الكلية متعددة التخصصات الناظور
Faculté Pluridisciplinaire de Nador

Probabilités

Chapitre 1: Probabilité sur une algèbre

Toufik Chaayra

Département : Mathématiques
Filière : SMA
Module : M33
Année universitaire : 2021/2022

29 Mars, 2022

Introduction

Expérience aléatoire :

- Les phénomènes liés au hasard ce sont des phénomènes si reproduits plusieurs fois, se déroulent différemment d'une expérience à l'autre et donnant un résultat imprévisible.
- On dit d'une expérience qu'elle est aléatoire si son résultat ne peut être prévu à priori.

Espace fondamental :

- L'ensemble de tous les résultats possibles, pour une expérience aléatoire donnée, est dit espace fondamental.
- Il est noté Ω.
- Un élément ω de Ω est dit "résultat élémentaire".

Introduction

Événements :

- On peut identifier un événement aléatoire A avec la partie de Ω dont tous les éléments réalisent A.
- L'ensemble de tous les événements est l'ensemble de tous les sous-ensembles de Ω : $\mathcal{P}(\Omega)$.
- $\operatorname{Card} \mathcal{P}(\Omega) = 2^{\operatorname{Card} \Omega}$.

Tribu ou σ-algèbre :

Soit Ω un espace fondamental. Une famille $\mathcal{A}$ de parties de Ω est une tribu (ou σ-algèbre), si :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. $\forall A \in \mathcal{A}, A^c \in \mathcal{A}$.
3. $\forall \, (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'événements de $\mathcal{A}$, $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ s'appelle un espace probabilisable.

Tribu ou σ-algèbre

Exemple

Soit $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$. On peut définir plusieurs tribus sur Ω :

- $\mathcal{F}_0 = \mathcal{P}(\Omega)$ tribu complète (la plus grande).
- $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ tribu triviale (la plus petite).
- $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$
- $\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3, \ldots, 6\}, \{2, 3, \ldots, 6\}, \{1, 3, \ldots, 6\}, \{1, 2\}\}$

Tribu ou σ-algèbre

Conséquences :

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. $\forall \, (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'événements de $\mathcal{A}$, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Preuve :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$, et comme $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire, alors $\Omega^c = \emptyset \in \mathcal{A}$.
2. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}$,

   d'où $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c \in \mathcal{A}$, par suite $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Exemples de tribus

Définition

On appelle tribu des Boréliens de $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, la tribu engendrée par les intervalles ouverts $]a, b[, a > b \in \mathbb{R}$.

Définition

La tribu borélienne ou tribu de Borel de $\mathbb{R}^d$, notée $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$), est la plus petite des tribus sur $\mathbb{R}^d$ contenant tous les pavés de $\mathbb{R}^d$ i.e. les parties de la forme $]a_1, b_1] \times]\, a_2, b_2] \times \ldots \times]\, a_d, b_d]$.

Définition

Soit A une partie quelconque de $\mathcal{P}(\Omega)$. On appelle tribu engendrée par A et on note $\sigma(A)$ l'intersection de toutes les tribus contenant A.

Mesure

Définition

Une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application m de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^+ \bigcup \{+\infty\}$ telle que

- $m[\emptyset] = 0$.
- Si $A_1 \dots A_n \dots$ sont des parties de $\mathcal{A}$ deux à deux disjointes, alors

$$m\left(\bigcup_{n=0}^{n=\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} m\left(A_n\right).$$

Exemples de Mesures

Exemple

- Mesure de Dirac sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega))$: soit $a \in \Omega$,

$$\delta_a(A) = 1_A(a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \in A \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

- Mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$: c'est la mesure qui généralise la notion de longueur des intervalles

$$\lambda(]a, b]) = b - a.$$

- Mesure de Lebesgue sur $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$: c'est la mesure qui généralise la notion de longueur des pavés

$$\lambda\left(]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \ldots \times]a_d, b_d]\right) = \left(b_1 - a_1\right) \times \left(b_2 - a_2\right) \times \ldots \times \left(b_d - a_d\right).$$

Mesure de Probabilité

Définition

- Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.
- On appelle probabilité (ou mesure de probabilité) toute mesure P sur $\mathcal{A}$ telle que $P(\Omega) = 1$.
- On dit que le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

- Une mesure sur $\mathcal{A}$:
  C'est une fonction d'ensemble positive, non identiquement égale à $+\infty$, σ-additive sur $\mathcal{A}$:
  Pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, dont la réunion $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$, on a :
  $$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right).$$
- $P(\Omega) = 1$.

Mesure de Probabilité

Remarque

- Si P est une probabilité, observons que P est à valeurs dans $[0, 1]$ puisque pour tout événement $A, P(A) \leq P(\Omega) = 1$.
- De plus, $P(\emptyset) = 0$.

Exemple

Soient $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. On d'éfinit :

- $P_1(\{i\}) = \frac{1}{6}$ (dé équilibré). Dans ce cas,
$$P_1(\{1, 3, 6\}) = \frac{1}{2}$$
- $P_2(\{i\}) = \frac{1}{7}, i \leq 5$ et $P_2(\{6\}) = \frac{2}{7}$ (dé pipé). Dans ce cas
$$P_2(\{1, 3, 6\}) = \frac{4}{7}$$

Exemples de Probabilités usuelles

1. La probabilité de Dirac au point $a \in \mathbb{R}$, δ_a.
2. La probabilité de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$:
$$P_{\mathcal{B}(1,p)} := p\delta_1 + (1-p)\delta_0.$$
3. La probabilité binomiale de paramètre $0 < p < 1$ et n :
$$P_{\mathcal{B}(n,p)} := \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \delta_k.$$
4. La probabilité de Poisson de paramètre λ :
$$P_{\mathcal{P}(\lambda)} := \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k.$$
5. La probabilité normale standard :
$$P_{\mathcal{N}(0,1)}(A) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Mesure de Probabilité

Propriétés

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soient A, B et $A_n, \forall n \in \mathbb{N}$ des événements de $\mathcal{A}$, alors :

1. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
2. $P\left(A^c\right) = 1 - P(A)$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. Si $\left(A_n\right)_n$ est une suite croissante, ou décroissante, d'événements alors $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(A_n\right)$
5. $P\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} P\left(A_n\right)$

Preuve :

1. $$\begin{aligned} A \subset B &\Rightarrow B = A \cup \left(B \cap A^c\right) \\ &\Rightarrow P(B) = P(A) + P\left(B \cap A^c\right) \\ &\Rightarrow P(B) \geq P(A) \end{aligned}$$

Mesure de Probabilité

Preuve :

2. $P\left(A \cup A^{c}\right)=P(\Omega)=1=P(A)+P\left(A^{c}\right)$
   $\Rightarrow P\left(A^{c}\right)=1-P(A)$
3. $A \cup B=A \cup\left(A^{c} \cap B\right) \Rightarrow P(A \cup B)=P(A)+P\left(A^{c} \cap B\right)$
   mais, $B=(A \cap B) \cup\left(A^{c} \cap B\right)$
   donc $P(B)=P(A \cap B)+P\left(A^{c} \cap B\right)$
   d'où $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$
4. Soit $\left(A_{n}\right)_{n \geq 1}$ une suite croissante d'événements,
   donc $A_{n} \subset A_{n+1}, \forall n \geq 1$
   alors $\lim\limits_{n \rightarrow+\infty} A_{n}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{n}$
   On a :

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n} & =A_{1} \cup A_{2} \cup A_{3} \cup \cdots \cup A_{n} \cup A_{n+1} \cup \cdots \\
& =A_{1} \cup\left(A_{2}-A_{1}\right) \cup\left(A_{3}-A_{2}\right) \cup \cdots \cup\left(A_{n+1}-A_{n}\right) \cup \cdots
\end{aligned}$$

Mesure de Probabilité

Preuve :

alors :

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2 - A_1\right) + P\left(A_3 - A_2\right) + \cdots + P\left(A_{n+1} - A_n\right) + \cdots$$

(car les événements $A_1, A_2 - A_1, A_3 - A_2, \cdots$ sont deux à deux incompatibles)

et

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\lim_{n \to +\infty} A_n\right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[P\left(A_1\right) + P\left(A_2 - A_1\right) + P\left(A_3 - A_2\right) + \cdots + P\left(A_{n+1} - A_n\right)\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} P\left(A_n\right) \left(\text{car } A_n = A_1 \cup \left(A_2 - A_1\right) \cup \cdots \cup \left(A_n - A_{n-1}\right)\right)$$

Mesure de Probabilité

Preuve :

- $(A_n)_n$ suite décroissante $\Leftrightarrow$ $(A_n^c)_n$ suite croissante,

  donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(A_n^c\right) = P\left(\lim\limits_{n\to+\infty} A_n^c\right)$

  $$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1 - P\left(A_n\right)\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c\right) = P\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n}\right)$$

  $$= 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$$

  $$\Rightarrow 1 - \lim_{n\to} P\left(A_n\right) = 1 - P\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right)$$

  $$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P\left(A_n\right) = P\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right)$$

Mesure de Probabilité

Preuve :

5. Comme $A \cup B = A \cup (B - A)$,
alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$
Comme $(B - A) \subset B$,
alors d'après **(1)**, $P(B - A) \leq P(B)$
par suite $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
et plus généralement $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)$
Soit $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \lim_{n \to +\infty} \bigcup_{k=1}^{n} A_k$,
d'après **(4)**,

$$P(A) = \lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} P\left(A_k\right) = \sum_{n} P\left(A_n\right)$$

Mesure de Probabilité

Propriétés

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(Inégalité de Bonferroni)

- Pour tout entier $n \geq 2$, et tous événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$, on a :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n}^{n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

(Formule de Poincaré)

Mesure de Probabilité

Inégalité de Boole

$$P(A \cap B) \geq 1 - P\left(A^c\right) - P\left(B^c\right)$$

Pour tout A et B événements.

Preuve :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) \leq 1 + P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow 1 - P\left(A^c\right) + 1 - P\left(B^c\right) \leq 1 + P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow 1 - P\left(A^c\right) - P\left(B^c\right) \leq P(A \cap B).$$

Ensemble négligeable

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est dit négligeable pour P si $P(A) = 0$.

Définition

On dit qu'une propriété est vraie presque sûrement (p.s.) si elle est vraie en dehors d'un ensemble négligeable.

Fonction mesurable

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(E, \mathcal{E})$ deux espaces mesurables.
Une application $f : \Omega \to E$ est dite $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$-mesurable, si $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ pour tout $A \in \mathcal{E}$, où

$$f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in A\}.$$

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $B \in \mathcal{A}$ avec $P(B) > 0$. On définie la probabilité conditionnelle par :

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P_B)$ est bien un espace probabilisé ; $P_B(.) = P(./B)$ est bien une probabilité.

Preuve :

1. $0 \leq P_B(A) \leq 1; \quad \forall A \in \mathcal{A}$
2. $P_B(\Omega) = \dfrac{P(B \cap \Omega)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$
3. $P_B\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \dfrac{P\left(B \cap \left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right)}{P(B)} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\infty} P\left(B \cap A_i\right)}{P(B)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} P_B\left(A_i\right)$

Probabilité conditionnelle

Remarque

Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ avec $P(A_1) > 0$ et $P(A_2) > 0$.
Alors : $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1/A_2)\, P(A_2) = P(A_2/A_1)\, P(A_1)$

Théorème

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé.*
Soit $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ *avec* $P\left(\cap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$ *alors :*

$$P\left(\cap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)\, P(A_3/A_1A_2) \cdots P\left(A_n/ \cap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

Preuve :

- On a : $A_1 \supset A_1A_2 \supset \cdots \supset \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i \supset \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i$
  et comme $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$.
  alors $P(A_1) > 0; P(A_1A_2) > 0; \cdots ; P\left(\bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right) > 0$
  Donc $P\left(A_k/ \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right)$ sont bien définies $(k = 2, \cdots, n)$.

Probabilité conditionnelle

Preuve :

- (Par récurrence)
  Pour $\underline{n=2}$ (c'est la définition) Supposons la formule est vraie pour $n-1$ événements et démontrons qu'elle est vraie pour n.

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) &= P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right) \\
&= P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) P\left(A_n / \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \\
&= P\left(A_1\right) P\left(A_2/A_1\right) \cdots P\left(A_{n-1} / \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right) P\left(A_n / \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)
\end{aligned}
$$

Probabilité conditionnelle

Théorème des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements (une partition de Ω : i.e. $\bigcup_n B_n = \Omega$ et $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$) tels que $P(B_n) > 0; \forall n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a : $P(A) = \sum_n P(B_n) \cdot P(A/B_n)$

Preuve :

Comme $A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_n B_n\right) = \bigcup_n (A \cap B_n)$
avec $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset$, pour $i \neq j$
On a :

$$P(A) = P\left(\bigcup_n (A \cap B_n)\right) = \sum_n P(A \cap B_n)$$
$$= \sum_n P(B_n) \cdot P(A/B_n)$$

Probabilité conditionnelle

Théorème de Bayes

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $(B_n)_n$ une suite d'évènements disjoints de $\mathcal{A}$ tels que $P(B_n) > 0$; $n = 1, 2, \ldots$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$. Soit $A \in \mathcal{A}$ avec $P(A) > 0$, alors :

$$P(B_j/A) = \frac{P(B_j)\,P(A/B_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \cdot P(A/B_i)}; \quad j = 1, 2, \ldots$$

Preuve :

On a : $\forall j, P(B_j/A) = \dfrac{P(B_j \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(B_j)\,P(A/B_j)}{P(A)}$

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(B_i)\,P(A/B_i)$$

et alors, on obtient le résultat énoncé.

Indépendance des évènements

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Deux événements A et B sont dits indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Conséquence

Si $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, les évènements A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(A/B) = P(A)$ ou $P(B/A) = P(B)$.
La réalisation de l'un des événements A ou B n'a aucune influence sur la réalisation de l'autre.

Remarque

Soit B un événement quelconque et A un énénement tel que $P(A) = 0$.
Comme $A \cap B \subset A$, alors $P(A \cap B) = 0$ et $P(A).P(B) = 0$.
Donc, les événements A et B sont indépendants.

Indépendance des évènements

Remarque

Deux événements incompatibles A et B (avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$) ne sont pas indépendants.
En effet; $P(A)P(B) > 0$ alors que $P(A \cap B) = 0$.

Proposition

Si A et B sont deux événements indépendants, alors :

1. A et $\overline{B}$ indépendants.
2. $\overline{A}$ et B indépendants.
3. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants.

Indépendance des évènements

Preuve :

1. On a : $P(A \cap \overline{B}) = P(A - AB) = P(A) - P(AB)$
   (car en général $P(E - F) = P(E) - P(E \cap F)$ et si $F \subset E$ alors $P(E - F) = P(E) - P(F)$)
   Donc
   $$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A)P(B) \text{ (car } A \text{ et } B \text{ sont indépendants)} \\ &= P(A)[1 - P(B)] \\ &= P(A)P(\overline{B}) \end{aligned}$$
2. (Analogue ou par changement de rôles de A et de B !)
3. On a
   $$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) \text{ (car } A \text{ et } B \text{ sont indép.} \\ &= P(\overline{A}) - P(B)[1 - P(A)] = P(\overline{A}) - P(B)P(\overline{A}) \\ &= P(\overline{A})[1 - P(B)] = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \end{aligned}$$

Indépendance des évènements

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Les évènements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont dits indépendants (ou indépendants dans leur ensemble) si pour toute partie $\{i_1, \cdots, i_k\} \subset \{1, \cdots, n\}$ on a :
$P\left(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) P\left(A_{i_2}\right) \cdots P\left(A_{i_k}\right); k = 2, 3, \ldots, n$

Dans le cas de trois évènements A, B et C, on a : A, B, C sont indépendantes (dans leur ensemble) si, et seulement si,

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(AC) &= P(A)P(C) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \\ P(ABC) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

Indépendance des évènements

Remarque

L'indépendance dans l'ensemble implique l'indépendance deux à deux. Mais, la réciproque n'est pas vraie.

Intégration

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesurable muni d'une mesure m.

- f étagée : $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k 1_{A_k} \Longrightarrow$
$$\int f dm = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k m\left(A_k\right)$$
- f est mesurable positive : $\Longrightarrow$
$$\int f dm = \sup_{0 \leq g \text{ étagée } \leq f} \int g dm$$
- Cas général: on dit que f est intégrable si elle est mesurable et que $f^{+} = \max(f, 0)$ et $f^{-} = -\min(f, 0)$ sont d'intégrale finie et on pose alors
$$\int f dm = \int f^{+} dm - \int f^{-} dm$$