الكلية متعددة التخصصات الناظور

ⵜⴰⵖⵉⵡⴰⵏⵜ ⵜⴰⵎⵜⵉⵣⵉⵍⵉⵜ ⵏ ⵏⴰⴹⵓⵕ

Faculté Pluridisciplinaire de Nador

Probabilités

Chapitre 5 : Fonctions caractéristiques & Indépendance des variables aléatoires

Toufik Chaayra

Département : Mathématiques
Filière : SMA - S6
Module : M33
Année universitaire : 2021/2022

Fonctions caractéristiques
Introduction

- Si X est une v.a. quelconque, la fonction génératrice $G(s) = \mathbb{E}\left(s^X\right)$, nous invite à former : $\int_{-\infty}^{+\infty} s^x dF(x)$.
- Cette intégrale a un sens au voisinage de $|s| = 1$, ce qui conduit à poser $s = e^{it}$ et donner à t des valeurs réelles.
- On obtient finalement la fonction : $\mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$ notée $\varphi_X(t)$ et dite fonction caractéristique de X
- La fonction caractéristique de X a l'énorme avantage d'exister pour tout nombre réel t et toute v.a. X.
- En outre, la correspondance entre loi de probabilité d'une v.a. et fonction caractéristique est bijective.

Fonctions caractéristiques

Définition

On définit la fonction caractéristique de la v.a. X, par :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_x e^{itX}\mathbb{P}(X = x) & \text{si} \quad X \quad \text{est discrete} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx & \text{si} \quad X \quad \text{est continue} \end{cases}$$

Comme $\left|e^{itx}\right| = 1$ pour tout réel t, par exemple, si X est une variable aléatoire absolument continue, l'intégrale

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$$

existe pour toute fonction de densité f et la fonction caractéristique peut être définie pour toute variable aléatoire X.

Fonctions caractéristiques

Propriétés

1. $\varphi_X(0) = 1.$
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1, t \in \mathbb{R}.$
3. Si $Y = aX + b, a$ et b étant des constantes, alors
$$\varphi_Y(t) = \varphi_X(at)e^{ibt}$$
où φ_X et φ_Y sont les fonctions caractéristiques des variables aléatoires X et Y.
4. $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$

Fonctions caractéristiques

Preuve :

1. On montre la propriété pour X absolument continue.
   En effet: $\varphi_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
2. On montre la propriété pour X absolument continue.
   En effet : $|\varphi(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{itx}\right| f(x)dx =$
   $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$
3. $\varphi_Y(t) = \mathbb{E}\left(e^{itY}\right) = \mathbb{E}\left(e^{it(aX+b)}\right) = e^{itb}\mathbb{E}\left(e^{itaX}\right) = e^{itb}\varphi_X(at).$
4. $$\begin{aligned} \varphi(-t) &= \mathbb{E}\left[e^{-itX}\right] = \mathbb{E}(\cos tX) - i\mathbb{E}(\sin tX) \\ &= \overline{\mathbb{E}[\cos(tX)] + i\mathbb{E}[\sin(tX)]} \\ &= \overline{\mathbb{E}[\cos(tX) + i\sin(tX)]} \\ &= \overline{\mathbb{E}\left[e^{itX}\right]} = \overline{\varphi(t)} \end{aligned}$$

Fonctions caractéristiques

Théorème 1

Soit X la v.a. de mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ et de fonction caractéristique $\varphi_X(t)$. Alors $\varphi_X(t)$ est uniformèment continue sur $\mathbb{R}$

Preuve :

Soient $\varepsilon > 0$ et $t, s \in \mathbb{R}$. On a

$$|\varphi_X(t) - \varphi_X(s)| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| e^{itx} - e^{isx} \right| d\mu(x).$$

Soit $A > 0$ tel que $\mu(\mathbb{R} \backslash [-A, A]) \leq \varepsilon$. Alors, on découpe $\mathbb{R}$ en $[-A, A] \cup (\mathbb{R} \backslash [-A, A])$. Majorant $\left| e^{itx} - e^{isx} \right|$ par 2 sur $\mathbb{R} \backslash [-A, A]$, on trouve

$$\begin{aligned} |\varphi_X(t) - \varphi_X(s)| &\leq 2\varepsilon + \int_{-A}^{A} \left| e^{itx} - e^{isx} \right| d\mu(x) \\ &\leq 2\varepsilon + \int_{-A}^{A} |t - s||x| d\mu(x) \text{ par l'inégalité des accrois. finis} \\ &\leq 2\varepsilon + |t - s| A^2. \end{aligned}$$

Fonctions caractéristiques

Preuve : (Suite)
On pose $\eta = \varepsilon / A^2$. Si $|t - s| < \eta$, alors

$$|\varphi_X(t) - \varphi_X(s)| < \varepsilon,$$

ce qui prouve l'uniforme continuité de φ_X sur $\mathbb{R}$.

Fonctions caractéristiques

Théorème 2

Si le moment d'ordre $k \geq 1$ de la v.a. X existe, la fonction caractéristique $\varphi_X(t)$ admet une dérivée d'ordre k continue au voisinage de l'origine et $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k E\left(X^k\right)$.

Preuve : On sait que :

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$$

on constate que pour tout nombre réel t, on a:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k e^{itx} dF(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k dF(x) < \infty \qquad \text{(par hypothèse)}$$

On peut donc dériver à l'ordre k la fonction $\varphi_X(t)$ et écrire, pour tout nombre réel t l'expression

$$\varphi_X^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^k\left(e^{itx}\right)}{dt^k} dF(x) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{itx} dF(x)$$

Fonctions caractéristiques

Preuve : (Suite)
Cette dérnière intégrale est donc absolument convergente; elle est uniformément convergente en t.
L'intégrale obtenue est la dérivée d'ordre k de $\varphi(t)$ et enfin cette intégrale est continue en t.
On a donc:

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{itx} dF(x)$$

la limite pour $t = 0$ est

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x) = i^k \mathbb{E}\left(X^k\right)$$

Fonctions caractéristiques

Exemple 1

On considère X une v.a. qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
À partir de sa fonction caractéristique on calculera son espérance mathématique et sa variance.
On a :

$$\begin{aligned}\varphi(u) =& \mathbb{E}\left(e^{iuX}\right) = \sum_{k=0}^{n} e^{iuk}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} e^{iuk} C_n^k p^k (1-p)^{(n-k)} \\ =& \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(pe^{iu}\right)^k (1-p)^{(n-k)} = \left(pe^{iu} + (1-p)\right)^n\end{aligned}$$

Fonctions caractéristiques

La dérivée $\varphi'(u)$ s'écrit

$$\varphi'(u) = n\left(pe^{iu} + (1-p)\right)^{n-1} ipe^{iu}$$

D'où

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{i}\varphi'(0) = np.$$

La dérivée seconde est

$$\varphi''(u) = -npe^{iu}\left(pe^{iu} + (1-p)\right)^{n-2}\left(npe^{-iu} + (1-p)\right)$$

et $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{1}{i^2}\varphi''(0) = -\left[-n(n-1)p^2 - np\right] = n(n-1)p^2 + np.$
La variance $\mathrm{Var}(X)$ est donc $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\ &= np(1-p)\end{aligned}$$

Fonctions caractéristiques

Exemple 2

On considère X une v.a. qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. À partir de sa fonction caractéristique on calculera son espérance mathématique et sa variance.
On a :

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \mathbb{E}\left(e^{iuX}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{iu}\right)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{iu}} \\ &= \exp\left(\lambda\left(e^{iu} - 1\right)\right)\end{aligned}$$

La dérivée $\varphi'(u)$ s'écrit

$$\varphi'(u) = \lambda i e^{iu} \exp\left(\lambda\left(e^{iu} - 1\right)\right)$$

d'où

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{i}\varphi'(0) = \lambda.$$

Fonctions caractéristiques

La dérivée $\varphi''(u)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\varphi''(u) &= -\lambda i e^{iu} \exp\left(\lambda\left(e^{iu}-1\right)\right) - \lambda i e^{iu} \lambda i e^{iu} \exp\left(\lambda\left(e^{iu}-1\right)\right) \\ &= -\lambda i e^{iu} \exp\left(\lambda\left(e^{iu}-1\right)\right) - \left(\lambda i e^{iu}\right)^2 \exp\left(\lambda\left(e^{iu}-1\right)\right)\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{1}{i^2}\varphi''(0) = -\left(-\lambda-\lambda^2\right) = \lambda^2+\lambda$$

La variance $\mathrm{Var}(X)$ est donc

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda^2+\lambda-\lambda^2 = \lambda$$

Fonctions caractéristiques

Exemple 3

On considère X une v.a. qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et Y une v.a. qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$.
À partir de la fonction caractéristique de X, on calculera la fonction caractéristique de Y et on en retrouvra l'espérance mathématique et la variance de Y.
On a :

$$\varphi_X(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux - \frac{x^2}{2}} dx$$

Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin uxdx = 0$$

alors :

$$\varphi_X(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos uxdx$$

et

$$\varphi'_X(u) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \sin ux dx$$

Une intégration par partie donne

$$\varphi'_X(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin ux d\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

donc

$$\varphi'_X(u) = -u\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos ux dx = -u\varphi_X(u)$$

On en tire $\dfrac{\varphi'_X(u)}{\varphi_X(u)} = -u \quad$ ou $\quad [\ln \varphi_X(u)]' = -u$ Ce qui implique

$$\ln \varphi_X(u) = \frac{-u^2}{2} + c.$$

Comme $\varphi_X(0) = 1$, on a $c = 0$ et $\varphi_X(u) = e^{\frac{-u^2}{2}}$.

Si $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, on peut représenter Y sous la forme $Y = \sigma X + \mu$ où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$; d'où

$$\varphi_Y(u) = \varphi_{\sigma X+\mu}(u) = e^{iu\mu}\mathbb{E}\left(e^{iu\sigma X}\right) = e^{iu\mu}\varphi_X(u\sigma) = e^{iu\mu}e^{\frac{-u^2\sigma^2}{2}}$$

La dérivée $\varphi'_X(u)$ s'écrit

$$\varphi'_Y(u) = \left(i\mu - u\sigma^2\right)e^{iu\mu}e^{\frac{-u^2\sigma^2}{2}}$$

et
$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{i}\varphi'_Y(0) = \mu.$$

La dérivée $\varphi''_Y(u)$ s'écrit

$$\varphi''_Y(u) = -\sigma 2 e^{iu\mu - \frac{u^2\sigma^2}{2}} + \left(i\mu - u\sigma^2\right)^2 e^{iu\mu - \frac{u^2\sigma^2}{2}}$$

et

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right) = \frac{1}{i^2}\varphi''_Y(0) = -\left(-\sigma^2 + i^2\mu^2\right) = \sigma^2 + \mu^2$$

La variance $\mathrm{Var}(Y)$ est donc $\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$

Fonctions caractéristiques

On a vu que, pour la fonction génératrice des moments $M(t)$, on a :

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \frac{(t)^k}{k!}$$

On a un résultat pareil pour la fonction caractéristique $\varphi(t)$ qui découle du théorème précèdent:

Corollaire

Si les n premiers moments de $X, m_k = E\left[X^k\right] (k = 1, 2, \cdots, n)$ existent, alors on a pour $t \to 0$,

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} m_k + o\left(t^n\right)$$

Preuve : Elle résulte immédiatement du théorème précèdent

Exemple 4

Soit X une v.a. uniforme sur $]a, a+b[$ de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{si } a < x < a+b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Calculons sa fonction caractéristique et en déduire ses moments.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{b}\int_a^{a+b} e^{itx}dx = \frac{1}{ibt}\left(e^{i(a+b)t} - e^{iat}\right) \\ &= \frac{1}{ibt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}\left[(a+b)^n - a^n\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(it)^{n-1}}{n!}\frac{(a+b)^n - a^n}{b} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}\frac{(a+b)^{n+1} - a^{n+1}}{b(n+1)} \end{aligned}$$

En vertu de corollaire, on a : $m_n = \dfrac{(a+b)^{n+1} - a^{n+1}}{b(n+1)}$; $n = 0, 1, 2, \cdots$

Calculs des moments des lois usuelles

Pour calculer l'espérance, la variance et les moments d'ordre supérieurs, on peut utiliser :

- la méthode directe (définition de ces moments)
- la fonction génératrice
- la fonction génératrice des moments
- la fonction caractéristique

Fonctions caractéristiques

Calculs des moments des lois usuelles

Nous avons déjà calculé l'espérance et la variance pour les lois :

- binomiale, en utilisant sa fonction caractéristique
- de Poisson, en utilisant la fonction génératrice et aussi la fonction caractéristique
- normale centrée réduite et la normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, en utilisant la fonction caractéristique
- uniforme sur l'intervalle $]a, a+b[$, en utilisant la fonction caractéristique et son développement en série.

Lois discrètes

Loi de Dirac

Soit a un nombre fixé. Soit X une v.a. prenant la valeur a avec $\mathbb{P}(X = a) = 1$ et suivant la loi de Dirac au point a. Sa loi de probabilité δ_a est :

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \sum_x e^{itx}\delta_a(x) = e^{ita}\delta_a(a) = e^{ita}$$

de dérivée $\varphi'(t) = iae^{ita}$ et de dérivée seconde $\varphi''(t) = -a^2e^{ita}$ donc son espérance mathématique est :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{i}\varphi'(0) = a$$

et $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{1}{i^2}\varphi''(0) = a^2$, doù sa variance est :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = a^2 - a^2 = 0$$

Lois discrètes

Loi de Bernoulli

Soit une v.a. X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p $(0 \leq p \leq 1)$, alors $X(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \sum_x \mathbb{P}(X = x)e^{itx} = pe^{it} + (1-p)e^0 = pe^{it} + (1-p)$$

de dérivée première $\varphi'(t) = ipe^{it}$ et de dérivée seconde $\varphi''(t) = -pe^{it}$.
Donc son espérance mathématique est

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{i}\varphi'(0) = p \text{ et } \mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{1}{i^2}\varphi''(0) = p.$$

D'où sa variance est :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

Loi géométrique (1)

Soit une v.a. X qui suit une loi géométrique de paramètre p avec

$$\forall k \in X(\Omega) = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}, \quad \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = p \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk}(1-p)^{k-1} = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$$

On peut calculer sa dérivée première et sa dérivée seconde et déduire son espérance mathématique $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{i}\varphi'(0) = \frac{1}{p}$.

De même, on peut calculer $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{1}{i^2}\varphi''(0) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}$ et déduire

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Lois discrètes

Loi géométrique (2)

On peut consiérer la loi géométrique de paramètre p, mais avec $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ qui commence par 0 et non pas 1, alors

$$\forall k \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^k$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = p \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}(1-p)^k = \frac{p}{1-(1-p)e^{it}}$$

Dans ce cas, on trouve après avoir calculer les dérivées première et seconde de cette fonction caractéristique, l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1-p}{p}$ et la variance $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

Lois discrètes

Loi binomiale négative (1)

Une v.a. X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p et on note $X \sim N\mathcal{B}(n,p)$ si

$$\forall k \in X(\Omega) = \mathbb{N}^*; \quad \mathbb{P}(X = k) = C_{k+n-2}^{k-1} p^n (1-p)^{k-1}$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \left(\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}} \right)^n ; \text{ pour } \left| (1-p)e^{it} \right| < 1$$

Son espérance mathématique est:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n}{p}$$

Sa variance est:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{n}{p^2}(1-p)$$

Pour $n = 1$, on retrouve la loi géométrique (1).

Lois discrètes

Loi binomiale négative (2)

Une v.a. X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p et on note $X \sim N\mathcal{B}(n,p)$ si

$$\forall k \in X(\Omega) = \mathbb{N}; \quad \mathbb{P}(X = k) = C_{k+n-1}^{k} p^n (1-p)^k;$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^{it}} \right)^n ; \text{ pour } \left| (1-p)e^{it} \right| < 1$$

Son espérance mathématique est:

$$\mathbb{E}(X) = n \frac{1-p}{p}$$

Sa variance est :

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{n}{p^2}(1-p)$$

Pour $n = 1$, on retrouve la loi géométrique (2).

Lois discrètes

Loi multinomiale

Un vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, \cdots, X_m)$ suit une loi multinomiale de paramètres $n, p_1, p_2, \cdots, p_m$ si

$$\mathbb{P}\left(X_1 = n_1, \cdots, X_m = n_m\right) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2}, \cdots, p_m^{n_m}$$

où $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$ Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \varphi\left(t_1, t_2, \cdots, t_m\right) = \left(\sum_{k=1}^{m} p_k e^{it_k}\right)^m$$

L'espérance mathématique d'une composante X_i est :

$$\mathbb{E}\left(X_i\right) = np_i; \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

Sa variance est :

$$\operatorname{Var}\left(X_i\right) = np_i\left(1 - p_i\right); \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

Lois Continues

Loi uniforme

Une v.a. continue X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$ et on note $X \sim \mathcal{U}[a, b]$ si sa densité de probabilité est:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \frac{1}{b-a} \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it}$$

Son espérance mathématique est:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

Sa variance est :

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Lois Continues

Loi exponentielle

Une v.a. continue X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et on note $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Son espérance mathématique est:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Sa variance est :

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Lois Continues

Loi Gamma

Une v.a. continue X suit une loi gamma de paramètres $\alpha, \beta > 0$ et on note $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha - 1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

où $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$. Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}$$

Son espérance mathématique est :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

Sa variance est :

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Si $\alpha = 1$, on retrouve la loi exponentielle $\mathcal{E}xp(\beta)$.

Loi bêta

Une v.a. continue X suit une loi bêta de paramètres $\alpha, \beta > 0$ et on note $X \sim B(\alpha, \beta)$ si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$
Sa fonction caractéristique est:

$$\varphi(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)}$$

Son espérance mathématique est :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Sa variance est :

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Une v.a. X suit une loi de Cauchy de paramètres α et $\lambda > 0$ si sa densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\alpha)^2}; \quad x \in]-\infty, +\infty[$$

Sa fonction caractéristique est:

$$\varphi(t) = \exp(i\alpha t - \lambda|t|)$$

Lois Continues

Loi normale

Une v.a. X suit une loi normale de paramètres μ et $\sigma > 0$ et on note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ si sa densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; \quad x \in]-\infty, +\infty[$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$$

Son espérance mathématique est :

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$

Sa variance est :

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

Loi normale centrée réduite

Une v.a. X suit une loi normale centrée réduite s'il suit une loi normale de paramètre $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ et on note $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Sa fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad x \in]-\infty, +\infty[$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Son espérance mathématique est :

$$\mathbb{E}(X) = 0$$

Sa variance est :

$$\mathrm{Var}(X) = 1$$

Lois Continues

Loi du Khi-deux

Une v.a. X suit une loi de Khi-deux avec n degrés de liberté si sa densité est:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-x/2} x^{n/2-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$$

Son espérance mathématique est :

$$\mathbb{E}(X) = n$$

Sa variance est:

$$\mathrm{Var}(X) = 2n$$

Détermination d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ par sa fonction caractéristique :

Formule d'inversion

Soit F la fonction de répartition d'une v.a. et soit φ sa fonction caractéristique.
Nous nous proposons d'exprimer F à partir de φ.

Théorème général

Soit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Alors :

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt =$$
$$= \frac{1}{2}[F(b+0) + F(b-0)] - \frac{1}{2}[F(a+0) + F(a-0)]$$

Détermination d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ par sa fonction caractéristique :

Preuve du Théorème général

$$\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi(t)\right| = |\varphi(t)|\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\right| \leq b-a$$

Donc, en vertu du **théorème de Fubini**, on peut permuter les opérateurs d'intégration et écrire :

$$\begin{aligned}
I_T &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dF(x)\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}e^{itx}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dF(x)\int_{-T}^{T}\frac{e^{-it(x-a)}-e^{-it(x-b)}}{it}dt
\end{aligned}$$

Détermination d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ par sa fonction caractéristique :

$$\begin{aligned}
\text{Or,}\quad J_T &= \left(\int_0^T \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it} e^{ixt}dt + \int_T^0 \frac{e^{iau}-e^{ibu}}{iu} e^{-ixu}du\right)\\
&= \left(\int_0^T \frac{e^{i(x-a)t}-e^{i(x-b)t}}{it} dt - \int_0^T \frac{e^{-i(x-a)t}-e^{-i(x-b)t}}{it} dt\right)\\
&= \left(\int_0^T \frac{e^{i(x-a)t}-e^{-i(x-a)t}}{it} dt - \int_0^T \frac{e^{i(x-b)t}-e^{-i(x-b)t}}{it} dt\right)\\
&= \left(\int_0^T \frac{e^{i(x-a)t}-e^{-i(x-a)t}}{it} dt - \int_0^T \frac{e^{i(x-b)t}-e^{-i(x-b)t}}{it} dt\right)\\
&= 2\left(\int_0^T \frac{\sin((x-a)t)}{t} dt - \int_0^T \frac{\sin((x-b)t)}{t} dt\right)\\
&= 2\left(\int_0^{(x-a)T} \frac{\sin u}{u} du - \int_0^{(x-b)T} \frac{\sin u}{u} du\right)
\end{aligned}$$

Détermination d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ par sa fonction caractéristique :

Preuve du Théorème général

L'intégrale de Dirichlet $S(v) = \int_0^v \frac{\sin u}{u} du$ est telle que $S(v) \underset{v \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\frac{\pi}{2}$

Nous avons donc :

$$J_T = 2[S(T(x-a)) - S(T(x-b))]$$

D'autre part

$$I_T = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2[S(T(x-a)) - S(T(x-b))] dF(x)$$

$$I_T = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{a-0} J_T dF(x) + \int_{a-0}^{a+0} J_T dF(x) + \int_{a+0}^{b-0} J_T dF(x) + \right.$$
$$\left. + \int_{b-0}^{b+0} J_T dF(x) + \int_{b+0}^{\infty} J_T dF(x) \right]$$

Détermination d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ par sa fonction caractéristique :

Preuve du Théorème général

- Si $x < a < b$, on a :

$$S(T(x-a)) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2}, \; S(T(x-b)) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2}$$

Donc

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{a-0} J_T dF(x) = 0$$

- Si $x = a < b$, on a :

$$S(T(x-a)) = 0, \; S(T(x-b)) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\lim_{T\to\infty} \int_{a-0}^{a+0} J_T dF(x) = \pi[F(a+0) - F(a-0)]$$

Détermination d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ par sa fonction caractéristique :

Preuve du Théorème général

- Si $a < x < b$, on a :

$$S(T(x-a)) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}, \;\; S(T(x-b)) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2}$$

  Donc

$$\lim_{T\to\infty} \int_{a+0}^{b-0} J_T dF(x) = 2\pi[F(b-0) - F(a+0)]$$

- Si $a < x = b$, on a :

$$S(T(x-a)) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}, S(T(x-b)) = 0$$

  Donc

$$\lim_{T\to\infty} \int_{b-0}^{b+0} J_T dF(x) = \pi[F(b+0) - F(b-0)]$$

Détermination d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ par sa fonction caractéristique :

Preuve du Théorème général

- Si $a < b < x$, on a :

$$S(T(x-a)) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2},\ S(T(x-b)) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

Donc

$$\lim_{T\to\infty} \int_{b+0}^{\infty} J_T dF(x) = 0$$

En résumé :

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty} I_T = \frac{1}{2\pi}[\pi(F(a+0) - F(a-0))+\\ + 2\pi(F(b-0) - F(a+0)) + \pi(F(b+0) - F(b-0))]\\ = \frac{1}{2}[F(b+0) + F(b-0)] - \frac{1}{2}[F(a+0) + F(a-0)]\end{aligned}$$

Détermination d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ par sa fonction caractéristique :

Formule d'inversion

Corollaire 1

Si a et b sont deux points de continuité de F. On a :

$$F(b) - F(a) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt$$

Formule d'inversion (Paul-Levy)

Détermination d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ par sa fonction caractéristique :

Formule de réciprocité de Fourier

Corollaire 2

Si φ est absolument intégrable, la fonction de répartition F est dérivable dans $\mathbb{R}$ et de plus

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt$$

(Formule de réciprocité de Fourier)

Preuve :

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx}-e^{-it(x+h)}}{ith}\varphi(t)dt$$

Détermination d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ par sa fonction caractéristique :

Preuve de la Formule de réciprocité de Fourier :

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{1 - e^{-ith}}{ith} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

Or,

$$\left| \frac{1 - e^{-ith}}{ith} e^{-itx} \varphi(t) \right| \leq |\varphi(t)|$$

et puisque, par hypothèse $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \infty$, on peut en vertu de théorème de Lebesgue, passer à la limite sous l'opérateur d'intégration et on a :

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{1 - e^{-ith}}{ith} e^{-itx} \varphi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-ith}}{ith} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

Détermination d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ par sa fonction caractéristique :

Preuve de la Formule de réciprocité de Fourier :

$$
\begin{aligned}
F'(x) = f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h\to 0} \frac{1-e^{-ith}}{ith} e^{-itx}\varphi(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt
\end{aligned}
$$

Cette dernière intégrale est absolument convergente en x : C'est une fonction continue en x.
Donc, la v.a. correspondante à $F(x)$ est absolument continue, de densité f.

Formule d'inversion

Exemple

Trouvons la densité de la v.a. dont la fonction caractéristique est
$\varphi(t) = e^{c|t|}$
En effet, puisque $\varphi(t)$ est absolument intégrable, la distribution est absolument continue avec la densité :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}e^{-c|t|}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{t(c-ix)}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-t(c+ix)}dt \end{aligned}$$

Les fonctions à intégrer sont holomorphes, donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi(c-ix)}\left[e^{t(c-ix)}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2\pi(c+ix)}\left[e^{-t(c+ix)}\right]_{0}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{c-ix} + \frac{1}{c+ix}\right] = \frac{c}{\pi\left(c^2+x^2\right)} \end{aligned}$$

Détermination d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ par sa fonction caractéristique :

Formule d'inversion

Théorème (Formule d'inversion de Fourier)

Soit ϕ_X la fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire X, supposée intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.
Alors, la loi de X admet une densité continue bornée f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, par

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-itx} \phi_X(t) dt$$

Détermination d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ par sa fonction caractéristique :

Formule d'inversion - Théorème d'unicité

Théorème

Si deux fonctions de répartitions correspondent à la même fonction caractéristique, alors elles sont égales.
i.e. $$\varphi_{F_1} = \varphi_{F_2} \Longrightarrow F_1 = F_2$$

La fonction caractéristique d'une v.a. détermine la loi de cette variable. Autrement dit, si deux v.a. admettent même fonction caractéristique, alors elles ont même loi.

Proposition

Soit $\varphi_X(u)$ est la fonction caractéristique d'une v.a. X et $\varphi_Y(u)$ est la fonction caractéristique d'une v.a. Y.
X et Y ont même loi si et seulement si $\varphi_X(u) = \varphi_Y(u), \ \forall u \in \mathbb{R}$.

Fonction caractéristique

Proposition

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire, de fonction caractéristique $\phi = \phi_X$ et de loi P_X. Si $\mathbb{E}\left(\|X\|^2\right) < \infty$, alors

$$\mathbb{E}\left(X_k\right) = -i\frac{\partial \phi}{\partial t_k}(0), \quad \mathbb{E}\left(X_k X_j\right) = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t_k \partial t_j}(0)$$

Fonction caractéristique et indépendance

Théorème

Soit (X, Y) un couple de v.a. indépendantes. Alors, pour tout réel t, on a :

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$$

Preuve :

En effet, $\varphi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left(e^{it(X+Y)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{itX}e^{itY}\right)$, d'où, puisque X et Y sont indépendantes, donc aussi e^{itX} et e^{itY} :

$$\varphi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right)\mathbb{E}\left(e^{itY}\right) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$$

On peut généraliser le théorème précédent de la façon suivante :

Théorème

Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des v.a. indépendantes. Alors, pour tout réel t, on a :

$$\varphi_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t)$$

Fonction caractéristique et indépendance

Remarque

On peut trouver des v.a. X et Y non indépendantes qui vérifient, quand même, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.

Contre-exemple

Soit X une v.a. de Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$; sa fonction caractéristique est donnée par $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$.
Le couple (X, Y), où $Y = X$ vérifie :

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_{2X}(t) = e^{-2|t|} = \left(e^{-|t|}\right)^2 = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

Corollaire

Le produit de deux fonctions caractéristiques est une fonction caractéristique.

Indépendance

Définition

Une famille quelconque d'évènements $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{F}$ est mutuellement indépendante si :

$$\forall J \subset I \quad \text{fini} \quad P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P\left(A_j\right)$$

Exemple : Jet de deux dés (Bleu, Rouge)

Soient A, B, C trois évènements représentant respectivement le dé rouge est impaire, le dé bleu est impair, la somme des deux dés est impair. $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$ et
$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 1/4$, mais

$$P(A \cap B \cap C) = \emptyset \neq 1/8.$$

Ainsi, A, B, et C sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

Indépendance

Définition

Une famille de sous-tribus $\{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n\}$ de $\mathcal{F}$ est (mutuellement) indépendante si pour tout $A_1 \in \mathcal{F}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_n$,

$$P\left[A_1 \cap \ldots \cap A_n\right] = P\left[A_1\right] \times \ldots \times P\left[A_n\right] \quad \forall A_1 \in \mathcal{F}_1 \ldots \forall A_n \in \mathcal{F}_n.$$

Définition

Une famille $X_1, \ldots, X_n$ de v.a. est (mutuellement) indépendante si $\left(\sigma\left(X_1\right), \ldots, \sigma\left(X_n\right)\right)$ est indépendante. Autrement dit, $\forall B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P\left(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i \in B_i\right).$$

Autrement dit

$$P_{(X_1,\ldots,X_d)} = P_{X_1} \otimes \ldots \otimes P_{X_d}$$

Indépendance

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$;

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1
-1	0	$1/4$	0
0	$1/4$	0	$1/4$
1	0	$1/4$	0

On pose $X = (X_1, X_2)$, on a :

$$P_X = \frac{1}{4}\delta_{(-1,0)} + \frac{1}{4}\delta_{(0,1)} + \frac{1}{4}\delta_{(1,0)} + \frac{1}{4}\delta_{(0,-1)}$$

alors

$$\mathbb{P}(X = (0,0)) = 0 \neq \frac{1}{4} = P\left(X_1 = 0\right) P\left(X_2 = 0\right)$$

ainsi X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Indépendance

Définition

Une v. a. X est indépendante d'une sous-tribu $\mathcal{F}$ si $\sigma(X) \perp \mathcal{F}$.
En particulier, deux variables X et Y sont indépendantes si $\sigma(X) \perp \sigma(Y)$ et on notera alors $X \perp Y$.

Exemple : jet de deux dés

Soient $X_a,\ X_b$ deux variables aléatoires donnant respectivement le résultat du dé rouge et celui du dé bleu. Ces deux variables sont indépendantes.

Proposition

Si C_1 et C_2 sont deux famille indépendantes alors $\sigma\left(C_1\right)$ et $\sigma\left(C_2\right)$ sont indépendantes.

Indépendance

Proposition

$X_1, \ldots, X_d$ indépendantes si et seulement si $\forall \phi_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ fonctions boréliennes telles que les $\phi_i(X_i)$ sont intégrables, on ait:

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \phi_i(X_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\phi_i(X_i)\right).$$

Indépendance

Proposition

Une famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires est une famille indépendante si et seulement si : $\forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi_{(X_1, \ldots, X_n)}(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t_i)$$

où $\varphi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est la fonction caractéristique de X : $\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right)$

Proposition

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires, elles sont indépendantes si et seulement si

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)\, F_{X_2}(x_2)$$

Indépendance

Proposition

Soent (X, Y) un couple aléatoires de densité conjointe $f(x, y)$, alors X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

Proposition

Soit X est Y deux variables aléatoires indépendantes telle que

$$X(\Omega) = \{x_1 \dots, x_n\}, \quad Y(\Omega) = \{y_1 \dots, y_m\}.$$

Alors X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\,\mathbb{P}(Y = y_j); \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$$

Corrélation

Définition

Deux variables aléatoires X et Y dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont non corrélées si :

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = 0,$$

autrement dit

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Remarque

D'après ce qui précède on a X et Y indépendantes implique X et Y non corrélées.

Contre-exemple

$Y = X^2, X \sim \mathcal{N}(0,1), \mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{E}(XY) = 0$, ainsi $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY)$ mais X et Y ne sont pas indépendantes:

$$\mathbb{P}(|X| \leq 1, Y \geq 1) = 0 \neq \mathbb{P}(|X| \leq 1)\mathbb{P}(Y \geq 1).$$

Corrélation et vecteur gaussien

Théorème

Un vecteur $X = (X_1, \ldots, X_d)$ *est gaussien si* $\forall \alpha \in \mathbb{R}^d$, $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i X_i$ *est une variable aléatoire gaussienne. Dans ce cas,*

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_i X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{d} \alpha_i E\left(X_i\right), \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \alpha_i \alpha_j \operatorname{Cov}\left(X_i, X_j\right)\right)$$

Proposition

Un vecteur gaussien est entièrement déterminé par

$$\mu_i = \mathbb{E}\left(X_i\right), \quad \Gamma = \operatorname{Cov}\left(X_i, X_j\right).$$

Théorème

Soit X *un vecteur gaussien de* $\mathbb{R}^d$ *de matrice de covariance* Γ. *Alors,* Γ *est diagonale si et seulement si* $(X_1, \ldots, X_d)$ *est indépendante.*

Corrélation et vecteur gaussien

<u>**Remarque :**</u> La réciproque est fausse dans le cas général.

Contre-exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et ϵ une v.a de Rademacher telle que $\mathbb{P}(\epsilon = 1) = \mathbb{P}(\epsilon = -1) = \frac{1}{2}$ et soit $X \perp \epsilon$. Posons $Y = \epsilon X$

▶ Montrons que $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$

Soit $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(X \leq y, \epsilon = 1) + \mathbb{P}(-X \leq y, \epsilon = -1) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X \leq y) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(-X \leq y), \text{ par indépendance de } X \text{ et } \epsilon, \\
&= \mathbb{P}(X \leq y), \text{ car } X \text{ et } -X \text{ ont même loi.}
\end{aligned}$$

Donc Y est une va de loi normale centrée réduite.

Corrélation et vecteur gaussien

- $$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}\left(X^2\epsilon\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X^2 1_{\epsilon=1} - X^2 1_{\epsilon=-1}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X^2 1_{\epsilon=1}\right) - \mathbb{E}\left(X^2 1_{\epsilon=-1}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{E}\left(1_{\epsilon=1}\right) - \mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{E}\left(1_{\epsilon=-1}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{P}\left(\epsilon=1\right) - \mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{P}\left(\epsilon=-1\right) = 0
\end{aligned}$$

Alors les v.a X et Y sont non corrélées, mais puisque $Y = X\epsilon$, X et Y ne sont pas indépendantes.

- Comme

$$\mathbb{P}(X+Y=0) = \mathbb{P}(X+\epsilon X=0) = \mathbb{P}(\epsilon=-1) = \frac{1}{2}, \text{ car } X \neq 0 \ \mathbb{P}-\text{p.s}$$

alors $X+Y$ n'est pas gaussienne, et par la suite (X,Y) est un gaussien

Coefficient de corrélation

Définition

Si X et Y admettent chacune une variance non nulle, on appelle **coefficient de corrélation** linéaire de X et Y le réel noté $\rho(X,Y)$ et définie par :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Propriétés

1. $\rho(X,Y)$ est compris dans $[-1,1]$.
2. Les deux variables ne sont pas corrélées si $\rho(X,Y)$ est nul.
3. Les deux variables sont d'autant mieux corrélées que $\rho(X,Y)$ est proche de 1 ou de -1.

Somme de variables aléatoires indépendantes

Proposition

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ est une suite indépendante de variables aléatoires réelles de carré intégrable, alors $\mathbb{E}\left((X_1 + \ldots + X_n)^2\right) < \infty$ et et

$$Var\left(X_1 + \ldots + X_n\right) = \sum_{k=1}^{n} Var\left(X_k\right)$$

Proposition

Si $(X_1, \dots, X_n)$ sont des variables aléatoires indépendante alors :
$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t),$$

où $\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right)$. En particulier, si $X_1, \dots, X_n$ ont la de même loi alors

$$\varphi_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \left(\varphi_{X_1}(t)\right)^n.$$

Somme de variables aléatoires indépendantes

Théorème

Soient $X_1, \ldots, X_m$ *des variables aléatoires indépendantes suivants chacune une loi Binomiale de paramètres* n_i *et* p*, alors leur somme* X *suit la loi binomiale:*

$$X = \sum_{k=1}^{m} X_k \sim \mathcal{B}\left(n_1 + \ldots + n_m, p\right)$$

Théorème

Si $x_{\mathbf{1}}, \ldots, x_m$ *sont des variables aléatoires de Bernoulli avec paramètre* p*, indépendantes et identiquement distribuées, alors leur somme* X *suit la loi binomiale:*

$$X = \sum_{k=1}^{m} X_k \sim \mathcal{B}(m, p)$$

Somme de variables aléatoires indépendantes

Théorème

Soient $X_1, \ldots, X_m$ des variables aléatoires indépendantes suivants chacune une loi Poisson $\mathcal{P}(\lambda_i)$ de paramètre $\lambda_i > 0$. Alors leur somme X suit la loi Poisson :

$$X = \sum_{k=1}^{m} X_k \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_m)$$

Proposition

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, indépendantes. La loi de la somme $X + Y$ est donnée par le produit de convolution $P_X * P_Y$ des lois P_X et P_Y, défini, pour toute fonction borélienne bornée ϕ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par

$$\int_{\mathbb{R}} \phi dP_X * P_Y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(x+y) dP_X(x) \right) dP_Y(y)$$

Somme de variables aléatoires indépendantes

Proposition

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de densités f_X et g_Y respectivement. La densité de la somme $X+Y$ est donnée par le produit de convolution $h_{X+Y} = f_X * g_Y$ défini par

$$h_{X+Y}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) g_Y(t-x) dx$$

Théorème

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivants chacune une loi normale d'éspérance μ_i et de variance σ_i^2. Alors la somme $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi normale d'éspérance $\mu_1 + \cdots + \mu_n$ et de variance $\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$