Université Mohamed Premier
Faculté Pluridisciplinaire -Nador
Département de Mathématiques

Corrigés du TD 2 – Probabilités

Correction 1

1. Du fait que $f(x)$ soit positive, on doit avoir $c\left(1-x^k\right)>0$.
   Comme $1-x^k \geqslant 0$ car $x\in[0,1]$ et $k\in\mathbb{N}^*$, on a $c>0$.
   La relation $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ entraîne $c\displaystyle\int_0^1\left(1-x^k\right)dx=1$ où $c=\frac{k+1}{k}$.
   Pour tout couple (c,k) lié par la relation précédente, c'est-à-dire $\left(\frac{k+1}{k},k\right);k\in\mathbb{N}^*$, la fonction $f(x)$ définit une densité de probabilité.
   On peut énumérer les couples $(2,1)$; $\left(\frac{3}{2},2\right);\cdots;\left(\frac{n+1}{n},n\right);\cdots$
2. Si $k=2$, $f(x)$ s'écrit

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}\left(1-x^2\right) & \text{si } 0\leqslant x<1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

   et $\displaystyle\mathbb{P}\left(X>\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f(x)dx=\frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1-x^2\right)dx=0,31$

Correction 2

1. Du fait que f soit positive, on doit avoir $k>0$.
   La relation $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ donne $k\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=1$, alors $k\operatorname{Arcsin}1=1$, c'est-à-dire $k=\dfrac{2}{\pi}$.
2. La fonction de répartition F de cette v.a. X est :

$$\begin{aligned}F(x)=&\mathbb{P}(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\\ &=\frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\end{aligned}$$

   Donc :

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \dfrac{2}{\pi}\operatorname{Arcsin}x & \text{si } 0\leqslant x<1\\ 1 & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}$$

Correction 3

1. Soit $Y = -2X + 1$. On a vu dans la $2^{\text{ème}}$ question de l'exercice 7 , de la série 1 , que si X est une v.a., alors $Y = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ est aussi une v.a.

   Ici on a $a = -2$ et $b = 1$, même raisonnement $Y = -2X + 1$ est aussi une v.a. ; où on peut écrire : $\{Y \leqslant x\} = \{-2X + 1 \leqslant x\} = \left\{X \geqslant \frac{1-x}{2}\right\} = \left\{X < \frac{1-x}{2}\right\}^c \in$ tribu considérée, (car X est una v.a.).

   Déterminons f_Y sa densité de probabilité.

   On a $Y = g(X)$ avec $g(x) = -2x + 1$ qui est une application **bijective**.

   D'où
$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right) \left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right|$$
   On a : $g^{-1}(y) = \dfrac{1-y}{2}$, alors $\left(g^{-1}(y)\right)' = -\dfrac{1}{2}$ et $f_X\left(g^{-1}(y)\right) = \dfrac{1}{2}$ si $-1 \leqslant \dfrac{1-y}{2} \leqslant 1$, i.e., $f_X\left(g^{-1}(y)\right) = \dfrac{1}{2}$ si $-1 \leqslant y \leqslant 3$.

   Donc :
$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & \text{si } -1 \leqslant y \leqslant 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Déterminons f_Z la densité de probabilité de $Z = X^2$.

   D'abord, Z est bien une v.a., car $\{X^2 \leqslant x\} = \{-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}\} \in$ la tribu considérée.

   $Z = X^2$, la transformation considérée ici, n'est pas bijective, donc, on ne peut pas utiliser la formule que l'on a utilisé dans la question précédente.

   Alors, on détrminera, d'abord, la fonction de répartition F_Z et on la dérive, par la suite, pour trouver la densité f_Z.

   Comme $X \sim \mathcal{U}(-1, 1)$ alors la fonction de répartition F_X de la v.a. X est définie par :
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
   On a : $F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leqslant z) = \mathbb{P}\left(X^2 \leqslant z\right)$

   ▶ Si $z \leqslant 0$, alors $F_Z(z) = 0$.

   ▶ Si $z > 0$, on trouve $F_Z(z) = \mathbb{P}(-\sqrt{z} \leqslant X \leqslant \sqrt{z})$
$$= F_X(\sqrt{z}) - F_X(-\sqrt{z})$$
   - Si $z \leqslant 1$, on a $F_Z(z) = \dfrac{\sqrt{z}+1}{2} - \dfrac{-\sqrt{z}+1}{2} = \sqrt{z}$
   - Si $z > 1$, on a $F_Z(z) = 1 - 0 = 1$

d'où

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leqslant 0 \\ \sqrt{z} & \text{si } z \in]0,1] \\ 1 & \text{si } z > 1 \end{cases}$$

On en déduit la fonction de densité de probabilité de Z :

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \notin]0,1] \\ \dfrac{1}{2\sqrt{z}} & \text{si } z \in]0,1] \end{cases}$$

Correction 4

La fonction de répartition de X est : $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(x)dt$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{a} & \text{si } 0 < x \leqslant a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

1. Déterminons f_Y la fonction de densité de probabilités de la v.a. $Y = X^2$

   Soit $y \in \mathbb{R}$; $\mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}\left(X^2 \leqslant y\right)$

   ▶ si $y < 0; \mathbb{P}(Y \leqslant y) = 0$

   ▶ si $y \geqslant 0$;

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leqslant y) &= \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant \sqrt{y}) - \mathbb{P}(X \leqslant -\sqrt{y}) \\ &= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) \\ &= F(\sqrt{y}) \end{aligned}$$

   Donc

$$F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y}}{a} & \text{si } 0 < y \leqslant a^2 \\ 1 & \text{si } y \geqslant a^2 \end{cases}$$

   D'où

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a\sqrt{y}} & \text{si } 0 < y \leqslant a^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. De même, pour $Z = \sqrt{X}$.

   Soit $z \geqslant 0$,

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leqslant z) = P\left(X \leqslant z^2\right) = F\left(z^2\right)$$

   Donc

$$f_Z(z) = 2zF'_X\left(z^2\right) = 2zf_X\left(z^2\right)$$

D'où

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{2z}{a} & \text{si } 0 < z \leqslant \sqrt{a} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Correction 5

1. Pour que f soit une densité de probabilité, il faut que $f(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

   Alors il faut que $\alpha > 0$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{\frac{a}{2}} \alpha x dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} \alpha(a-x)dx = 1$

   c'est-à-dire, il faut que $\alpha \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{a}{2}} + \alpha a[x]_{\frac{a}{2}}^{a} - \alpha \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_{\frac{a}{2}}^{a} = 1$

   et on trouve $\alpha = \dfrac{4}{a^2}$

2. $$\mathbb{P}\left(X > \frac{a}{2}\right) = \alpha \int_{\frac{a}{2}}^{a} (a-x)dx = \frac{4}{a^2}\left(a\left(a - \frac{a}{2}\right) - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{a}{2}}^{a}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{a}{2} - b < X \leqslant \frac{a}{2} + b\right) &= \int_0^{\frac{a}{2}+b} f(x)dx - \int_0^{\frac{a}{2}-b} f(x)dx \\
&= \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b} f(x)dx - \int_0^{\frac{a}{2}-b} f(x)dx \\
&= \int_{\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b} f(x)dx \\
&= \alpha\left(\int_{\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}} xdx + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b} (a-x)dx\right)
\end{aligned}$$

Soit le changement de variable $y = a - x$, dans la $2^{\text{ème}}$ intégrale

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{a}{2} - b < X \leqslant \frac{a}{2} + b\right) &= \alpha\left(\int_{\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}} xdx - \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}-b} ydy\right) \\
&= 2\alpha \int_{\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}} xdx = 2\alpha\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}} \\
&= \alpha b(a-b) \\
&= \frac{4b(a-b)}{a^2}
\end{aligned}$$

3. On a :
$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}\left(\frac{a}{2}<X\leqslant\frac{a}{2}+b\right)=\alpha\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b}(a-x)dx$$
Soit, par changement de variable $y=a-x$
$$\mathbb{P}(A\cap B)=\alpha\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b}ydy=\frac{\alpha}{2}[b(a-b)]$$
Ce qui démontre que l'on a : $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$, c'est-à-dire que les événements A et B sont indépendants.

Correction 6

D'une manière générale, F est une fonction de répartition d'une v.a. X définie par $F(x)=\mathbb{P}(X\leqslant x),\forall x\in\mathbb{R}$ si, et seulement si, elle a les propriétés suivantes :

- F est non-décroissante.
- F est continue à droite en tout point x de $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

Vérifions si ces conditions sont vérifiées pour les fonctions F et H données.

1. La fonction F donnée par :
$$F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{e^{-x}}{2} & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$$

   ► Sa dérivée est :
$$F'(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}}{2} & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$$
   Donc $F'(x)\geqslant 0$, d'où F est non-décroissante.

   ► $\forall\alpha\in\mathbb{R}^*$; on a : $\lim\limits_{x\to\alpha}F(x)=F(\alpha)\Leftrightarrow F$ est continue en $\alpha;\alpha\neq 0$.
   pour $\alpha=0$, on a : $\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=0\neq F(0)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$
$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\frac{1}{2}=F(0)$$
   Donc F est continue à droite de zéro, mais discontinue à gauche de zéro.

   ►
$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}(0)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{e^{-x}}{2}\right)=1-0=1$$
   Donc F est bien une fonction de répartition d'une certaine v.a.

2. La fonction H définie par :

$$H(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leqslant 0 \end{cases}$$

On vérifie de même que :

- H est non-décroissante.
- H est continue en tout point $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Pour $\alpha = 0$, on a $\lim\limits_{y \to 0^-} H(y) = 0 = H(0)$ et $\lim\limits_{y \to 0^+} H(y) = 1 \neq 0 = H(0)$

Donc H est continue à gauche de zéro, mais discontinue à droite de zéro.

D'où H ne peut être considérée comme une fonction de répartition et ceci malgré que l'on ait : $\lim\limits_{y \to 0^-} H(y) = 0$ et $\lim\limits_{y \to 0^+} H(y) = 1$.

Correction 7

La fonction $g(x) = ax + b$ est dérivable et sa dérivée garde un signe constant pour tout x, on peut, donc appliquer la formule $h(y) = f\left(g^{-1}(y)\right)\left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right|$ où h est la densité de probabilité de la variable $Y = aX + b$.
La fonction inverse $g^{-1}(y)$ se calcule en résolvant l'équation $y = ax + b$ par rapport à x ; on obtient $g^{-1}(y) = \dfrac{y-b}{a}$.
D'après le calcul $\left(g^{-1}(y)\right)' = \dfrac{1}{a}$; donc $\left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right| = \dfrac{1}{|a|}$.
D'où $h(y) = \dfrac{1}{|a|} f\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$