الكلية متعددة التخصصات الناظور

Faculté Pluridisciplinaire de Nador

Probabilités

Chapitre 4 : Vecteur aléatoire

Toufik Chaayra

Département : Mathématiques
Filière : SMA - S6
Module : M33
Année universitaire : 2021/2022

12 Mai, 2022

Variable aléatoire vectorielle

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ est dite variable aléatoire vectorielle si X est mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$.

Remarque

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_d$ des variables aléatoires : $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ alors $X = (X_1, X_2, \ldots., X_d)$ est une variable aléatoire vectorielle de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ appelé vecteur aléatoire.

Loi d'un vecteur aléatoire

Définition

Soit une variable aléatoire X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ muni de la tribu borélienne réelle $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.
La loi de la variable aléatoire X est la mesure de probabilité, P_X, définie par : Pour tout $B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$;

$$P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$$

Remarque

Si X est un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} P(X \in A) = \mathbb{E}\left(1_A(X)\right) &= \int_\Omega 1_A(X(\omega))dP(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} 1_A(x)dP_X(x) = P_X(A) \end{aligned}$$

Loi d'un vecteur aléatoire

Remarque

1. Puisque les ensembles $A_1 \times \ldots \times A_d$, où les A_i sont borélien, engendrent la tribu borélienne $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$, alors P_X est caractérisée par : Pour tout $A_1, \ldots, A_d \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$;

$$\begin{aligned} P_X\left(A_1 \times \ldots \times A_d\right) &= P\left(X^{-1}\left(A_1 \times \ldots \times A_d\right)\right) \\ &= P\left(X \in A_1 \times \ldots \times A_d\right) \\ &= \mathbb{E}\left(1_{A_1 \times \ldots \times A_d}(X)\right) \end{aligned}$$

2. Si $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ alors, puisque les pavés $]-\infty, x_1] \times \ldots \times]-\infty, x_d]$ engendrent la tribu borélienne $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$, la loi du vecteur aléatoire X P_X est caractérisées par : Pour tout $x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$;

$$P_X(]-\infty, x_1] \times \ldots \times]-\infty, x_d]) = P\left(X_1 \leq x_1, \ldots, X_d \leq x_d\right)$$

Loi d'un vecteur aléatoire

La formule de transfert se généralise à d variables.

Théorème (de transfert)

Soit $(X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ et soit ϕ une fonction borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.

- Si ϕ est à valeurs positives,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\phi\left(X_1, \ldots, X_d\right)\right) &= \int_\Omega \phi\left(X_1(\omega), \ldots, X_d(\omega)\right) dP(d\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \phi\left(x_1, \ldots, x_d\right) dP_{(X_1, \ldots, X_d)}\left(x_1, \ldots, x_d\right)\end{aligned}$$

- Si ϕ est à valeurs quelconques, $\phi\left(X_1, \ldots, X_d\right) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ si et seulement si $\phi \in \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right), P_{(X_1, \ldots, X_d)}\right)$.
  Dans ce cas, l'égalité précédente a lieu.

Loi marginale

Définition

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de loi $P_{(X_1, X_2, \ldots, X_d)}$.
La loi de probabilité de la i-ème coordonnée d'un vecteur aléatoire, notée P_{X_i}, est appelée la i-ème loi marginale.

Proposition

La loi marginale P_{X_i} s'obtient par la formule : Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P_{X_i}(A) = \int 1_A (x_i)\, dP_{(X_1, X_2, \ldots, X_d)} (x_1, \ldots, x_d)$$

où pour toute fonction ϕ borélienne positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$

$$\mathbb{E} (\phi (X_i)) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi (x_i)\, dP_{(X_{\mathbf{1}}, \ldots, X_d)} (x_1, \ldots, x_d)$$

Loi marginale : Proposition

Preuve :
Il suffit de remarquer que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} P_{X_i}(A) &= P_{(X_1,X_2,\ldots,X_d)}(\mathbb{R} \times \ldots \times A \times \ldots \times \mathbb{R}) \\ &= \int 1_{\mathbb{R}\times\ldots\times A\times\ldots\times\mathbb{R}}\left(x_1,\ldots,x_d\right) dP_{(X_1,X_2,\ldots,X_d)}\left(x_1,\ldots,x_d\right) \\ &= \int 1_A\left(x_i\right) dP_{(X_1,X_2,\ldots,X_d)}\left(x_1,\ldots,x_d\right). \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de transfert pour $\phi\left(x_1,x_2,\ldots,x_d\right) = \phi\left(x_i\right)$, il vient

$$\mathbb{E}\left(\phi\left(X_i\right)\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi\left(x_i\right) dP_{(X_1,\ldots,X_d)}\left(x_1,\ldots,x_d\right).$$

Loi marginale d'un sous vecteur

Plus généralement on a la proposition suivante.

Proposition

Soient $k \leq d$ et $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. La loi (ou loi marginale) du vecteur $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P_{\left(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}\right)}\left(A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_k}\right) =$$

$$= \int 1_{A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_k}}\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\right) dP_{\left(X_1, X_2, \ldots, X_d\right)}\left(x_1, \ldots, x_d\right),$$

où pour toute fonction ϕ borélienne positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$

$$\mathbb{E}\left(\phi\left(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}\right)\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\right) dP_{\left(X_1, \ldots, X_d\right)}\left(x_1, \ldots, x_d\right)$$

Vecteur discret

Définition

Un vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \dots, X_d)$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, est dit discret si elle existe des parties $\mathcal{D}_i \subset \mathbb{R}, 1 \leq i \leq d$ au plus dénombrable telle que

$$P_{(X_1,X_2,\dots,X_d)} = \sum_{(x_1,\dots,x_d)\in\mathcal{D}_1\times\dots\times\mathcal{D}_d} p_{(x_1,\dots,x_d)}\delta_{(x_1,\dots,x_d)}$$

où

$$\sum_{(x_1,\dots,x_d)\in\mathcal{D}_1\times\dots\times\mathcal{D}_d} p_{(x_1,\dots,x_d)} = 1 \quad \text{et} \quad p_{(x_1,\dots,x_d)} > 0$$

Remarque

Si $(X_1, X_2, \ldots, X_d)$ est un vecteur aléatoire discret alors la loi et les lois marginales sont caractérisées par :

1. Loi $(X_1, X_2, \ldots, X_d)$: $\forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_d$;

$$P\left(X_1 = x_1, \ldots, X_d = x_d\right) = p_{(x_1,\ldots,x_d)}$$

2. Lois marginales : Pour $k \leq d$ et $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$

$$P_{\left(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}\right)} = \sum_{(x_1,\ldots,x_d)\in\mathcal{D}_1\times\ldots\times\mathcal{D}_d} p_{(x_1,\ldots,x_d)}\delta_{\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\right)}$$

en particulier

$$P_{X_i} = \sum_{(x_1,\ldots,x_d)\in\mathcal{D}_1\times\ldots\times\mathcal{D}_d} p_{(x_1,\ldots,x_d)}\delta_{x_i}$$

Vecteur discret

Exemple

Supposons que $X = (X_1, X_2)$ suit de loi discrète dans $\mathbb{R}^2$ concentrée en les points $(-1,0), (0,1), (0,-1), (1,0)$ tous de probabilité $1/4$.
Autrement dit,

$$P_X = \frac{1}{4}\delta_{(-1,0)} + \frac{1}{4}\delta_{(0,1)} + \frac{1}{4}\delta_{(0,-1)} + \frac{1}{4}\delta_{(1,0)}$$

Les lois marginales P_{X_1} et P_{X_2} de P_X sont égales, et données par

$$P_{X_1} = P_{X_2} = \frac{1}{4}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{4}\delta_1.$$

On pourra noter que l'on obtient les lois marginales P_{X_1} et P_{X_2} en sommant les probabilités respectivement sur les lignes et les colonnes de la table.

Vecteur discret

Remarque

Si $(X_1, X_2, \ldots, X_d)$ est un vecteur aléatoire discret alors les espérances sont caractérisées par : si ϕ est positive ou intégrable alors pour $k \leq d$ et $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$

$$\mathbb{E}\left(\phi\left(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}\right)\right) = \sum_{(x_1,\ldots,x_d)\in\mathcal{D}_1\times\ldots\times\mathcal{D}_d} p_{(x_1,..,x_d)}\phi\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\right)$$

en particulier

$$\mathbb{E}\left(\phi\left(X_i\right)\right) = \sum_{(x_1,\ldots,x_d)\in\mathcal{D}_1\times\ldots\times\mathcal{D}_d} p_{(x_1,\ldots,x_d)}\phi\left(x_i\right)$$

Vecteur absolument continu

Définition

Soit une variable aléatoire X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ muni de la tribu borélienne réelle $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.
La loi de la variable aléatoire X, P_X, est dite absolument continue si elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d, d\lambda_{\mathbb{R}^d} = dx_1 \dots dx_d$, i.e

$$P_X << \lambda_{\mathbb{R}^d}$$

Radon-Nikodym

Théorème (Radon-Nikodym)

Si la loi de la variable aléatoire X, P_X, est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, alors il existe une fonction intégrable $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$, appelée densité, telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x_1, \ldots, x_n\right) dx_1 \ldots dx_d = 1$$

et

$$\begin{aligned} P\left(X_1 \leq x_1, \ldots, X_d \leq x_d\right) &= P_X(]-\infty, x_1] \times \ldots \times]-\infty, x_d]) \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_d} f\left(x_1, \ldots, x_n\right) dx_1 \ldots dx_d \end{aligned}$$

Densité marginale

Proposition

Soient $k \leq d$ et $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. La densité marginale du vecteur $(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k})$ notée $f_{(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k})}$ s'obtient par la formule :
$\forall \, (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in \mathbb{R}^k$

$$f_{(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k})} (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = \\ = \int_{\mathbb{R}^{d-k}} f_{(X_1, X_2, \ldots, X_d)} (x_1, \ldots, x_d) \prod_{i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}} dx_i$$

où pour toute fonction ϕ borélienne positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$

$$\mathbb{E} \left(\phi \left(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k} \right) \right) = \\ = \int_{\mathbb{R}^d} \phi \left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} \right) f_{(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k})} (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \, dx_1 \ldots dx_d$$

Considérons le vecteur aléatoire gaussien

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_d) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right), \lambda_{\mathbb{R}^d}\right)$$

dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$$

Remarque

Un vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, \cdots, X_d)$ est dit **gaussien** lorsque toute combinaison linéaire $a_1 X_1 + \cdots + a_d X_d$ de ses composantes X_i suit une même loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Pour $k \leq d$ et $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, la densité marginale du vecteur $(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k})$, est :

$$f_{(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k})}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^{d-k}} e^{-\frac{x_1^2 + \ldots + x_d^2}{2}} \prod_{i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}} dx_i$$

$$= \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} e^{-\frac{x_{i_1}^2 + x_{i_2}^2 + \ldots + x_{i_k}^2}{2}} \right) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d-k}{2}}}$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{d-k}} e^{-\frac{\sum_{i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}} x_i^2}{2}} \prod_{i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}} dx_i$$

$$= \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} e^{-\frac{x_{i_1}^2 + x_{i_2}^2 + \cdots + x_{i_k}^2}{2}} \right) \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^{d-k}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} e^{-\frac{x_{i_1}^2 + x_{i_2}^2 + \cdots + x_{i_k}^2}{2}}.$$

Fonctions de répartition d'un vecteur aléatoire

Définition

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_d$ des variables aléatoires : $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$. On appelle fonction de répartition de $X = (X_1, X_2, \ldots .X_d)$, ou de la loi de X, la fonction définie pour $t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ par

$$\begin{aligned} F_X(t) &= P\left((X_1 \leq t_1) \cap \cdots \cap (X_d \leq t_d)\right) \\ &= P\left(X_1 \leq t_1, \ldots, X_d \leq t_d\right) \end{aligned}$$

La fonctions de répartition marginale de la variable aléatoire X_i est donnée par

$$F_{X_i}(t_i) = \lim_{t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_d \longrightarrow +\infty} F_X(t)$$

Fonctions de répartition d'un vecteur aléatoire

- Si $X = (X_1, X_2, \ldots., X_d)$ est un vecteur discret alors

$$F_{(X_1,X_2,\ldots.,X_d)}(t_1, \ldots, t_d) = \sum_{x_1 \in]\infty, t_1]} \cdots \sum_{x_d \in]\infty, t_d]} p_{(x_1,\ldots,x_d)},$$

- Si $X = (X_1, X_2, \ldots., X_d)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité f alors

$$F_{(X_1,\ldots,X_d)}(t_1, \ldots, t_d) = \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_d} f_{(X_1,\ldots,X_d)}(x_1, \ldots, x_d)\, dx_1 \ldots dx_d.$$

Fonctions de répartition d'un vecteur aléatoire

Proposition

Soient $k \leq d$ et $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$.
La fonction de répartition marginale du vecteur $(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k})$, notée $F_{\left(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}\right)}$ s'obtient par la formule :
$\forall\, (t_{i_{\mathbf{1}}}, \ldots, t_{i_k}) \in \mathbb{R}^k$

$$F_{\left(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}\right)}(t_{i_1}, \ldots, t_{i_k}) =$$
$$= \int_{-\infty}^{t_{i_1}} \ldots \int_{-\infty}^{t_{i_k}} \int_{\mathbb{R}^{d-k}} f_{(X_1, \ldots, X_d)}(x_1, \ldots, x_1)\, dx_1 \ldots dx_d.$$

Exemple

Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité $f(x, y)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, i.e.

$$F(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2} f(x, y)dxdy, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

alors les fonctions de répartitions marginales et les densités marginales sont donées par

$$F_X(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dydx, \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy$$

et

$$F_Y(t_2) = \int_{-\infty}^{t_2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx$$

Changement de variables

Soit X un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^d$ et g une application mesurable de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}^d$. On veut déterminer la loi du vecteur aléatoire $g(X)$.

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de densité f_X et soit $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ un difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ (bijection continûment différentiable ainsi que son inverse).
Alors $Y = g(X)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ qui admet pour densité la fonction

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\text{Jac}\ \ g^{-1}(y)\right|; \quad y \in \mathbb{R}^d$$

où

$$\text{Jac}\, g^{-1}(y) = \det\left(\frac{d\left(g^{-1}(y)\right)_i}{dy_j}, \quad 1 \leq i, j \leq d\right)$$

est le jacobien de g^{-1}.

Changement de variables : Théorème

Preuve :
Il suffit d'écrire

$$F_Y(y_1,\dots,y_d) = P\left((g(X))_1 \le y_1,\dots,(g(X))_d \le y_d\right)$$
$$= \int_{g^{-1}(]-\infty,y_1]\times\ldots\times]-\infty,y_d])} f_X(x_1,\dots,x_d)\,dx_1\dots dx_d$$

Puisque $g:\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est un difféomorphisme, le changement de variable $y=g(x)$ implique

$$F_Y(y_1,\dots,y_d) = \int_{-\infty}^{y_1}\cdots\int_{-\infty}^{y_d} f_X\left(\left(g^{-1}(y)\right)_1,\dots,\left(g^{-1}(y)\right)_d\right)\left|\mathrm{Jac}\,g^{-1}(y)\right|$$
$$= \int_{-\infty}^{y_1}\cdots\int_{-\infty}^{y_d} f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\mathrm{Jac}\,g^{-1}(y)\right|dy.$$

Vecteur aléatoire

Nous avons également une méthode assez générale, valable même dans le cas où g n'est pas difféomorphisme, pour déterminer la loi d'une transformée d'un vecteur aléatoire, basée sur la caractérisation suivante.

Théorème

Soit Y un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.
Pour que sa loi P_Y, absolument continue, soit de densité f_Y il faut et il suffit que pour toute fonction borélienne bornée $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(Y)$ soit intégrable ou positive, on ait :

$$\mathbb{E}(\phi(Y)) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y) f(y) dx$$

Cas d'un vecteur aléatoire

Définition

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_d$ des variables aléatoire sur un espace probabilisé : $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ positives ou de carré intégrable.
L'espérance du vecteur $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ est le vecteur

$$\mathbb{E}(X) = \left(\mathbb{E}\left(X_1\right), \ldots, \mathbb{E}\left(X_d\right)\right)$$

Sa matrice de covariance est définie par

$$\begin{aligned} Cov(X) &= \mathbb{E}\left(\left(X_i - \mathbb{E}\left(X_i\right)\right)\left(X_j - \mathbb{E}\left(X_j\right)\right)\right)_{1 \leq i,j \leq d} \\ &= \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))^t\Big) \end{aligned}$$

où A^t est la transposée de la matrice A.

Remarque

(i) Si X_i et X_j sont deux variables aléatoires réelles alors

$$
\begin{aligned}
Cov\left(X_i, X_j\right) =& \mathbb{E}\left(X_i X_j\right) - \mathbb{E}\left(X_i\right)\mathbb{E}\left(X_j\right) \\
=& \int_{\mathbb{R}^d} x_i x_j dP_{(X_1,\ldots,X_d)}\left(x_1,\ldots,x_d\right) \\
& - \int_{\mathbb{R}^d} x_i dP_{(X_1,\ldots,X_d)}\left(x_1,\ldots,x_d\right) \times \int_{\mathbb{R}^d} x_j dP_{(X_1,\ldots,X_d)}\left(x_1,\ldots,x_d\right)
\end{aligned}
$$

(ii) Si X_i est une variable aléatoire réelle alors

$$
\begin{aligned}
Cov\left(X_i, X_i\right) = \mathbb{V}\left(X_i\right) =& \int_{\mathbb{R}^d} x_i^2 dP_{(X_1,\ldots,X_d)}\left(x_1,\ldots,x_d\right) \\
& - \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i dP_{(X_1,\ldots,X_d)}\left(x_1,\ldots,x_d\right)\right)^2
\end{aligned}
$$

Remarque

(*iii*) Si $(X_1, X_2, \ldots, X_d)$ est dit discret de loi

$$P_{(X_1,X_2,\ldots,X_d)} = \sum_{(x_1,\ldots,x_d)\in\mathcal{D}_1\times\ldots\times\mathcal{D}_d} p_{(x_1,\ldots,x_d)}\delta_{(x_1,\ldots,x_d)},$$

alors les espérances marginales sont données par

$$\mathbb{E}\left(X_i\right) = \sum_{(x_1,\ldots,x_d)\in\mathcal{D}_1\times\ldots\times\mathcal{D}_d} x_i p_{(x_1,\ldots,x_d)}$$

$$\mathbb{E}\left(X_i^2\right) = \sum_{(x_1,\ldots,x_d)\in\mathcal{D}_1\times\ldots\times\mathcal{D}_d} x_i^2 p_{(x_1,\ldots,x_d)}$$

et

$$\mathbb{E}\left(X_i X_j\right) = \sum_{(x_1,\ldots,x_d)\in\mathcal{D}_1\times\ldots\times\mathcal{D}_d} x_i x_j p_{(x_1,\ldots,x_d)}$$

Remarque

(iv) Si $(X_1, X_2, \ldots, X_d)$ est absolument continu de densité $f_{(X_1,X_2,\ldots,X_d)}$ alors les espérances marginales sont données par

$$\mathbb{E}\left(X_i\right) = \int_{\mathbb{R}^d} x_i f_{(X_1,X_2,\ldots,X_d)}\left(x_1, \ldots, x_1\right) dx_1 \ldots dx_d$$

$$\mathbb{E}\left(X_i^2\right) = \int_{\mathbb{R}^d} x_i^2 f_{(X_1,X_2,\ldots,X_d)}\left(x_1, \ldots, x_1\right) dx_1 \ldots dx_d$$

et

$$\mathbb{E}\left(X_i X_j\right) = \int_{\mathbb{R}^d} x_i x_j f_{(X_1,X_2,\ldots,X_d)}\left(x_1, \ldots, x_1\right) dx_1 \ldots dx_d$$

Cas discret

Exemple

Si $X = (X_1, X_2)$ est de loi discrète dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$P_X = \frac{1}{4}\delta_{(-1,0)} + \frac{1}{4}\delta_{(0,1)} + \frac{1}{4}\delta_{(0,-1)} + \frac{1}{4}\delta_{(1,0)},$$

alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_1\right) =& -1 \times p_{(-1,0)} + 0 \times p_{(0,1)} + 0 \times p_{(0,-1)} + 1 \times p_{(1,0)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \\
\mathbb{E}\left(X_2\right) =& 0 \times p_{(-1,0)} + 1 \times p_{(0,1)} + (-1) \times p_{(0,-1)} + 0 \times p_{(1,0)} \\
=& \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \\
\mathbb{V}\left(X_1\right) =& \mathbb{E}\left(X_1^2\right) = (-1)^2 \times p_{(-1,0)} + 0^2 \times p_{(0,1)} + 0^2 \times p_{(0,-1)} + 1^2 \times p_{(1,0)} \\
=& \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Cas discret

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(X_2\right) =& \mathbb{E}\left(X_2^2\right)\\
=&(0)^2 \times p_{(-1,0)} + 1^2 \times p_{(0,1)} + (-1)^2 \times p_{(0,-1)} + 0^2 \times p_{(1,0)}\\
=&\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov\left(X_1, X_2\right) =& \mathbb{E}\left(X_1 X_2\right)\\
=&(-1) \times 0 \times p_{(-1,0)} + 0 \times 1 \times p_{(0,1)} + 0 \times (-1) \times p_{(0,-1)}\\
&+ 1 \times 0 \times p_{(1,0)}\\
=&0
\end{aligned}$$

Cas continu

Exemple

Considèrons le vecteur aléatoire gaussien $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ est donnée par

$$f_X(x_1, \ldots, x_d) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\frac{x_1^2 + \ldots + x_d^2}{2}}$$

alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_i) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} x_i e^{-\frac{x_1^2 + \ldots + x_d^2}{2}} dx_1 \ldots dx_d \\
&= \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^{d-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Cas continu

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_i) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} x_i^2 e^{-\frac{x_1^2+\ldots+x_d^2}{2}} dx_1 \ldots dx_d \\
&= \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^{d-1} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

et pour $i \neq j$,

$$\begin{aligned}
Cov(X_i, X_j) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} x_i x_j e^{-\frac{x_1^2+\ldots+x_d^2}{2}} dx_1 \ldots dx_d \\
&= \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^{d-2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vecteur aléatoire multinomiale $X \sim \mathcal{B}(n, p_1, \ldots, p_m)$

Définition

On dit qu'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_m)$ suit la loi multinomiale de paramètres $n > 0, p_1 > 0, \ldots, p_m > 0$
tels que $p_1 + \ldots + p_m = 1$, on écrit $X \sim \mathcal{B}(n, p_1, \ldots, p_m)$ si
$\forall (n_1, \ldots, n_m)$ tel que $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$

$$\mathbb{P}(X_1 = n_1, \ldots, X_m = n_m) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_m!} p_1^{n_1} \ldots p_m^{n_m}$$

Proposition

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p_1, \ldots, p_m)$ alors chacune des variables reste une variable binomiale et on a

$$\mathbb{E}(X_i) = np_i \quad \mathbb{V}(X_i) = np_i(1 - p_i)$$
$$Cov(X_i, X_j) = -np_ip_j$$

Loi normale multidimensionnelle $X \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

Définition

Soit $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire de loi P_X. X est dit de loi normale multidimensionnelle de paramètres $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ et $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $P_X << \lambda_{\mathbb{R}^d}$ de densité définie par pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$f_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(x-\boldsymbol{\mu})}.$$

Remarque

Si $\boldsymbol{\mu} = (0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{\Sigma} = I_d$, alors $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ est dit de loi normale multidimensionnelle centrée réduite dont la densité est définie par pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$f_{\mathcal{N}(\mathbf{0},I_d)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\frac{x_1^2+\ldots+x_d^2}{2}}.$$