Université Mohamed Premier
Faculté Pluridisciplinaire -Nador
Département de Mathématiques

Corrigés du TD 1 – Probabilités

Correction 1

1. $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω, alors $\Omega \in \mathcal{A}$.
   Mais, $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire ($\forall A \in \mathcal{A}, A^c \in \mathcal{A}$).
   Donc $\Omega^c = \emptyset \in \mathcal{A}$.
2. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable d'événements de $\mathcal{A}$.
   $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i = \left(\bigcup_{i\in I} A_i^c\right)^c$.
   $\forall i \in I$, on a : $A_i^c \in \mathcal{A}$
   et on a $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i^c \in \mathcal{A}$ (car $\mathcal{A}$ tribu, stable par réunion dénombrable).
   alors $\displaystyle\left(\bigcup_{i\in I} A_i^c\right)^c \in \mathcal{A}$ (stabilité par complémentaire)
   d'où $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.
3. (a) soit $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$, alors $B^c \in \mathcal{A}$
   par suite $A - B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$ (par 2° précédente)
   (b) $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A) \in \mathcal{A}$ par stabilité par réunion dénombrable et par différence.

Correction 2

Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux tribus sur Ω. Soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ la famille composée des ensembles qui appartiennent à $\mathcal{A}_1$ et à $\mathcal{A}_2$.

La famille $\mathcal{A}$ est une tribu si :

- $\Omega \in \mathcal{A}$, ce qui est le cas car $\Omega \in \mathcal{A}_1$ et $\omega \in \mathcal{A}_2$, donc $\Omega \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$.
- La famille $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire : si $A \in \mathcal{A}$, la stabilité des tribus $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ par passage au complémentaires implique que $A^c \in \mathcal{A}_1$ et $A^c \in \mathcal{A}_2$. Donc $A^c \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$.
- La famille $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable : si $A_i \in \mathcal{A}$, la stabilité des tribus $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ par intersection dénombrable implique $\displaystyle\bigcap_i A_i \in \mathcal{A}_1$ et $\displaystyle\bigcap_i A_i \in \mathcal{A}_2$,

  donc $\displaystyle\bigcap_i A_i \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$.

Les autres propriétés résultent des précèdentes : l'ensemble vide appartient à $\mathcal{A}$, car c'est le complémentaire de Ω ; la famille $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable car en passant au complémentaire, on a $\displaystyle\bigcup_i A_i = \left(\bigcap_i A_i^c\right)^c \in \mathcal{A}$.
La réunion de tribus n'est pas une tribu. On peut considérer un contre-exemple.
Soit $\Omega = \{0,1,2\}$
Prendre $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{0\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$ et $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}\}$
$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ n'est pas une tribu, car $\{0,1\} = \{0\} \cup \{1\} \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$

Correction 3

Soit Ω un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ avec $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$

> **Rappel (Tribu engendrée par une classe) :** Soit $\mathcal{C}$ une classe des parties de Ω. L'intersection de tous les tribus contenant $\mathcal{C}$ est appelée la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ et elle est notée $\sigma(\mathcal{C})$.

$\sigma(\mathcal{A})$ est la tribu en gendrée par $\mathcal{A}$ c'est-à-dire $\sigma(\mathcal{A})$ est l'intersection de tous les tribus contenant $\mathcal{A}$.
$\sigma(\mathcal{C})$ est l'intersection de tous les tribus contenant $\mathcal{C}$.
$\mathcal{A} \subset \mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$.
Donc $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{C})$.
d'où $\sigma(\mathcal{C})$ est une tribu contenant $\mathcal{A}$.
Donc $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{C})$.

Correction 4

1. On a $P(AB) = P(A)P(B)$
   mais $A \subset B$, donc $AB = A$
   d'où $P(A) = P(A)P(B)$
   si $P(A) \neq 0$, alors $P(B) = 1$
   sinon $P(A) = 0$
2. $P(AA) = P(A) = P(A)P(A)$
   donc $P(A) = 0$ ou 1
3. Soit B un événement. A-t-on $P(AB) = P(A)P(B)$?
   Si $P(A) = 0$, alors $P(A)P(B) = 0$
   et $AB \subset A$, donc $P(AB) \leqslant P(A) = 0$,
   alors $P(AB) = 0$, d'où A et B sont indépendantes.
   Si $P(A) = 1$, alors $P(A^c) = 0$, comme $A^cB \subset A^c, P(A^cB) \leqslant P(A^c) = 0$,
   donc $P(A^cB) = 0 = P(A^c)P(B)$, d'où A^c et B sont indépendantes
   et par suite A et B sont indépendantes.
4. Il suffit de prendre deux événements A et B inépendantes avec $0 < P(A) < 1$.
   Alors A est indépendante de B et B est indépendante de A (i.e., la relation d'indépendance est symétrique), mais A n'est pas indépendante d'elle même (d'après 2°) (i.e., la relation d'indépendance n'est réflexive).

Correction 5

On définit les événements suivants :
$X = \{$ boule passée de A en B est blanche $\}$
$Y = \{$ boule passée de A en B est noire $\}$
$N = \{$ boule tirée de B est noire $\}$
On demande $P(X/N)$. D'après le théorème de Bayes :

$$P(X/N) = \frac{P(N/X)P(X)}{P(N/X)P(X) + P(N/Y)P(Y)}$$

On a : $P(X) = \frac{2}{5}$, $P(N/X) = \frac{3}{8}$, $P(Y) = \frac{3}{5}$ et $P(N/Y) = \frac{1}{2}$
Donc $P(X/N) = \frac{1}{3}$.

Correction 6

D'abord $P \geqslant 0$, car $\alpha > 0$ et $\alpha e^{-\alpha x} > 0; (\forall x \geqslant 0)$, donc $f(x) \geqslant 0; \forall x \geqslant 0$.
Et

$$\begin{aligned}
P(\mathbb{R}) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx \\
&= 0 + \left[-e^{-\alpha x}\right]_0^{+\infty} \\
&= 0 + 1 = 1
\end{aligned}$$

En suite $P(B) = \int_B f(x)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$
D'autre part, considérons une suite $(A_n)_n$ d'événements boréliens deux à deux disjoints et de réunion A.
On a, alors $\quad f \cdot \mathbb{I}_A = \sum_n f \cdot \mathbb{I}_{A_n} \quad$ (propriété de l'indicatrice (*))
Donc

$$\begin{aligned}
P(A) &= \int f(x) \cdot \mathbb{I}_A \cdot dx = \int \sum_n f(x) \cdot \mathbb{I}_{A_n} dx \\
&= \sum_n \int f(x) \cdot \mathbb{I}_{A_n} dx \quad \text{(d'après le théorème de monotonie de Beppo-Levi)} \\
&= \sum_n P(A_n)
\end{aligned}$$

d'où P est une mesure de Probabilité.

(*) Rappels sur la fonction indicatrice d'un événement A :

Définition 1

L'indicatrice d'un événement A,

$$\Omega \longrightarrow \{0,1\}$$
$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega \in A \\ 0 & \text{si} \quad \omega \notin A \end{cases}$$

Proposition 1

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable.
$\mathbb{I}_A$ est une fonction mesurable $\Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$.
Donc : $\mathbb{I}_A$ v.a. $\Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$

Propriété 1

1. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{I}_A \leqslant \mathbb{I}_B$
2. $\mathbb{I}_{A^c} = 1 - \mathbb{I}_A$
3. $\mathbb{I}_{A\cap B} = \min\{\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B\} = \mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_B$
4. $\mathbb{I}_{A\cup B} = \max\{\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B\} = \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_B$
5. $\mathbb{I}_{A\Delta B} = \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - 2\mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_B$
6. $\mathbb{I}_{A\times B}(x,y) = \mathbb{I}_A(x)\mathbb{I}_B(y)$, pour tout $(x,y) \in \Omega^2$

Cas particuler de 4° :
Si A et B sont disjoints, alors

$$\mathbb{I}_{A\cup B} = \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B$$

En effet, si $x \in A$ alors $x \notin B$
Donc $\mathbb{I}_A(x) = 1; \mathbb{I}_B(x) = 0$ et $\mathbb{I}_{A\cup B}(x) = 1$
Par conséquent $\mathbb{I}_A(x) + \mathbb{I}_B(x) = 1 = \mathbb{I}_{A\cup B}(x)$
De même, si $x \in B$, $\mathbb{I}_A(x) + \mathbb{I}_B(x) = 1 = \mathbb{I}_{A\cup B}(x)$

Correction 7

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit X une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

1. Montrons que X^2 et $\dfrac{1}{X}$ si $\{X=0\}=\emptyset$ sont aussi des v.a.
   En effet ; $\{X^2 \leqslant x\} = \{-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}\} \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{1}{X} \leqslant x\right\} &= \left\{\frac{1}{X} \leqslant x, X<0\right\} + \left\{\frac{1}{X} \leqslant x, X>0\right\} + \left\{\frac{1}{X} \leqslant x, X=0\right\} \\
&= \{xX \leqslant 1\} \cap \{X<0\} + \{xX \geqslant 1\} \cap \{X>0\} \\
&= \begin{cases} \{X<0\} & \text{si} \quad x=0 \\ \left\{X \leqslant \frac{1}{x}\right\} \cap \{X<0\} + \left\{X \geqslant \frac{1}{x}\right\} \cap \{X>0\} & \text{si} \quad x>0 \\ \left\{X \geqslant \frac{1}{x}\right\} \cap \{X<0\} + \left\{X \leqslant \frac{1}{x}\right\} \cap \{X>0\} & \text{si} \quad x<0 \end{cases}
\end{aligned}$$

   Donc $\dfrac{1}{X}$ variable aléatoire.
2. Soient maintenant a et b deux constantes réelles.
   Montrons que $aX+b$ est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
   En effet,

$$\begin{aligned}
\{\omega : aX(\omega)+b \leqslant x\} &= \{aX(\omega) \leqslant x-b\} \\
&= \begin{cases} \left\{X \leqslant \frac{x-b}{a}\right\} \in \mathcal{A} & \text{si} \quad a>0 \\ \left\{X \geqslant \frac{x-b}{a}\right\} = \left\{X < \frac{x-b}{a}\right\}^c \in \mathcal{A} & \text{si} \quad a<0 \\ \Omega & \text{si} \quad a=0 \text{ et } x-b \geqslant 0 \\ \emptyset & \text{si} \quad a=0 \text{ et } x-b<0 \end{cases}
\end{aligned}$$

3. Soit F la fonction de répartition de X. Calculons les fonctions de répartition de $|X|$ et de $aX+b$.
   En effet,
   - $$\begin{aligned} P\{|X| \leqslant y\} &= P\{-y \leqslant X \leqslant y\} \\ &= F(y) - F(-y) + P\{X=-y, y>0\} \end{aligned}$$
   - $P\{aX+b \leqslant y\} = \begin{cases} P\left\{X \leqslant \frac{y-b}{a}\right\} & \text{si} \quad a>0 \\ P\left\{X \geqslant \frac{y-b}{a}\right\} & \text{si} \quad a<0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} F\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{si} \quad a>0 \\ 1-F\left(\frac{y-b}{a}\right) + P\left\{X = \frac{y-b}{a}\right\} & \text{si} \quad a<0 \end{cases}$$

Correction 8

Soit l'indicatrice $\mathbb{I}_A$ de l'événement A telle que $P(A)=p$. Sa loi de probabilité est donc donnée par le tableau suivant :

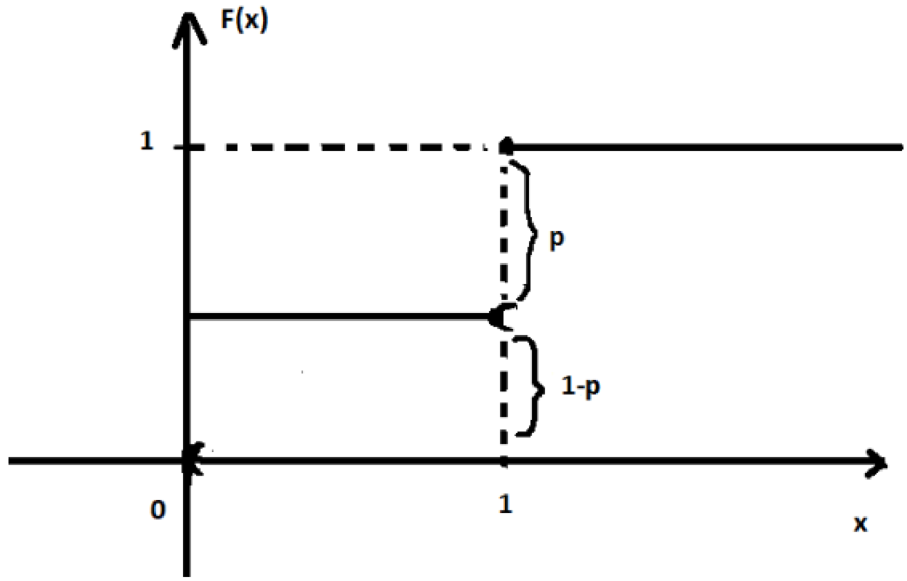
$x_i = \mathbb{I}_A(\omega)$	0	1
$P(\mathbb{I}_A = x_i)$	$1-p$	p

Si on veut calculer son espérance mathématique, elle sera

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{I}_A\right) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p = P(A)$$

Donc $P(A) = \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_A\right)$.
La fonction de répartition de l'indicatrice $\mathbb{I}_A$ de l'événement A telle que $P(A) = p$.

$$F(x) = P\left(\mathbb{I}_A \leqslant x\right) = P\left(\omega / \mathbb{I}_A(\omega) \leqslant x\right) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ 1-p & \text{pour } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{pour } x \geqslant 1 \end{cases}$$



Correction 9
X est une variable aléatoire continue de densité f_X.
$Y = kX$ avec $k > 0$; donc aussi une v.a.
Considérons les fonctions de répartition F_X de X et F_Y de Y.
On a : $F_X(x) = P(X \leqslant x)$ et $F_Y(y) = P(Y \leqslant y)$

$$F_Y(y) = P(kX \leqslant y) = P\left(X \leqslant \frac{y}{k}\right) = F_X\left(\frac{y}{k}\right)$$

d'où

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{k}\frac{dF_X\left(\frac{y}{k}\right)}{d\left(\frac{y}{k}\right)} = \frac{1}{k}\frac{dF_X(x)}{dx}$$

i.e.

$$f_Y(y) = \frac{1}{k} f_X(x)$$

Autre méthode :
$Y = \psi(X)$ avec $\psi(x) = kx$
$\psi'(x) = k > 0$, donc ψ est continue et strictement croissante.

Donc $\psi^{-1}(y) = \dfrac{y}{k}$ et $(\psi^{-1}(y))' = \dfrac{1}{k}$
Alors $f_Y(y) = \dfrac{1}{k} f_X\left(\dfrac{y}{k}\right) = \dfrac{1}{k} f_X(x)$.
Vérification :

- $f_Y(y) \geqslant 0$, car $\dfrac{1}{k} > 0$ et $f_X\left(\dfrac{y}{k}\right) > 0$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)dy = \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(\frac{y}{k}\right)dy = \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)kdx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Correction 10

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$Y = 2 + X^2$ est aussi une v.a. discrète :

$$Y(\Omega) = \{3, 6, 11, 18, 27, 38\}$$

- Si $y \notin Y(\Omega)$; $P(Y = y) = 0$
- Si $y \in Y(\Omega)$; $P(Y = y) = P(X = \sqrt{y-2}) = \dfrac{1}{6}$

La fonction F de répartition de Y est :

$$F(y) = P(Y \leqslant y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 3 \\ \frac{1}{6} & \text{si } 3 \leqslant y < 6 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 6 \leqslant y < 11 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 11 \leqslant y < 18 \\ \frac{2}{3} & \text{si } 18 \leqslant y < 27 \\ \frac{5}{6} & \text{si } 27 \leqslant y < 38 \\ 1 & \text{si } y \geqslant 38 \end{cases}$$

Correction 11

1. $$P(X \geqslant a + x) = P(X \leqslant a - x) = F(a - x)$$

   et

   $$\begin{aligned} P(X \geqslant a + x) &= 1 - P(X < a + x) = 1 - (P(X \leqslant a + x) - P(X = a + x)) \\ &= 1 - P(X \leqslant a + x) + P(X = a + x) \\ &= 1 - F(a + x) + P(X = a + x) \end{aligned}$$

   Donc
   $$F(a - x) = 1 - F(a + x) + P(X = a + x)$$

2. Dérivons par rapport à x, on obtient : $-f(a-x) = -f(a+x) \Longrightarrow f(a-x) = f(a+x)$

3. $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

   $\mathbb{E}(X-a) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)f(x)dx = \mathbb{E}(X) - a$

   Par le changement de variable, $x - a = y \Longrightarrow dx = dy$

$$\mathbb{E}(X-a) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y+a)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(a-y)dy$$

   On pose $a - y = z \Longrightarrow y = a - z$

$$\mathbb{E}(X-a) = -\int_{+\infty}^{-\infty} (a-z)f(z)dz = +\int_{-\infty}^{+\infty} (a-z)f(z)dz = a - \mathbb{E}(X)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) - a = a - E(X) &\Longrightarrow 2\mathbb{E}(X) = 2a \\ &\Longrightarrow \mathbb{E}(X) = a\end{aligned}$$