Université Mohammed Premier
Faculté Pluridisciplinaire de Nador
Département de Mathématiques

Filières SMA
Semestre S3
Année universitaire: 2021-2022

TD d'Analyse 4
Série 2: Suites de fonctions

Exercice 1.
On suppose qu'une suite de fonctions (f_n) de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ converge uniformément vers $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et on considère une suite (x_n) d'éléments de $[a, b]$ convergente vers x. Montrer que $f_n(x_n)$ converge vers $f(x)$.

Exercice 2.
Soit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que (f_n) converge uniformément sur $[0, 1[$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 3.
(Théorème de Dini). Soient des fonctions $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues telles que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. On suppose que pour tout $x \in [a, b]$, la suite réelle $(f_n(x))$ est décroissante. On désire montrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme.

1) Justifier l'existence de
$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty$$
.

2) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que
$$\|f_n\|_\infty = f_n(x_n).$$

3) En observant que pour tout $p \leq n$,
$$f_n(x_n) \leq f_p(x_n),$$
montrer que $\|f_n\|_\infty \to 0$ et conclure.

Exercice 4.
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n : [0, 1] \to R$ définie par
$$f_n(x) = n^\alpha x(1 - x)^n$$

1) Etudier la limite simple de (f_n).

2) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 5.
Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Montrer que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 6.
On pose $f_n(x) = x^n \ln x$ avec $x \in]0, 1]$ et $f_n(0) = 0$. Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$.

Exercice 7.
Etudier la convergence uniforme de $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1 + x^n)}$.

Exercice 8.
On pose $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$ avec $x \in \mathbb{R}^+$. Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 9.
On pose $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$ avec $x \in \mathbb{R}^+$. Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 10.
On pose $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ avec $x \in \mathbb{R}$. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$ puis sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 11.
On pose $f_n(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right)$ pour $x > 0$ et $f_n(0) = 0$. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[-a, a]$ avec $a > 0$.

Exercice 12.
Soit $f_n : [0,1] \to R$ définie par $f_n(x) = n^2x(1-nx)$ si $x \in [0, 1/n]$ et $f(x) = 0$ sinon.

1) Etudier la limite simple de la suite (f_n).

2) Calculer
$$\int_0^1 f_n(t)dt.$$
Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?

3) Etudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$ avec $a > 0$.