الكلية متعددة التخصصات الناظور

Faculté Pluridisciplinaire de Nador

Probabilités

Chapitre 2 : Variable aléatoire

Toufik Chaayra

Département : Mathématiques
Filière : SMA
Module : M33
Année universitaire : 2021/2022

07 Avril, 2022

Variable aléatoire

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Une variable aléatoire réelle (v.a.r.) X est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Définition

La tribu engendrée par une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est l'ensemble

$$\sigma(X) = \left\{X^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}$$

Définition

Soit X une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. La loi de X est la probabilité P_X sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie comme mesure-image de P par X : pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P_X(A) = P[X \in A] = P[\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A]$$

Formulation élémentaire

Exemple

Soient $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$. On définit :

- $X_1(\omega) = \omega$:

$$P_{X_1}(i) = P(X = i) = P\left(\{\omega \in \Omega, X_1(\omega) = i\}\right) = P(\{i\}) = \frac{1}{6}$$

- $X_2(\omega) = 1_{\{1,2,4\}}(\omega)$:

$$P_{X_2}(1) = P\left(X_2 = 1\right) = P(\{1, 2, 4\}) = \frac{1}{2},\ P_{X_2}(0) = P\left(X_2 = 0\right) = \frac{1}{2}.$$

Formulation élémentaire

Définition

Soit X une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. La loi de X est la probabilité P_X sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par,

$P_X(A) = P[X \in A] = \sum_{i \in A} p_i$ cas discrèt où on donne les probabilités p_i,

$$P_X(A) = P[X \in A] = \int_A f(x)dx \text{ cas "continu!!!" où on donne}$$

la densité $f(x)$,

$$E(X) = \begin{cases} \sum kp_k, & \text{cas discrèt} \\ \int xf(x)dx & \text{cas "continu!!!"} \end{cases}$$

Passons à une formulation probabiliste

Oublions $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Remarque

On écrira par exemple "soit X une variable de Bernoulli de paramètre p'', c'est-à-dire telle que

$$P_X(1) = 1 - P_X(0) = p$$

ou plus exactement

$$P\{X = 1\} = 1 - P\{X = 0\} = p$$

Absolue continuitée

Définition

Soient P et Q deux probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$

- On dit que P est absolument continue par rapport à Q et on écrit $P \ll Q$ si pour tout $A \in \mathcal{F}$,

$$Q[A] = 0 \Longrightarrow P[A] = 0$$

- On dit que P et Q sont équivalentes et on écrit $P \sim Q$ si pour tout $A \in \mathcal{F}$.

$$P[A] = 0 \Longleftrightarrow Q[A] = 0$$

Théorème de Radon-Nikodym

Théorème

Une Probabilité P est absolument continue par rapport à une mesure Q ssi il existe une fonction f mesurable positive telle que

$$P(A) = \int_A f dQ \tag{1}$$

on dit que P a la densité f par rapport Q et on écrit $dP = f dQ$.

Remarque

(1) est equivalent à

$$\int g dP = \int g f dQ$$

Pour toute fonction g mesurable positive ou mesurable P-intégrable

v.a. discrète et v.a. absolument continue

Définition

On dit qu'une variable aléatoire est discrète si sa loi P_X est une combinaison linéaire finie ou dénombrable de masses de Dirac :

$$P_X = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \delta_{a_n}.$$

où $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs ou nuls, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs de $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ et Ω désigne l'ensemble des a_n pour lesquels $p_n > 0$.

Définition

Si la loi de X est absolument continue par rapport à une mesure μ et que

$$dP_X = f d\mu$$

on dit que X admet la densité f par rapport à μ. Si μ est la mesure de Lebesgue, on dit simplement que X est absolument continue de densité f.

Variables aléatoires discrètes

Exemple

1. Variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$ ($X \sim \mathcal{B}(1, p)$) :
$$P_X = p\delta_1 + (1-p)\delta_0.$$
2. Variable aléatoire de loi binomiale de paramètre $0 < p < 1$ et $n \in \mathbb{N}$ ($X \sim \mathcal{B}(n, p)$) :
$$P_X = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \delta_k.$$
3. Variable aléatoire de Poisson de paramètre λ ($X \sim \mathcal{P}(\lambda)$) :
$$P_X = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k.$$

Variables aléatoires discrètes

Exemple

4. Variable aléatoire géométrique de paramètre $0 < p < 1$ $(X \sim \mathcal{G}(p))$:

$$P_X = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}\delta_k.$$

5. Variable aléatoire uniforme-discrète de paramètre n ou équiprobabilité sur $\{1, 2, \dots, n\}$ $(X \sim \mathcal{U}(n))$

$$P_X = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_k.$$

6. Variable aléatoire uniforme-discrète de paramètre $a < b$ ou équiprobabilité sur $\{a, a+1, \dots .b\}$ $(X \sim \mathcal{U}(\{a, a+1, \dots .b\}))$

$$P_X = \frac{1}{b-a+1}\sum_{k=a}^{b} \delta_k.$$

Variables aléatoires absolument continues

Exemple

1. Variable aléatoire uniforme-continue sur $[a,b]$ $X \sim \mathcal{U}([a,b])$ de densité
$$f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x).$$
2. Variable exponentielle de paramètre $\theta > 0$, $X \sim \mathcal{E}(\theta)$ de densité
$$f(x) = \theta e^{-\theta x} 1_{]0,+\infty[}(x).$$
3. Variable gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de densité
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Variables aléatoires absolument continue

Exemple

4. Variable de loi Gamma ($X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$) de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ de densité

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1} 1_{\mathbb{R}_+^*}(x) \text{ où } \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

5. Variable de loi Bêta de paramètres $a > 0$ et $b > 0$ ($X \sim B\hat{e}ta(a, b)$) de densité

$$f(x) = \frac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} 1_{[0,1]}(x) \text{ où } \beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Fonctions de répartition d'une variable aléatoire réelle

Définition

On appelle fonction de répartition de X, ou de sa loi P_X, et on note F_X, la fonction sur $\mathbb{R}$ définie par

$$F_X(t) = P_X(]-\infty, t]) = P(\omega : X(\omega) \leq t) = P(X \leq t), t \in \mathbb{R}$$

Proposition

1. $0 \leq F \leq 1$,
2. F est croissante, continue à droite avec la limite à gauche suivante

   $$F\left(t^-\right) = P_X(]-\infty, t[) = P(X < t).$$

   De plus

   $$P_X(\{t\}) = P(X = t) = F(t) - F\left(t^-\right),$$

   donc F est continue en t ssi $P(X = t) = 0$.
3. $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$.

Fonction de répartition d'une v.a.r. : Proposition

Preuve :

1. vient de ce que P est à valeurs dans $[0;1]$.
2. ***Croissance :*** Soit $x \leq y$; alors $]-\infty,x] \subset]-\infty,y]$ par suite $F(x) = P_X(]-\infty,x]) \leq P_X(]-\infty,y]) = F(y)$,
   Continuité : Soit une suite numérique $(t_n)_n$ décroissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t'$ alors $(]-\infty,t_n])_n$ est une suite décroissante d'événements.
   $$\bigcap_{n=1}^{\infty}]-\infty,t_n] =]-\infty,t']$$
   $$\lim_{n\to\infty} F(t_n) = \lim_{n\to\infty} P(X \leq t_n) = \lim_{n\to\infty} P_X(]-\infty,t_n])$$
   $$= P_X\left(\lim_{n\to\infty}]-\infty,t_n]\right) = P_X\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]-\infty,t_n\right]\right)$$
   $$= P_X(]-\infty,t']) = F(t')$$

- De plus

$$P(X=t) = P(X \leq t) - P(X < t) = F(t) - F(t^-),$$

Fonction de répartition d'une v.a.r. : Proposition

donc F est continue en x ssi $P(X = t) = 0$.

3. En remarquant que
$$\bigcap_{n \geq 1} \{X \leq -n\} = \emptyset.$$
Donc
$$0 = P(\emptyset) = \lim_{n \to +\infty} P(X \leq -n) = \lim_{n \to +\infty} F(-n) = \lim_{x \to -\infty} F(x).$$
Tandis que,
$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{n \geq 1} \{X \leq n\}\right) = \lim_{n \to +\infty} P(X \leq n) = \lim_{x \to +\infty} F(x)$$

Fonction de répartition d'une v.a.r.

Proposition

La fonction de répartition caractérise la loi, c'est-à-dire $F_X = F_Y$ si et seulement si $P_X = P_Y$.

Preuve : Si $F_X = F_Y$ alors $P_X(]-\infty, t]) = P_Y(]-\infty, t])$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La famille $\mathcal{C}$ de ces intervalles $]-\infty, t], t \in \mathbb{R}$, est stable par intersection finie et engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Par le Théorème de **Dynkin**, l'égalité $P_X(A) = P_Y(A)$ s'étend à $A \in \sigma(\mathcal{C})$, ie. $P_X = P_Y$. La réciproque est triviale.

Proposition

Une fonction de répartition admet au plus un nombre dénombrable de points de discontinuité.

Preuve : Un point de discontinuité t de F est caractérisé par $F(t) - F(t^-) > 0$, puisque F est continue à droite. Poser alors, pour tout $n \geq 1$,
$$D_n = \left\{t \in \mathbb{R}; F(t) - F(t^-) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

Fonction de répartition d'une v.a.r.

Preuve :
L'ensemble des points de discontinuité est $D = \bigcup_{n\geq 1} D_n$. Puisque $0 \leq F \leq 1$ et par croissance de F, nécessairement

$$\operatorname{card}(D_n) \leq n \quad (\text{ i.e., } D_n \text{ ne peut contenir plus de n + 1 points})$$

Sinon il existe au moins $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1} \in D_n$ ce qui implique la conradiction suivante

$$\begin{aligned} 1 = P_X(\mathbb{R}) \geq & \left(F(t_1) - F\left(t_1^-\right)\right) + \left(F(t_2) - F\left(t_2^-\right)\right) + \ldots \\ & + \left(F(t_{n+1}) - F\left(t_{n+1}^-\right)\right) \geq \frac{n+1}{n} > 1 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points de discontinuité D est au plus dénombrable.

Fonction de répartition d'une v.a.r.

Proposition

Soit X une variable de fonction de répartition F alors si

1. X est discrète telle que $P_X = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \delta_{a_n}$, alors

$$F(t) = \sum_{a_n \leq t} p_n,$$

2. X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, $dP_X = f d\lambda$ alors

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx, \text{ et } F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx$$

Densité de probabilité

Remarque

On observe que la densité f doit vérifier $f(x) \geq 0$ et

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$$

Plus généralement on a la définition suivante.

Définition

Une fonction $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable est appelée densité de probabilité si

- f est positive,
- f est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ d'intégrale 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x_1, \ldots, x_n\right) dx_1 \ldots dx_n = 1$$

Fonctions de répartition et densité de probabilité

Proposition

Soit X une variable de fonction de répartition F et de densité f, si

1. f est continue sur $[a, b]$, alors F est dérivable sur $[a, b]$ et on a $F' = f$ sur $[a, b]$.
2. F est λ-prèsque partout dérivable, alors $f = F'$, λ-p.p.

Exemples de fonctions de répartition

1)- $F = A_{[a,\infty[}$ est la fonction de répartition de la masse de Dirac δ_a.

2)- Si $X \sim \mathcal{B}(1,p)$, alors

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1-p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq t \end{cases}$$

3)- Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors

$$F_X(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} 1_{[k,\infty[}(t) = \sum_{k \leq \min\{n,[t]\}} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

4)- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors

$$F_X(t) = \sum_{k \leq [t]} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

5)- Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors

$$F_X(t) = \sum_{k \leq [t]} p(1-p)^{k-1} = 1 - (1-p)^{[t]}.$$

Exemples de fonctions de répartition

6)- Si $X \sim \mathcal{U}(n)$, alors

$$F_X(t) = \frac{[t]}{n}$$

7)- Si $X \sim \mathcal{U}([a,b])$ alors

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq t < b \\ 1, & b \leq t \end{cases}$$

8)- Si $X \sim \mathcal{E}(\theta)$ alors de densité

$$F_X(t) = \left(1 - e^{-\theta t}\right) 1_{[0,+\infty[}(t).$$

9)- Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors

$$F_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Type de variables aléatoires

Définition

Une variable aléatoire est dite continue si elle ne possède pas d'atome : $P(X = x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (i.e sa fonction de répartition est continue).

Proposition

Une variable aléatoire réelle absolument continue est continue mais la réciproque est fausse.

Définition

Une variable aléatoire est dite singulière lorsqu'elle est continue mais pas absolument continue. C'est-à-dire qu'une loi singulière ne possède ni atome, ni densité.

Type de variables aléatoires

Théorème

Soit F une fonction de répartition. Alors il existe trois fonctions de répartition F_1 discrète, F_2 absolument continue et F_3 singulière (i.e. continue mais non absolument continue) et trois nombres réels α_1, α_2 et α_3 positifs et de somme 1 tel que F puisse s'écrire sous la forme

$$F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3$$

Remarque

Il y a quatre types de variables aléatoires :

- Discrète,
- Absolument continue,
- Singulière,
- Mixte.

Exemple

Soit la fonction de répartition F d'une loi variable alétoire X, donnée par

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t^2}{6}, & 0 \leq t < 2 \\ \frac{3}{4}, & 2 \leq t < 3 \\ 1, & t \geq 3 \end{cases}$$

La partie continue est dérivable presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité

$$f(x) = \frac{x}{3} 1_{[0,2[}(x)$$

La mesure de probabilité P_X se représente donc comme

$$P_X = \mu_d + \mu_c = \frac{1}{12}\delta_2 + \frac{1}{4}\delta_3 + \mu_c = \frac{1}{3}P_d + \frac{2}{3}P_c, \quad d\mu_c = f d\lambda$$

Espérance mathématique

Définition

Soit X une v.a. discrète de loi de probabilité
$P(X = x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots$
Si $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty$, on définit l'espérance mathématique de X par

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i)$$

Remarque

- Lorsque $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est fini, cette somme est finie et on a:
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$
- Lorsque $X(\Omega)$ est infini, on a la somme d'une série qui peut ne pas exister.

Espérance mathématique

Exemple

Soit X une v.a. discrète de loi de probabilité définie par:

$$p_i = P\left(X = (-1)^{i+1}\frac{3^i}{i}\right) = \frac{2}{3^i};\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

Puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\, p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^i}{i} \cdot \frac{2}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{i} = \infty$, l'espérance mathématique de X n'existe pas.

Espérance mathématique

Définition

Soit X une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que $\int_\Omega |X(\omega)| dP < \infty$. On définit alors l'espérance de X par

$$E(X) = \int_\Omega X dP = \int_\Omega X(\omega) dP = \int_\mathbb{R} x dP_X$$

On dit que X est intégrable quand $E|X| < +\infty$ et on note

$$\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P) = \left\{ X \ \text{ v.a.r. telle que } \int |X| dP < +\infty \right\}$$

De la même façon, on définit, pour $p > 0$,

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P) = \left\{ X \ \text{ v.a.r. telle que } \int |X|^p dP < +\infty \right\}$$

Espérance mathématique

Remarque

Comme pour une v.a. discrète, l'espérance mathématique d'une v.a. continue n'existe pas toujours.

Exemple

Soit X une v.a. continue de densité f définie par:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}; x \in \mathbb{R} \quad \text{(Loi de Cauchy)}$$

Puisque l'intégrale $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2}dx$ n'existe pas, cette intégrale diverge, alors l'espérance mathématique de X n'existe pas.

Variance

On définit une mesure de dispersion de X autour de son espérance mathématique dite variance de X.

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle dont le carré est intégrable. On appelle variance de X, ou de sa loi P_X, et on note $V(X)$, la quantité

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2.$$

La racine $\sqrt{V(X)}$ est appelée l'écart type, parfois noté $\sigma(X)$. Une variable aléatoire d'écart type 1 est dite réduite.

Variance

Propriétés

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, on a: $V(aX+b) = a^2 V(X)$
2. $V(X) = 0 \Leftrightarrow X =$ constante (p.s.)
3. $V(X) < E(X-C)^2, \quad \forall C \neq E(X)$;
   car $E(X-C)^2 = E(X-E(X))^2 + (C-E(X))^2$ puisque
   $2(E(X)-C)E(X-E(X)) = 0$
4. Si $E\left(|X|^2\right) < \infty$, la v.a. $Z = \dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est telle que $E(Z) = 0$ et
   $\sigma(Z) = 1$.
   Z est dite v.a. centrée et réduite associée à la v.a. X.

Médiane

Définition

On appelle médiane de X un réel m tel que

$$P(X \geq m) \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$$

Remarque

Si X est continue alors la médiane est solution de

$$F(m) = \frac{1}{2}$$

Si X est absolument continue de densité f alors la médiane est solution de

$$\int_{-\infty}^{m} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

Mode

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète. On appelle mode de X toute valeur x_0 telle que:

$$P\left(X = x_0\right) = \max_{x_k} P\left(X = x_k\right).$$

Soit X une variable aléatoire absolument continue, de densité f continue sur $\mathbb{R}$. On appelle mode de X tout réel x_0 où f atteint son maximum.

$$f\left(x_0\right) = \max_{x} f(x)$$

Changement de variables

Si X est une v.a. discrète :

Soit X une v.a. discrète telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots\}$ et g une fonction de $X(\Omega)$ dans l'ensemble $E = \{y_1, y_2, \cdots\}$. Alors $Y = g(X)$ est une v.a. telle que : $\forall j; (Y = y_j) = \bigcup_{i \in I} (X = x_i)$ où la réunion est prise sur $I = \{i / g(x_i) = y_j\}$ d'où $P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P(X = x_i)$

Exemple

Soit X une v.a. discrète de loi de probabilité donnée par le tableau suivant:

x_i	-2	-1	0	1	2
$p_i = P(X = x_i)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,3

Cherchons la loi de $Y = X^2 + 1$

Y prend les valeurs 1, 2 et 5 avec les probabilités :

Changement de variables

$$P(Y=1)=P(X=0)=0,3$$
$$P(Y=2)=P(X=-1)+P(X=1)=0,1+0,2=0,3$$
$$P(Y=5)=P(X=-2)+P(X=2)=0,1+0,3=0,4$$

D'où la loi de Y :

y_j	1	2	5
$p_j=P\left(Y=y_j\right)$	0,3	0,3	0,4

Changement de variables

Soit X une v.a.r dans $\mathbb{R}$ et g une application mesurable de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On veut déterminer la loi du vecteur aléatoire $g(X)$.

Théorème

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ de densité f_X et soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une bijection de classe C^1 (ainsi que son inverse) et strictement monotone. Alors $Y = g(X)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui admet pour densité la fonction

$$f_Y(y) = \left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right| \cdot f_X\left(g^{-1}(y)\right), \quad \alpha < y < \beta$$

avec $\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$ *et* $\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$

Preuve :

- Si g est strictement croissante et dérivable alors elle est continue et strictement croissante (donc g est bijective), les limites α et β existent (peuvent être infinies) et la fonction inverse g^{-1} existe, elle est dérivable et strictement croissante.

Changement de variables

Preuve :

Donc, $P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P\left(X \leq g^{-1}(y)\right)$

D'où $F_Y(y) = F_X\left(g^{-1}(y)\right)$ avec F_X et F_Y sont respectivement les fonctions de répartition des v.a. X et Y.

En dérivant, on obtient: $f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \left(g^{-1}(y)\right)'$

- Si g est strictement décroissante, alors g^{-1} est aussi strictement décroissante,

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) =& P(g(X) \leq y) \\ =& P\left(X > g^{-1}(y)\right) \\ =& 1 - P\left(X \leq g^{-1}(y)\right) \end{aligned}$$

d'où $F_Y(y) = 1 - F_X\left(g^{-1}(y)\right)$

En dérivant, on obtient

$$f_Y(y) = -f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left(g^{-1}(y)\right)'$$

D'où le résultat.

Changement de variables

Exemple

Soit X une v.a. continue de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Cherchons les densités de $Y = e^X$ et de $Y = -2\ln X$.

a)- $Y = e^X \Leftrightarrow X = \ln Y$ avec $Y > 0; \forall X$ et on a :
$f_Y(y) = 1.\left|\frac{1}{y}\right|; 0 < \ln y < 1$
c'est-à-dire que :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{si } 1 < y < e \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Changement de variables

b)-
$$Y = -2\ln X \Leftrightarrow X = e^{\frac{-Y}{2}}$$

Donc

$$f_Y(y) = 1.\left|-\frac{1}{2}e^{\frac{-y}{2}}\right|;\ 0 < e^{\frac{-y}{2}} < 1$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\frac{-y}{2}} & \text{si } 0 < y < \infty \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Remarque

Si g n'est pas bijective ou si g n'est pas strictement monotone, alors on trouve la densité de $Y = g(X)$ par dérivation de $P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$

Contre-exemple :

Soit X une v.a. continue de densité f_X. Cherchons f_Y la densité de $Y = X^2$.

Changement de variables

Contre-exemple :

On a $Y = g(X)$ avec $g(x) = x^2$.

Dans ce cas $g'(x) = 2x$ qui est positive pour $x > 0$ et négative pour $x < 0$, d'où g n'est pas strictement monotone.

Mais, pour $y > 0$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P\left(X^2 \leq y\right) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

En dérivant, on obtient:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right] & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

Cractérisation de la loi

Théorème (de transport)

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour que sa loi P_Y, absolument continue, soit de densité f_Y il faut et il suffit que pour toute fonction borélienne bornée $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(Y)$ soit intégrable ou positive, on ait :

$$E(\phi(Y)) = \int_{\mathbb{R}} \phi(y) f(y) dy.$$

Cractérisation de la loi

Exemple

- Soit X une v.a. continue de densité de probabilité:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\left(1 - x^2\right) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

- Calculons $E\left(X^2\right)$.
- L'application directe du théorème de transport (ou transfert) donne:

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x^2\left(1 - x^2\right) dx = \frac{1}{5}$$

Inégalités

Faute de connaître une probabilité exacte, il suffit parfois de trouver une borne supérieure ou inférieure à cette probabilité. Le théorème suivant qui lie l'espérance mathématique et l'écart-type répond à ce genre de questions.

Inégalité (Markov)

Si X est intégrable et $t > 0$, alors

$$P(X \geq t) \leq \frac{E(|X|)}{t}$$

Inégalités

Remarque

1. Si $X \in L^p, p > 0$, alors
$$P(X \geq t) \leq \frac{E\left(|X|^p\right)}{t^p}$$
2. Si $X \in L^2$, l'inégalité de Markov implique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}$$

Moments d'ordres supérieurs

Définition

On appelle moment d'ordre k d'une v.a. X, le nombre m_k défini par:

$$m_k = E(X^k) = \begin{cases} \sum_i x_i^k P(X = x_i) & \text{si} \quad X \quad \text{discrète} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx & \text{si} \quad X \quad \text{continue} \end{cases}$$

Définition

On appelle moment centré d'ordre k d'une v.a. X, le nombre μ_k défini par:

$$\mu_k = E(X - E(X))^k = \begin{cases} \sum_i (x_i - E(X))^k P(X = x_i) & \text{si} \quad X \quad \text{discrète} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^k f(x) dx & \text{si} \quad X \quad \text{continue} \end{cases}$$

Moments d'ordres supérieurs

Remarques

1. Le moment d'ordre 1, noté m_1 ou m est l'espérance mathématique $E(X) = m$.
2. Le moment centré d'ordre 2, noté μ_2 est la variance $\mu_2 = V(X)$.
3. Comme pour l'espérance et la variance, les moments peuvent parfois ne pas exister (la série ou l'intégrale divergent).

Fonctions génératrices

Soit X une v.a. discrète telle que $p_k = P(X = k)$; $k = 1, 2, \ldots$ avec $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

Définition

La fonction définie par: $G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k s^k = E\left(s^X\right)$ qui converge pour $|s| \leq 1$, est dite fonction génératrice de probabilité de X.

Conséquences

Les moments de la v.a. X s'ils existent peuvent être déterminés par les dérivées de $G(s)$ au point $s = 1$.

Fonctions génératrices

Conséquences

Les moments de la v.a. X s'ils existent peuvent être déterminés par les dérivées de $G(s)$ au point $s = 1$.

En effet :

$$G'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1} \Rightarrow G'(1) = E(X) \text{ si } E|X| < \infty$$

$$G''(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) p_k s^{k-2} \Rightarrow G''(1) = E(X(X-1)) \text{ si } E(X^2) < \infty$$

$$= E\left(X^2 - X\right) = E\left(X^2\right) - E(X)$$

Donc :

$$E\left(X^2\right) = G'(1) + G''(1) \quad \text{et} \quad V(X) = G''(1) + G'(1) - \left[G'(1)\right]^2$$

Fonctions génératrices

Exemple

- Soit la v.a. de Poisson définie par:

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!};\ k=0,1,2,\cdots$$

- On a: $G(s)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(s\lambda)^k\frac{e^{-\lambda}}{k!}=e^{-\lambda}e^{s\lambda}=e^{-\lambda(1-s)};\ |s|\leq 1$
- Donc

$$\begin{aligned}
G'(s) &= \lambda e^{-\lambda(1-s)}\\
G''(s) &= \lambda^2 e^{-\lambda(1-s)}\\
E(X) &= G'(1)=\lambda\\
E\left(X^2-X\right) &= \lambda^2\\
V(X) &= E\left(X^2\right)-E(X)^2=\lambda
\end{aligned}$$

Fonction génératrice des moments

Définition

La fonction génératrice des moments est définie pour toute v.a. X par:

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_x e^{tx} P(X = x) & \text{si } X \text{ est discrète} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx & \text{si } X \text{ est continue} \end{cases}$$

Si $E\left(e^{tX}\right)$ existe dans un voisinage de l'origine.

Fonction génératrice des moments

Théorème

Si $M(t)$ *existe pour* $t \in]-t_0, t_0[, t_0 > 0$, *alors ses dérivées de tout ordre existent pour* $t = 0$,

et de plus $$M^{(k)}(0) = E\left(X^k\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

C'est-à-dire que :

Tout les moments d'ordre k peuvent être calculés à l'aide des dérivées de $M(t)$ au point $t = 0$.

Fonction génératrice des moments

- En effet, $$M'(t) = \frac{d}{dt} E\left(e^{tX}\right)$$

  <u>Si X est discrète :</u>

$$M'(t) = \frac{d}{dt}\left[\sum_x e^{tx} P(X=x)\right] = \sum_x \frac{d}{dt} e^{tx} P(X=x)$$
$$= \sum_x x e^{tx} P(X=x) = E\left(Xe^{tX}\right)$$

<u>Si X est continue :</u>

$$M'(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} e^{tx} f(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{tx} f(x)dx = E\left(Xe^{tX}\right)$$

Fonction génératrice des moments

- En posant $t=0$, on a $M'(0)=E(X)$.
- De même,

$$M''(t)=\frac{d}{dt}M'(t)=\frac{d}{dt}E\left(Xe^{tX}\right)=E\left(X^2e^{tX}\right)$$

et $M''(0)=E\left(X^2\right)$
D'une façon générale, on a:

$$M^{(k)}(t)=E\left(X^ke^{tX}\right),\ k\geq 1$$

et $\quad M^{(k)}(0)=E\left(X^k\right)$

Fonction génératrice des moments

- D'après le théorème précédent, si $M(t)$ existe pour $t \in]-t_0, t_0[, t_0 > 0$ alors on peut développer $M(t)$ en série de Mc-Laurin:
$M(t) = M(0) + M'(0) \cdot \frac{t}{1!} + M''(0) \cdot \frac{t^2}{2!} + \cdots + M^{(k)}(0) \cdot \frac{t^k}{k!} + \cdots$
- Ainsi $E\left(X^k\right)$ est le coefficient de $\dfrac{t^k}{k!}$

Remarque

La fonction génératrice des moments $M(t)$ peut ne pas exister.
En effet, $E(e^{tX})$ n'est pas toujours définie.

Fonction génératrice des moments

Exemple

Soit X une v.a. discrète définie par:

$$P(X=k)=\frac{6}{\pi^2}\frac{1}{k^2};\quad k=1,2,\ldots$$

Donc, on a:

$$M(t)=\frac{6}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{tk}}{k^2}=\infty$$

Fonction génératrice des moments

Exemple

Soit X une v.a. continue de fonction de densité

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}, x > 0$$

Donc

$$M(t) = \frac{1}{1-2t} \text{ pour } t < 1/2,$$

$$M'(t) = \frac{2}{(1-2t)^2}$$

et

$$M''(t) = \frac{8}{(1-2t)^3} \text{ pour } t < 1/2$$

On en déduit $E(X) = 2,\ E\left(X^2\right) = 8$ et $V(X) = 4$.