par :

$$P_{\{x_0,\cdots,x_n\}}(x) = \frac{(x_n - x)P_{\{x_0,\cdots,x_{n-1}\}}(x) - (x_0 - x)P_{\{x_1,\cdots,x_n\}}(x)}{x_n - x_0}$$

Exemple 6.

A partir du tableau suivant :

x_i	0	2	4
f_i	3	-1	3

Calculer $P_2(2{,}5)$ par l'algorithme d'Aitken.

On a :

$$P_{\{x_0,x_1,x_2\}}(2{,}5) = \frac{(x_2 - 2{,}5)P_{\{x_0,x_1\}}(2{,}5) - (x_0 - 2{,}5)P_{\{x_1,x_2\}}(2{,}5)}{x_2 - x_0}$$

$$P_{\{x_0,x_1,x_2\}}(2{,}5) = \frac{(1{,}5)P_{\{x_0,x_1\}}(2{,}5) + (2{,}5)P_{\{x_1,x_2\}}(2{,}5)}{4}$$

avec :

$$P_{\{x_0,x_1\}}(2{,}5) = \frac{(x_1 - 2{,}5)P_{\{x_0\}}(2{,}5) - (x_0 - 2{,}5)P_{\{x_1\}}(2{,}5)}{x_1 - x_0}$$

$$P_{\{x_0,x_1\}}(2{,}5) = \frac{-0{,}5 \times 3 - (-2{,}5) \times (-1)}{2} = -2$$

On obtient de même :

$$P_{\{x_1,x_2\}}(2{,}5) = 0.$$

D'où
$$P_{\{x_0,x_1,x_2\}}(2{,}5) = \frac{1{,}5 \times (-2)}{4} = -0{,}75.$$

3.4. **Estimation d'erreur d'interpolation.** On va estimer l'erreur mathématique $|f(x) - P_n(x)|$, dans le cas où la fonction est supposée $n+1$ fois dérivable sur l'intervalle de travail $[a,b]$ et où sa dérivée d'ordre $n+1$ est bornée.

Théorème 8. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable, telle que $|f^{(n+1)}|$ soit bornée par une constante $M > 0$. Si P_n désigne le polynôme d'interpolation de f sur la subdivision $\{x_1, \cdots, x_n\}$ de $[a,b]$, alors pour tout $x \in [a,b]$ on a :*
$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|.$$

Exemple 7.

En appliquant ce théorème, dans le cas où $f(x) = \ln(x)$ on peut donner une majoration de l'erreur commise en calculant une valeur approchée de $\ln(23{,}61)$ par une interpolation aux points $x_0 = 23$ et $x_1 = 24$ en utilisant les valeurs de $\ln(23)$ et $\ln(24)$.
$$|\ln(23{,}61) - P_1(23{,}61)| \leq \frac{M}{(1+1)!} |(23{,}61 - 23)(23{,}61 - 24)|$$
avec
$$M = \max_{x \in [23,24]} |f''(x)| = \max_{x \in [23,24]} \left| -\frac{1}{x^2} \right| = \left(\frac{1}{23} \right)^2.$$
On obtient :
$$|\ln(23{,}61) - P_1(23{,}61)| \leq \frac{1}{2 \times 23^2} |(0{,}61 \times 0{,}39)| \simeq 2{,}24.10^{-4}$$
A titre de vérification, on calcule :
$$P_1(23{,}61) = \frac{23{,}61 - 24}{23 - 24} \ln(23) + \frac{23{,}61 - 23}{24 - 23} \ln(24) \simeq 3{,}161496.$$
on a aussi $\ln(23{,}61) \simeq 3{,}161670$, d'où :
$$|P_1(23{,}61) - \ln(23{,}61)| \simeq 0{,}000174 \simeq 1{,}74.10^{-4}$$

4. Intégration numérique

4.1. **Introduction.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, le calcul de la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$ n'est pas toujours possible (par exemple : l'obtention d'une primitive soit impossible ou trop compliquée). Pour surmonter ce problème, on cherche une approximation de I par une somme des surfaces de rectangles, de trapèzes ou d'autres formes géométriques dont on sait calculer la surface.

En pratique, on subdivise l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalle $[x_i,x_{i+1}]$ de même longueur $h = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$, avec $i = 0,1,2,\cdots,n$.

On a donc : $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$ où $x_i = a + ih$.

Soit f_i la restriction de la fonction f à chaque intervalle $[x_i,x_{i+1}]$.

En écrivant

$$I = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i(x),$$

on obtient alors des approximations de l'intégrale I en remplaçant f_i par des polynômes d'interpolation de f. Finalement, on estime l'erreur d'intégration $|I_{n-I}|$.

4.2. Approximation par la méthode des rectangles.

4.2.1. *Formule simple.* On suppose que la fonction f est connue en un point $\alpha \in [a,b]$. Le polynôme d'interpolation de f est la constante $P_0 = f(\alpha)$. L'intégrale I est donc approché par :

$$I_0 = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(\alpha)dx = (b-a)f(\alpha).$$

Remarque 5. Dans le cas particulier où $\alpha = \frac{a+b}{2}$, on obtient $I_0 = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$.

c'est la formule simple des rectangles point-milieu.

4.2.2. *Formule composée.* En généralisant la formule précédente aux $n+1$ points équidistants suivants : $x_0 = a, x_1, \cdots, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n = b$, et en appliquant le même principe d'interpolation de degré 0 sur chaque intervalle $[x_i,x_{i+1}]$, on approche $f(x)$ par $P_0 = f(\alpha_i)$ où $\alpha_i \in [x_i,x_{i+1}]$, et on obtient la formule composite des rectangles :

$$I_R = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\alpha_i)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i).$$

qui devient dans le cas des rectangles point-milieu :

$$I_M = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right).$$

Exemple 8.

Cherchons une valeur approchée de ln(2) en intégrant la fonction $f(x) = \frac{1}{x+1}dx$ sur l'intervalle [0,1] par la méthode des rectangles points-milieux, en utilisant la subdivision suivante :

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1.$$

On a :

$$\ln(2) = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx \simeq \frac{1-0}{4}\sum_{i=0}^{3} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right);$$

donc :

$$\ln(2) \simeq \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right)\right);$$

$$\ln(2) \simeq \frac{1}{4}\left(\frac{8}{9} + \frac{8}{11} + \frac{8}{13} + \frac{8}{15}\right) \simeq 0{,}69121989\cdots$$

4.3. **Approximations par la méthode des trapèzes.**

4.3.1. *Formule simple.* En utilisant l'interpolation à deux points, et si on suppose que la fonction f est connue aux deux points a et b , on a vu que :

$$P_1 = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

En intégrant P_1 on obtient :

$$I_1 = \int_a^b P_1(x)dx = \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}.$$

4.3.2. *Formule composée.* En généralisant le même principe aux $n+1$ points équidistants suivants : $x_0 = a, x_1, \cdots, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n = b$, on obtient :

$$I_T = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(f(x_i)+f(x_{i+1}))}{2}.$$

Exemple 9.

Reprenons l'exemple précédent avec la méthode des trapèzes. Nous avons :

$$\ln(2) = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx \simeq \frac{b-a}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_i)+f(x_{i+1})).$$

Alors :

$$\ln(2) \simeq \frac{1}{8}\left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_3) + f(x_4)\right).$$

$$\ln(2) \simeq 0{,}69702380\cdots$$

4.4. **Approximations par la méthode de Simpson.**

4.4.1. *Formule simple.* On suppose que la fonction f est connue aux trois points équidistants suivants :

$$x_0 = a, x = \frac{a+b}{2} = a + h \, et \, x_2 = b = a + 2h.$$

où $h = \frac{b-a}{2}$, on a :

$$P_2(x) = \frac{(x - \frac{a+b}{2})(x-b)}{2h^2} f(a) - \frac{(x-a)(x-b)}{h^2} f(\frac{a+b}{2}) + \frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{2h^2} f(b);$$

après l'intégration, nous obtenons :

$$I_2 = \int_a^b P_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

C'est la formule simple dite de Simpson.

4.4.2. *Formule composée.* On réitère la formule précédente en partageant l'intervalle $[a,b]$ en $s = \frac{n}{2}$ intervalles $[x_{2i},x_{2i+2}]$ centrés en x_{2i+1}, de longueur $2h = \frac{b-a}{s} = \frac{2(b-a)}{n}$.

Sur l'intervalle $[x_{2i},x_{2i+2}]$ pour $i = 0, 1, \cdots, s-1$, on obtient :

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} P_2(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_{2i}) + 4f\,(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right].$$

et ensuite, la formule composite de Simpson est donnée par :

$$I_S = \sum_{i=0}^{s-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} P_2(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{s-1} f(a+2ih) + 4\sum_{i=0}^{s-1} f(a+(2i+1)h)\right].$$

Exemple 10.

Reprenons l'exemple précédent avec la méthode de Simpson. Nous avons : $n = 4$ et $s = 2$.

$$\ln(2) \simeq \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{1} f(a+2ih) + 4\sum_{i=0}^{1} f(a+(2i+1)h)\right];$$

$$\ln(2) \simeq \frac{1}{12}\left[f(0) + f(1) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right)\right];$$

$$\ln(2) \simeq 0{,}69325396\cdots$$

Remarque 6.

Pour faire une petite comparaison, la calculatrice nous donne la valeur :

$$\ln(2) \simeq 0{,}69314718\cdots$$

4.5. **Estimation d'erreur d'intégration.** On se bornera à l'étude de l'erreur mathématique commise dans la méthode des trapèzes et celle de Simpson.

4.5.1. *Erreur dans la méthode des trapèzes.* En formule simple, la quantité

$$I_1 = \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}$$

approche

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

On suppose que f admet des dérivées successives continues jusqu'à l'ordre 2, on montre grâce à un développement de Taylor de l'ordre 2 de

$$\varphi(h) = I - I_1 = \int_a^{a+h} f(x)dx - \frac{h(f(a)+f(a+h))}{2}$$

avec $h = b - a$, que :

$$|I - I_1| \leq \frac{h^3}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

En formule composée, on déduit que :

$$|I - I_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

4.5.2. *Erreur dans la méthode de Simpson.* En utilisant la méthode précédente on trouve l'estimation de l'erreur suivante, en composite, pour des fonctions f admettant des dérivées successives continues jusqu'à l'ordre 4 :

$$|I - I_S| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Remarque 7.

Lorsqu'on connait une majoration M de $|f^{(4)}(x)|$, le pas choisi h qui permet d'avoir au plus une erreur ε vérifie nécéssairement :

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4} M \leq \varepsilon$$

d'où

$$\frac{(b-a)h^4 M}{180} \leq \varepsilon$$

ou encore :

$$h \leq \sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{(b-a)M}}$$

Définition 7 (système linéaire)**.** Soit $n, p \geqslant 1$ des entiers. Un système linéaire $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}\,x_p & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}\,x_p & = & b_2 \\ & & \cdots & & & & & & \\ a_{n1}\,x_1 & + & a_{p2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{np}\,x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{b}.$$

On appelle $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice des coefficients du système. $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est le vecteur du second membre. Le vecteur $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est une solution du système si et seulement si

$$Ax = b.$$

Le système homogène associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0. Deux systèmes linéaire sont équivalents s'ils admettent les mêmes solutions. Dans ce cas, on est assuré de l'existence et de l'unicité de la solution si la matrice A est inversible ou si le système homogène $Ax = 0$ admet seulement la solution nulle.

La solution d'un système linéaire de type $Ax = b$ peut être calculée, par exemple, par la formule de CRAMER. Cependant, cette formule est d'une utilité pratique limitée à cause du calcul des déterminants qui est très coûteux. Pour cette raison, des méthodes numériques alternatives aux formules de CRAMER ont été développées. Elles sont dites directes si elles fournissent la solution du système en un nombre fini d'étapes, itératives si elles nécessitent (théoriquement) un nombre infini d'étapes. Notons dès à présent que le choix entre une méthode directe et une méthode itérative pour la résolution d'un système dépend non seulement de l'efficacité théorique des algorithmes, mais aussi du type de matrice, des capacités de stockage en mémoire et enfin de l'architecture de l'ordinateur.

5.1. **Méthode (directe) d'élimination de GAUSS.** La méthode du pivot de GAUSS transforme le système $Ax = b$ en un système équivalent de la forme $Ux = y$, où U est une matrice triangulaire supérieure et y est un second membre convenablement modifié. Enfin on résout le système triangulaire $Ux = y$ qui est plus facile à résoudre.

Définition 8. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n;\, 1\leq j\leq n}$ la matrice des coefficients du système $Ax = b$.

Étape k : en permutant éventuellement deux lignes du système, on peut supposer $a_{kk} \neq 0$ (appelé pivot de l'étape k). On transforme toutes les lignes L_i avec $i > k$ comme suit :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} L_k.$$

En réitérant le procédé pour k de 1 à n, on aboutit à un système triangulaire supérieur.

Exemple 11. Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Résolution par la méthode du pivot de GAUSS :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

Alors, $x_4 = 0, x_3 = 0, x_2 = 0$ et $x_1 = 1$.

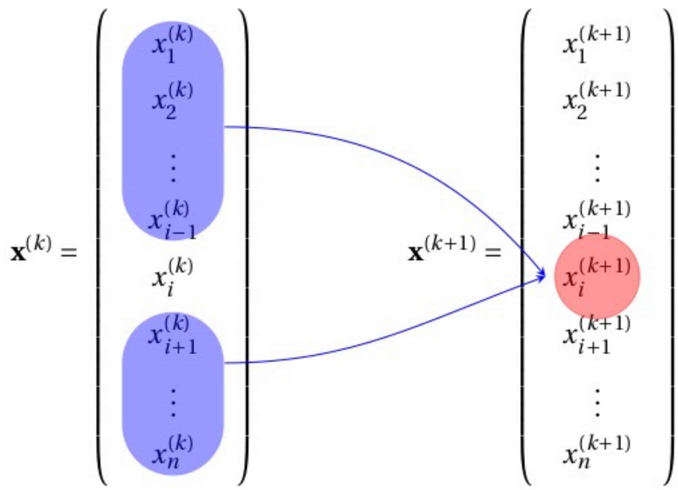
5.2. **Méthodes itératives.** Une méthode itérative pour le calcul de la solution d'un système linéaire $Ax = b$ avec $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une méthode qui construit une suite de vecteurs $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})^T \in \mathbb{R}^n$ convergent vers le vecteur solution exacte $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ pour tout vecteur initiale $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^T \in \mathbb{R}^n$ lorsque k tend vers $+\infty$. Dans cette partie du cours, on ne verra que deux méthodes itératives :

- La méthode de JACOBI
- La méthode de GAUSS-SEIDEL

5.2.1. *La méthode de JACOBI :.*

Définition 9. Soit $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ un vecteur donné. La méthode de JACOBI définit la composante x_i^{k+1} du vecteur x^{k+1} à partir des composantes x_j^k du vecteur x^k pour $j \neq i$ de la manière suivante :

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^k}{a_{ii}}, \qquad i = 1, \dots, n$$



Proposition 1. *Si la matrice A est à diagonale dominante stricte, la méthode de JACOBI converge.*

5.2.2. *La méthode de GAUSS-SEIDEL :.* La méthode de GAUSS-SIDEL est une amélioration de la méthode de JACOBI dans laquelle les valeurs calculées sont utilisées au fur et à mesure du calcul et non à l'issue d'une itération comme dans la méthode de JACOBI.

Définition 10. Soit $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ un vecteur donné. La méthode de GAUSS-SIDEL définit la composante x_i^{k+1} du vecteur x^{k+1} à partir des composantes x_j^{k+1} du vecteur x^{k+1} pour $j < i$, et des composantes x_j^k du vecteur x^k pour $j \geq i$ de la manière suivante :

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{k}}{a_{ii}}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_{i-1}^{(k)} \\ x_i^{(k)} \\ x_{i+1}^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_{i-1}^{(k+1)} \\ x_i^{(k+1)} \\ x_{i+1}^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

Proposition 2. *Si la matrice A est à diagonale dominante stricte ou si elle est symétrique et définie positive, la méthode de GAUSS-SEIDEL converge.*

Exemple 12. Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

mis sous la forme

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{y}{2} - \frac{z}{4}, \\ y = 1 + \frac{x}{2}, \\ z = \frac{9}{4} - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}. \end{cases}$$

Soit $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)$ le vecteur initial.

⋆ En calculant les itérées avec la méthode de JACOBI on trouve

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{0}{2} - \frac{0}{4} \\ 1 + \frac{0}{2} \\ \frac{9}{4} - \frac{0}{2} - \frac{0}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9/4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} - \frac{9/4}{4} \\ 1 + \frac{1}{2} \\ \frac{9}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/16 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3/2}{2} - \frac{3/2}{4} \\ 1 + \frac{-1/16}{2} \\ \frac{9}{4} - \frac{-1/16}{2} - \frac{3/2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/8 \\ -1/32 \\ 61/32 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{-1/32}{2} - \frac{61/32}{4} \\ 1 + \frac{-1/8}{2} \\ \frac{9}{4} - \frac{-1/8}{2} - \frac{-1/32}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/128 \\ 15/16 \\ 265/128 \end{pmatrix}.$$

La suite $\mathbf{x}^{(k)}$ converge vers $(0, 1, 2)$ la solution du système.

⋆ En calculant les itérées avec la méthode de GAUSS-SEIDEL on trouve

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{0}{2} - \frac{0}{4} \\ 1 + \frac{1}{2} \\ \frac{9}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3/2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 11/8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3/2}{2} - \frac{11/8}{4} \\ 1 + \frac{-3/32}{2} \\ \frac{9}{4} - \frac{-3/32}{2} - \frac{61/64}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/32 \\ 61/64 \\ 527/256 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{-3/32}{2} - \frac{61/64}{4} \\ 1 + \frac{9/1024}{2} \\ \frac{9}{4} - \frac{9/1024}{2} - \frac{2047/2048}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/1024 \\ 2047/2048 \\ 16349/8192 \end{pmatrix},$$

La suite $x^{(k)}$ converge vers $(0, 1, 2)$ la solution du système.

Références

[1] Santanu Saha Ray, *Numerical analysis with algorithms and programming*, CRC Press Taylor & Francis Group (2016).

[2] Jean-Pierre Provost et Gérard vallée, *LES MATHS EN PHYSIQUE, La physique à travers le filtre des mathématiques avec éléments d'analyse numérique. Cours et applications,* 3^e *édition*, Dunod (2011).

[3] Luc Jolivet et Rabah Labbas, *Analyse et analyse numérique, LAVOISIER* (2005).