Université Mohamed Premier
Faculté Pluridisciplinaire -Nador
Département de Mathématiques

Corrigés du TD 3 – Probabilités

Correction 1

On considère une v.a. X qui suit une loi géométrique de paramètre p avec $0 < p < 1$, alors, $\forall k \in X(\Omega) = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}, \text{ avec } q = 1 - p$$

Montrons que la loi géométrique n'a pas de mémoire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geqslant k) &= \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X = k+1) + \cdots \\
&= pq^{k-1}(1 + q + \cdots) \\
&= \frac{pq^{k-1}}{1-q} = q^{k-1}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X \geqslant k + k_0 \mid X > k_0\right) &= \mathbb{P}\left(X \geqslant k + k_0 \mid X \geqslant k_0 + 1\right) \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(X \geqslant k + k_0, X \geqslant k_0 + 1\right)}{\mathbb{P}\left(X \geqslant k_0 + 1\right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(X \geqslant k + k_0\right)}{\mathbb{P}\left(X \geqslant k_0 + 1\right)}, \quad (\text{car } \ k > 1) \\
&= \frac{q^{k+k_0-1}}{q^{k_0}} = q^{k-1}
\end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $k_0 \geqslant 0$ et $k > 1$,

$$\mathbb{P}\left(X \geqslant k + k_0 \mid X > k_0\right) = \mathbb{P}(X \geqslant k)$$

Correction 2

Soit X une v.a. qui suit la loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$) et Y une v.a. qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que n entier naturel, $\{Y \mid X = n\} \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Déterminons la loi Y. Pour cela, calculons $\mathbb{P}(Y=k)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}\left(\{Y=k\}\bigcap\Omega\right) &= \mathbb{P}\left(\{Y=k\}\bigcap\bigcup_{n=0}^{\infty}\{X=n\}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(Y=k, X=n)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(Y=k \mid X=n)\cdot\mathbb{P}(X=n)\\
&= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{p}{1-p}\right)^k\sum_{n=k}^{\infty}C_n^k\frac{(\lambda(1-p))^n}{n!}\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\left(\frac{p}{1-p}\right)^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^n}{(n-k)!}
\end{aligned}$$

Changement d'indice $n-k=j$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=k) &= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\left(\frac{p}{1-p}\right)^k\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{j+k}}{j!}\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\left(\frac{p}{1-p}\right)^k\lambda^k(1-p)^k\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j(1-p)^j}{j!}\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!}p^k\lambda^k\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!}(\lambda p)^k e^{\lambda(1-p)}\\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}
\end{aligned}$$

Donc $Y\sim\mathcal{P}(\lambda p)$.

Correction 3

Montrons que : $X\sim\mathcal{P}(\lambda)\iff\forall n\in\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=n)=\dfrac{\lambda}{n}\mathbb{P}(X=n-1)$

$\Rightarrow$) Soit $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$, alors $\forall n\in\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=n)=\lambda^n\dfrac{e^{-\lambda}}{n!}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=n)=\dfrac{\lambda}{n}\lambda^{n-1}\dfrac{e^{-\lambda}}{(n-1)!}$

D'où $\forall n\in\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=n)=\dfrac{\lambda}{n}\mathbb{P}(X=n-1)$

$\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=n) = \dfrac{\lambda}{n}\mathbb{P}(X=n-1)$
Alors,

$$\mathbb{P}(X=n) = \frac{\lambda}{n}\cdot\frac{\lambda}{n-1}\cdot\frac{\lambda}{n-2}\cdots\lambda\mathbb{P}(X=0) = \frac{\lambda^n}{n!}\mathbb{P}(X=0)$$

Or, on sait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=n) = 1$
Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = \mathbb{P}(X=0)e^{\lambda} = 1$$

D'où $\mathbb{P}(X=0) = e^{-\lambda}$ et $\mathbb{P}(X=n) = \lambda^n\dfrac{e^{-\lambda}}{n!}$ i.e. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Correction 4

Soit une v.a. $X \sim \mathcal{B}(n,p)$

1. Soit la v.a. $Y = n - X$, on a : $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(X=n-k) = C_n^{n-k}p^{n-k}(1-p)^k$
   Comme $C_n^{n-k} = C_n^k$, on obtient
   $$\mathbb{P}(Y=k) = C_n^k(1-p)^k p^{n-k} = C_n^k(1-p)^k(1-(1-p))^{n-k}$$
   Donc $Y \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$.
2. On a : $\mathbb{P}(X=k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ et $\mathbb{P}(X=k-1) = C_n^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}$
   donc
   $$\frac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X=k-1)} = \frac{C_n^k p}{C_n^{k-1}(1-p)} = \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{k!(n-k)!}\frac{p}{(1-p)} = \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)},$$
   d'où l'égalité.
   Calcul de $\mathbb{P}(X=k)$ par récurrence :
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}(X=k-1)\frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}\\ &= \mathbb{P}(X=k-2)\frac{(n-k+2)(n-k+1)p^2}{(k-1)k(1-p)}\\ &= \cdots\cdots\\ &= \mathbb{P}(X=0)\frac{n\cdots(n-k+2)(n-k+1)p^k}{1\times\cdots\times(k-1)k(1-p)^k}\end{aligned}$$
   et comme $\mathbb{P}(X=0) = (1-p)^n$ et $n\cdots(n-k+2)(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, on retrouve la formule.

Correction 5

Soit X une v.a. qui suit une loi normale centrée réduite ($X \sim \mathcal{N}(0,1)$).
On considère la v.a. $Y = X^2$

1. On a $X \sim \mathcal{N}(0,1)$; donc $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}\left(X^2 \leqslant y\right)$$

d'où deux cas à distinguer :

- 1^er^ cas : Si $y \leqslant 0$; $F_Y(y) = \mathbb{P}\left(X^2 \leqslant y\right) = 0$, car $X^2 \geqslant 0$ p.s.
- 2^ème^ cas : Si $y > 0$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\left(X^2 \leqslant y\right) = \mathbb{P}\left(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$f_X(x)$ étant une fonction paire.

Posons $x^2 = u \Rightarrow 2x dx = du \Rightarrow dx = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}$

On a $F_Y(y) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^y \frac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}} u^{-\frac{1}{2}} du$

Or, on sait que $\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, avec Γ la fonction d'Euler définie par :

$\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$

on peut donc écrire :

$$F_Y(y) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^y u^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} du$$

de la forme $F_Y(y) = \dfrac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^y u^{\alpha-1} e^{-\frac{u}{\beta}} du$ ce qui est la fonction de répartition d'une v.a. suivant une loi Gamma de paramètres $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 2$.

Donc,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \displaystyle\int_0^y u^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} du & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

ou encore : $Y \sim \Gamma\left(\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 2\right)$

Définition 1

Dans ce cas particulier $\left(\beta = 2 \text{ et } \alpha = \dfrac{m}{2}, m \neq 2n\right)$.

On dit que Y suit une loi de Khi-deux $(\mathcal{X}_1^2)$ à un degré de liberté.

2. On en déduit la fonction de densité f_Y de Y :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} du & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

car $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Correction 6

Soit X une v.a. qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. On considère la v.a. $Y = \sin X$

1. On a : $X \sim \mathcal{U}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, alors :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \dfrac{2}{\pi} & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

On peut écrire $X(\Omega) \subset [0, 1]$

Pour $y \in \mathbb{R},\ F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(\sin X \leqslant y)$

Trois cas sont à envisager :

• 1^{er} cas : Si $y \leqslant 0$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(\sin X \leqslant y) = 0, \quad \text{car } \sin X \in [0, 1]$$

• $\underline{2}^{\text{ème}}$ cas : Si $0 < y < 1$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(\sin X \leqslant y) = \mathbb{P}(X \leqslant \operatorname{Arcsin} y) \\ &= \int_0^{\operatorname{Arcsin} y} \frac{2}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arcsin} y \end{aligned}$$

• $\underline{3}^{\text{ème}}$ cas : Si $y \geqslant 1$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(\sin X \leqslant y) = 1, \quad \text{car } \sin X \in [0, 1]$$

Donc, on peut écrire que :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ \dfrac{2}{\pi} \operatorname{Arcsin} y & \text{si } 0 < y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geqslant 1 \end{cases}$$

2. $f_Y(y) = \dfrac{dF_Y(y)}{dy} = \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{2}{\pi} \operatorname{Arcsin} y\right) = \dfrac{2}{\pi\sqrt{1 - y^2}}$, pour $0 < y < 1$.

Donc on aura :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin]0, 1[\\ \dfrac{2}{\pi\sqrt{1 - y^2}} & \text{si } y \in]0, 1[\end{cases}$$

Correction 7

On dit qu'une v.a. Y suit une loi Log-normale de paramètres μ et σ, et on note $Y \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma)$, si la v.a. $X = \ln Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

1. On a $Y \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma) \Longleftrightarrow X = \ln Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma);\ Y > 0$

   Posons $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{\ln Y - \mu}{\sigma} = \phi^{-1}(Y) \sim \mathcal{N}(0,1)$ où ϕ^{-1} est définie pour $y > 0$ et $Y = \phi(Z) = e^{\sigma Z + \mu}$ avec la fonction ϕ continue et strictement monotone,

   donc, $f_Y(y) = f_Z\left(\phi^{-1}(y)\right)\left|(\phi^{-1}(y))'\right| = f_Z\left(\dfrac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)\left|\dfrac{1}{\sigma y}\right|$ avec $f_Z(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}$

   Donc $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2}$, pour $y > 0$.

   D'où
$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y-\mu}{\sigma}\right)^2} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leqslant 0 \end{cases}$$

2. On peut écrire $F_Y(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sigma t\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)^2}dt$

   Posons $u = \dfrac{\ln t - \mu}{\sigma} \Rightarrow du = \dfrac{dt}{\sigma t}$

   On a alors
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u(y)} e^{-\frac{1}{2}u^2}du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\ln y-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}u^2}du \\ &= \phi\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right) \text{ si } y > 0 \end{aligned}$$

   Soit
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ \phi\left(\dfrac{\ln y-\mu}{\sigma}\right) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

   La v.a. $\dfrac{\ln Y - \mu}{\sigma}$ étant normale centrée réduite.

Correction 8

Soit la v.a. X telle que $\mathbb{E}(X) = \mu$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ existent. L'inégalité de Bienaymé-Tchébychev s'écrit, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

En particulier pour $\varepsilon = 3\sigma$, on obtient :

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant 3\sigma) \leqslant \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \frac{1}{9}$$

Donc $\mathbb{P}(|X-\mu|<3\sigma) \geqslant \dfrac{8}{9} \approx 0,888$
Ainsi, toute v.a. s'écarte de son espérance mathématique à moins de 3σ avec une probabilité non inféfieure à $\dfrac{8}{9}$.
C'est le cas extrême, le plus défavorable.
Dans la pratique, pour les v.a. qui se présentent dans les cas courants, cette probabilité est bien plus proche de l'unité ; par exemple, pour la loi normale, elle est égale à 0,997 ; pour la loi uniforme, à l'unité ; pour la loi exponentielle, à 0,982.

Correction 9

Soient $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, indépendantes.
Soit $m, n \in \mathbb{Z}^+$avec $m<n$, et cherchons la probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}(X=m \mid X+Y=n)$$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=m \mid X+Y=n) &= \frac{P(X=m, Y=n-m)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X=m)\cdot P(Y=n-m)}{P(X+Y=n)} \\
&= \frac{e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^m}{m!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-m}}{(n-m)!}}{\sum_{k=0}^{n} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{\lambda_1^k}{k!}\frac{\lambda_2^{(n-k)}}{(n-k)!}} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\lambda_1^m\lambda_2^{n-m}}{m!(n-m)!}}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}} \\
&= C_n^m \frac{\lambda_1^m \lambda_2^{n-m}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n} \\
&= C_n^m \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^m \left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-m} ; m=0,1,2,\cdots,n
\end{aligned}$$

Donc $X \mid \{X+Y=n\} \sim \mathcal{B}(n,p)$ avec $p=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

Correction 10

Soient X et Y deux v.a. indépendantes telles que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$.
α et β étant deux nombres tels que $\alpha \leqslant \beta$.
On veut calculer $\mathbb{P}(X=\alpha \mid X+Y=\beta)$.
D'abord, on doit savoir que si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$, avec X et Y deux v.a. indépendantes, alors, $X+Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)$.
En effet :

Comme X et Y sont indépendantes, on a :

$$\mathbb{P}(X+Y=\beta) = \sum_{A} \mathbb{P}(X=a)\cdot\mathbb{P}(X=b)$$

où $A = \{(a,b) \ / \ 0 \leqslant a \leqslant n, 0 \leqslant b \leqslant m, a+b=\beta\}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=\beta) &= \sum_A C_n^a p^a (1-p)^{n-a} \cdot C_m^b p^b (1-p)^{m-b} \\ &= \sum_A C_n^a \cdot C_m^b p^{a+b} (1-p)^{n+m-(a+b)}\end{aligned}$$

Or

$$\sum_A C_n^a \cdot C_m^b = \sum_{\beta=a+b=0}^{n+m} C_n^a \cdot C_m^b = \sum_{a=0}^{n} C_n^a C_m^{\beta-a} = C_{n+m}^{\beta}$$

En effet :

Considérons $(1+x)^{n+m} = (1+x)^n \cdot (1+x)^m$. Avec

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+m} &= \sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^k x^k \\ (1+x)^n &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i \\ (1+x)^m &= \sum_{j=0}^{m} C_m^j x^j\end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^k x^k = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i \cdot \sum_{j=0}^{m} C_m^j x^j$$

En identifiant les coefficients de x^k, on peut écrire :

$$C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{n} C_n^i C_m^{j=k-i}$$

D'où, en prenant $i=a, j=b$ et $k=\beta$, $C_{n+m}^{\beta} = \sum_{a=0}^{n} C_n^a C_m^{\beta-a}$

On en déduit que :

$$\mathbb{P}(X+Y=\beta) = C_{n+m}^{\beta} p^{\beta} (1-p)^{n+m-\beta}$$

i.e. $X+Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)$.

Calculons, maintenant, $\mathbb{P}(X=\alpha \mid X+Y=\beta)$.

X et Y étant indépendantes, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=\alpha \mid X+Y=\beta) &= \frac{\mathbb{P}(X=\alpha, X+Y=\beta)}{\mathbb{P}(X+Y=\beta)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X=\alpha \mid Y=\beta-\alpha)}{\mathbb{P}(X+Y=\beta)} \\
&= \frac{C_n^\alpha p^\alpha (1-p)^{n-\alpha} \cdot C_m^{\beta-\alpha} p^{\beta-\alpha} (1-p)^{m-\beta+\alpha}}{C_{n+m}^\beta p^\beta (1-p)^{n+m-\beta}} \\
&= \frac{C_n^\alpha C_m^{\beta-\alpha} p^\beta (1-p)^{n+m-\beta}}{C_{n+m}^\beta p^\beta (1-p)^{n+m-\beta}}
\end{aligned}$$

Soit $\mathbb{P}(X=\alpha \mid X+Y=\beta) = \dfrac{C_n^\alpha C_m^{\beta-\alpha}}{C_{n+m}^\beta}$

On voit, donc, que la loi de X conditionnée par $X+Y=\beta$ est hypergéométrique de paramètres $n+m, n$ et β (que l'on note par $\mathcal{H}(n+m,n,\beta)$).

Correction 11

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(e^X\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^x f(x) dx \quad \text{(Théorème de transfert)} \\
&= \int_0^{+\infty} e^x \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-1)x} dx
\end{aligned}$$

Pour $\lambda-1>0$, c'est-à-dire pour $\lambda>1$, cette intégrale existe, elle vaut $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{\lambda}{\lambda-1}$.
Pour $\lambda \leqslant 1$, elle est divergente.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Y^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(e^X\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(e^{2X}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x} f(x) dx \quad \text{(Théorème de transfert)} \\
&= \lambda \int_0^{+\infty} e^{2x} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-2)x} dx
\end{aligned}$$

Pour $\lambda>2$, cette intégrale existe et vaut $\dfrac{\lambda}{\lambda-2}$,
alors que la variance $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{\lambda}{\lambda-2} - \left(\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\right)^2$, pour $\lambda \leqslant 2$, l'intégrale est divergente et la variance $\mathrm{Var}(Y)$ n'existe pas.